Manfredo Perdigão do Carmo

Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies

Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies

TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

Manfredo P. do Carmo

Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies

TRADUÇÃO:
Pedro Roitman (Depto. de Matemática/UnB)

REVISÃO:
Leny A. Cavalcante (IBCCF/UFRJ)
Manfredo P. do Carmo (IMPA)

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E.L.Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A.C.Morgado, J.B.Pitombeira, P.C.P.Carvalho e P.Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E.L.Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E.L.Lima
- *Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios* - E.L.Lima com a colaboração de P.C.P.Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M.P.do Carmo, A.C.Morgado, E.Wagner, Notas Históricas de J.B.Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E.L.Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A.C.Morgado, E.Wagner e S.C.Zani
- *Construções Geométricas* - E.Wagner com a colaboração de J.P.Q.Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P.C.P.Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J.L.M.Barbosa
- *Isometrias* - E.L.Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E.L.Lima, P.C.P.Carvalho, E.Wagner e A.C.Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E.L.Lima, P.C.P.Carvalho, E.Wagner e A.C.Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E.L.Lima, P.C.P.Carvalho, E.Wagner e A.C.Morgado
- *Matemática e Ensino* - E.L.Lima
- *Temas e Problemas* - E.L.Lima, P.C.P.Carvalho, E.Wagner e A.C.Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A.Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E.L.Lima

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D.G.de Figueiredo
- *Primalidade em Tempo Polinomial - Uma Introdução ao Algoritmo AKS* - S.C.Coutinho

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L.N.de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E.C.de Oliveira e M.Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M.P.do Carmo

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H.Bolfarine e M.Sandoval

COLEÇÃO OLIMPÍADAS

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª* - C.Moreira, E.Motta, E.Tengan, L.Amâncio, N.Saldanha, P.Rodrigues

A Leny

Sumário

Prefácio da edição em inglês

Este livro é uma introdução à geometria diferencial de curvas e superfícies em seus aspectos local e global. A apresentação difere das tradicionais por um uso mais extenso de álgebra linear elementar e por uma certa ênfase em fatos geométricos básicos no lugar de cálculos mecânicos ou detalhes aleatórios.

Foi feito um esforço para construir cada capítulo do livro em torno de uma idéia simples e fundamental. Assim, o Capítulo 2 se desenvolve em torno do conceito de superfície regular em $\mathbb{R}^3$; quando adequadamente apresentado, este conceito é provavelmente o melhor modelo para o estudo das variedades diferenciáveis. O Capítulo 3 está construído em torno da aplicação normal de Gauss e contém uma grande quantidade da geometria local das superfícies em $\mathbb{R}^3$. O Capítulo 4 unifica a geometria intrínseca das superfícies em torno do conceito de derivada covariante; de novo, o propósito foi preparar o leitor para a noção básica de conexão em geometria riemanniana. Finalmente, no Capítulo 5, usamos a primeira e segunda variações do comprimento de arco para obter algumas propriedades globais de superfícies. Perto do final do Capítulo 5 (Seção 5.10), mostramos como questões em teoria das superfícies conduzem naturalmente a considerar variedades diferenciáveis e métricas riemannianas.

A fim de manter um equilíbrio entre idéias e fatos, um grande número de exemplos é calculado em detalhes. Além disto, foi proposto um suprimento razoável de exercícios. Um certo material de geometria diferencial clássica foi incluido nestes exercícios. Para os exercícios com estrela, sugestões ou respostas são dadas no final do livro.

Os pré-requisitos à leitura do livro são álgebra linear e Cálculo. De álgebra linear, apenas os conceitos mais básicos são necessários, e um curso padrão da graduação deve ser suficiente. Do Cálculo, espera-se uma certa familiaridade com Cálculo de várias variáveis (incluindo o enunciado do teorema da função implícita). Para conveniência do leitor, fizemos um esforço para restringir nossas referências a R.C. Buck, Advanced Calculus, McGraw-Hill, New York,

1965 (citado apenas como Buck, Calculo Avançado). Um certo conhecimento de equação diferenciais será útil, mas não é exigido.

O livro é uma tradução livre, com material adicional, de um livro e um conjunto de notas, ambos publicados originalmente em português. Não fora o entusiasmo e a enorme ajuda de Blaine Lawson, o livro não teria aparecido em inglês. Uma grande parte da tradução foi feita por Leny Cavalcante. Sou também devedor aos meus colegas e estudantes do IMPA por seus comentários e apoio. Em particular, Elon Lima leu parte da versão em português e fez valiosas sugestões.

Roberto Gardner, Jürgen Kern, Blaine Lawson, e Nolan Wallach leram criticamente o manuscrito em inglês, e me ajudaram a evitar vários erros, tanto em inglês quanto em matemática. Roy Ogawa preparou os programas de computador para alguns belos desenhos que aparecem no livro (Figs. 1.3, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 3.45 e 4.4). Jerry Kazdan ofereceu generosamente o seu tempo, e apresentou, literalmente, centenas de sugestões para a melhora do manuscrito; a forma final do livro se beneficiou muito dos seus conselhos. A todas estas pessoas - e a Arthur Wester, Editor de Matemática da Prentice-Hall e Wilson Goes no IMPA - apresento os meus sinceros agradecimentos.

Rio de Janeiro

Manfredo P. do Carmo

Prefácio à edição em português

Este livro é uma tradução do *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, publicado pela Prentice-Hall em 1976. Em verdade, uma versão do livro havia sido publicada em português em 1971 pela editora Ao Livro Técnico. Mas a edição em inglês foi de tal modo ampliada, pela inclusão de novos exercícios, seções adicionais, um capítulo sobre geometria global, e várias outras mudanças, que, exceto pela estrutura básica, a versão de 1976 era um livro inteiramente diferente da versão de 1971.

Desde a sua publicação em inglês, vem me sendo insistentemente perguntado quando o livro voltaria à sua língua natal. Como eu havia decidido a não fazer a tradução de volta (por várias razões, inclusive o risco de mudar tudo de novo), o problema só foi resolvido quando o Professor Pedro Roitman, da Universidade de Brasília, se ofereceu gentilmente para a árdua tarefa da tradução. Quero deixar aqui consignado o meu profundo agradecimento pelo seu trabalho competente e generoso. Sou também devedor a Leny A. Cavalcante por ter me ajudado não só a levar o livro para o inglês como também a trazê-lo de volta à lingua natal.

Salvo por algumas correções e melhoras em umas poucas demonstrações, o livro permanece o mesmo. Como sempre, tais mudanças foram sugeridas por estudantes, colegas e amigos, a quem este livro muito deve desde os seus primeiros passos. Para esta edição, sou grato a Fabio Julio Valentim, pela revisão dos quatro primeiros capítulos do livro, a Rogerio Dias Trindade pela editoração do material traduzido, e a Suely Druck pelo convite para incluir o livro na Coleção Textos Universitários da SBM.

Manfredo P. do Carmo

IMPA, 1/6/2005.

Algumas observações sobre o uso deste livro

Este livro foi escrito com o propósito de poder ser usado em mais de um tipo de curso de geometria diferencial. Cada capítulo se inicia com uma introdução que descreve o material do capítulo e explica como o material será usado posteriormente no livro. Para conveniência do leitor, usamos notas de rodapé para indicar quais seções (ou parte delas) podem ser omitidas em uma primeira leitura.

Embora o livro contenha bastante material para um curso de um ano, tentamos organizá-lo de modo a torná-lo adequado a um curso de um semestre em geometria diferencial para estudantes com alguma base em álgebra linear e um curso de análise de várias variáveis. Na falta deste último, e na presença de um curso de Cálculo de várias variáveis, recomendamos iniciar o Capítulo 2 pelo apêndice e omitir a maior parte das demonstrações deste capítulo.

Mesmo em um curso de graduação, deve-se procurar chegar ao teorema de Gauss-Bonnet, que é o coroamento de qualquer curso de geometria diferencial. Para isto, recomendamos o seguinte roteiro no Capítulo 4: Seções 4.2 (omita aplicações conformes e exercícios 4, 13-18, 20), 4.3 (até o teorema egregium), 4.4 (até o teorema de Liouville; omita exercícios 12, 13, 16, 18-21), 4.5 (até o teorema de Gauss-Bonnet local; inclua aplicações (b) e (f)).

Algumas observações finais. Primeiro, o fato de alguns exercícios serem indicados por uma estrela não significa que o exercício é fácil ou difícil. Significa apenas que uma solução ou uma sugestão foi apresentada no final do livro. Segundo, para indicar uma parametrização usamos um **x** em negrito; isto pode ser difícil de fazer no quadro negro, de modo que reservamos a letra X maiuscula como uma possível substituição. Finalmente, quando uma definição aparece em um contexto escrito em itálico, a definição é escrita em caracteres romanos para destacá-la do contexto.

1

Curvas

1.1 Introdução

A geometria diferencial das curvas e superfícies tem dois aspectos. O primeiro, que pode ser chamado de geometria diferencial clássica, teve ínicio com os primórdios do Cálculo. A grosso modo, geometria diferencial clássica é o estudo das propriedades locais das curvas e superfícies. Por propriedades locais entendemos aquelas propriedades que dependem apenas do comportamento da curva ou superfície nas proximidades de um ponto. Os métodos que se revelaram adequados ao estudo de tais propriedades foram os métodos do cálculo diferencial. Por esta razão, as curvas e superfícies consideradas na geometria diferencial serão definidas por funções que possam ser derivadas um certo número de vezes.

O outro aspecto é a chamada geometria diferencial global. Estuda-se aqui a influência das propriedades locais sobre o comportamento da curva ou superfície como um todo. Voltaremos a este aspecto da geometria diferencial no decorrer deste livro.

Provavelmente, a parte mais interessante e representativa da geometria diferencial clássica é o estudo das superfícies. Entretanto, algumas propriedades locais das curvas aparecem de uma maneira natural no estudo das superfícies, e dedicaremos este primeiro capítulo a um tratamento breve das curvas.

O capítulo está organizado de modo que o leitor interessado principalmente em superfícies pode ler apenas as seções 1.2 a 1.5. As seções 1.2 a 1.4 abordam essencialmente um conteúdo introdutório (curvas parametrizadas, comprimento de arco, produto vetorial), que provavelmente o leitor encontrou em outros cursos, e que incluímos aqui por uma questão de completitude. A principal seção deste capítulo é a 1.5; ela contém o material sobre curvas necessário para o estudo das superfícies. Para aqueles interessados em prosseguir o estudo das curvas incluímos as seções 1.6 e 1.7.

1.2 Curvas Parametrizadas

Denotaremos por $\mathbb{R}^3$ o conjunto dos ternos ordenados (x, y, z) de números reais. O nosso objetivo é caracterizar certos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ (a serem chamados de curvas) que são, em um certo sentido, unidimensionais e aos quais possam ser aplicados os métodos do cálculo diferencial. Uma maneira natural de definir esses subconjuntos é através de funções diferenciáveis. Diremos que uma função de uma variável real é *diferenciável* (ou suave) se ela possui, em todos os pontos, derivadas de todas as ordens (que são automaticamente contínuas). Uma primeira definição de curva, não inteiramente satisfatória mas suficiente para os propósitos deste capítulo, é a seguinte.

DEFINIÇÃO. *Uma* curva diferenciável parametrizada *é uma aplicação diferenciável* $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ *de um intervalo aberto* $I = (a, b)$ *da reta real* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}^3$.

A palavra *diferenciável* na definição acima significa que α é uma correspondência que leva cada $t \in I$ em um ponto $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$, de tal modo que as funções reais $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são diferenciáveis. Diremos que a variável t é o *parâmetro* da curva. A palavra *intervalo* é aqui considerada em um sentido amplo, de maneira que não excluímos os casos $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Denotando por $x'(t)$ a derivada primeira de $x(t)$ em um ponto t, e utilizando notações análogas para as funções y e z, o vetor $(x'(t), y'(t), z'(t)) = \alpha'(t) \in \mathbb{R}^3$ é chamado o *vetor tangente* (ou *vetor velocidade*) da curva $\alpha(t)$ em t. A imagem $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ é chamada o *traço* da curva α. Convém distinguir cuidadosamente, como mostra o Exemplo 5 abaixo, uma curva parametrizada, que é uma aplicação diferenciável, de seu traço, que é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

Um aviso sobre a terminologia. Muitas pessoas usam o termo "infinitamente diferenciáveis" para funções que possuem derivadas de todas as ordens, reservando a palavra "diferenciável" para funções que requerem a existência somente da derivada primeira. Nós não seguiremos este uso.

Exemplo 1. A curva diferenciável parametrizada dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt), \; t \in \mathbb{R},$$

tem por traço uma hélice de passo $2\pi b$ sobre o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. O parâmetro t mede o ângulo que o eixo Ox faz com a reta que liga a origem O à projeção do ponto $\alpha(t)$ sobre o plano xy (ver a Fig. 1.1).

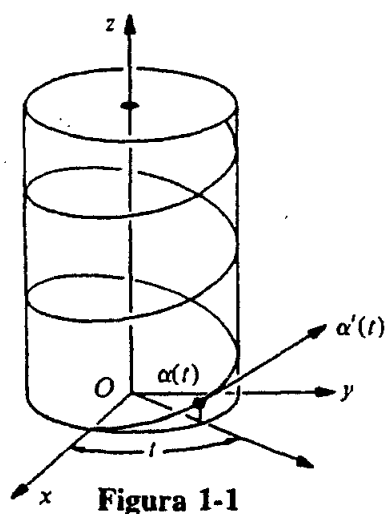



Figura 1-1

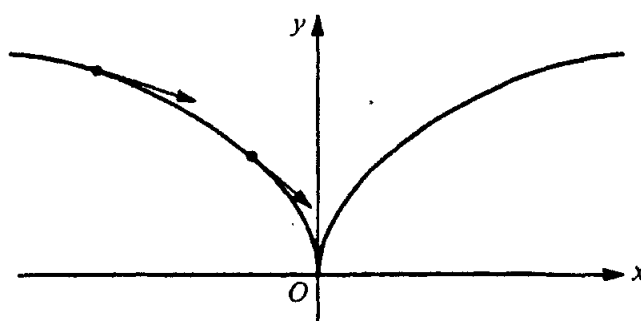



Figura 1-2

Exemplo 2. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável parametrizada cujo traço está esboçado na Fig.1.2. Observe que $\alpha'(0) = (0,0)$; isto é, o vetor velocidade é nulo para $t = 0$.

Exemplo 3. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável parametrizada (ver a Fig.1.3). Observe que $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0,0)$; isto é, a aplicação α não é biunívoca.

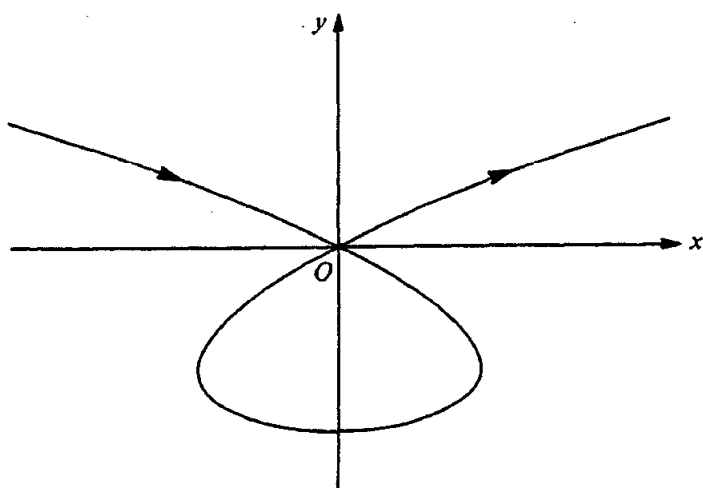



Figura 1-3

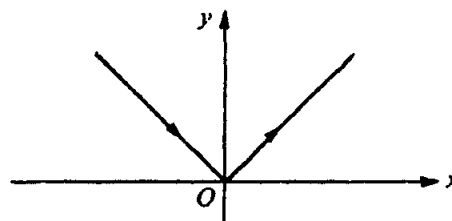



Figura 1-4

Exemplo 4. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, |t|)$, $t \in \mathbb{R}$ não é uma curva diferenciável parametrizada, pois $|t|$ não é diferenciável em $t = 0$. (ver Fig. 1.4).

Exemplo 5. As duas curvas parametrizadas distintas

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),$$

$$\beta(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t),$$

onde $t \in (0 - \epsilon, 2\pi + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, possuem o mesmo traço, a saber, o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Observe que o vetor velocidade da segunda curva é o dobro do da primeira (Fig. 1.5).

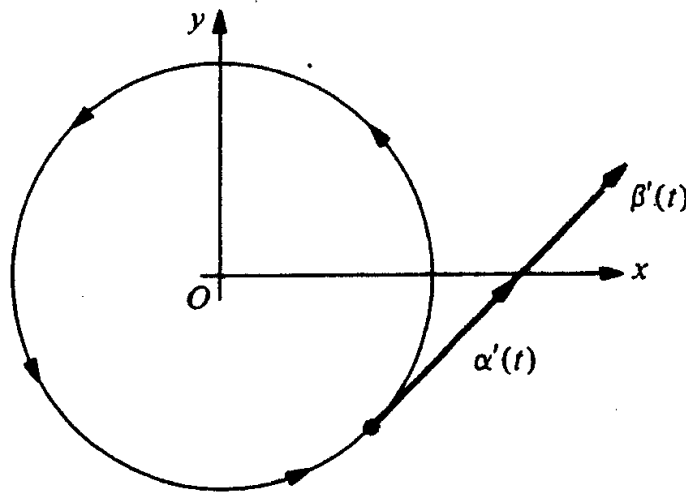



Figura 1-5

Recordaremos agora brevemente algumas propriedades do produto interno (ou produto escalar) de vetores em $\mathbb{R}^3$. Seja $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$; definimos a sua norma (ou comprimento) por

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Geometricamente, $|u|$ é a distância do ponto (u_1, u_2, u_3) à origem $0 = (0, 0, 0)$. Sejam agora $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, $u, v \in \mathbb{R}^3$, e seja θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, o ângulo formado pelos segmentos Ou e Ov. O produto interno $u{\cdot}v$ é definido por (Fig. 1.6)

$$u \cdot v = |u|\,|v| \cos \theta.$$

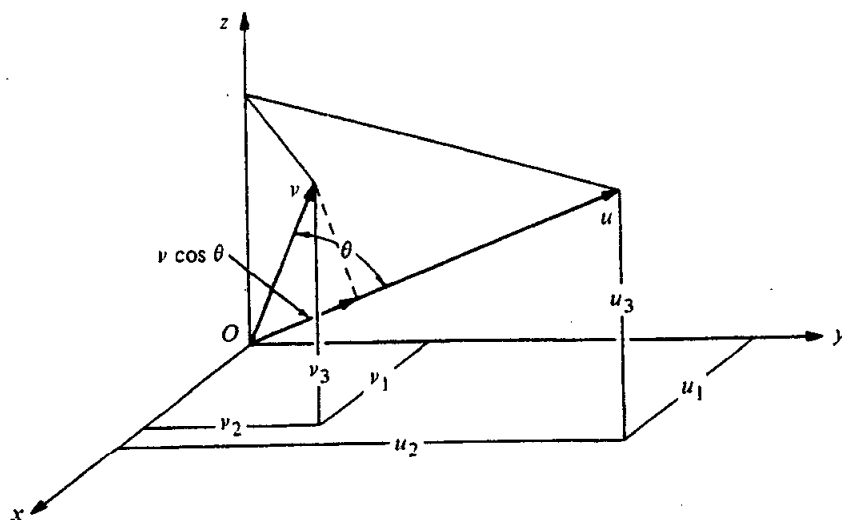



Figura 1-6

Valem as seguintes propriedades:

1. Admita que u e v sejam vetores não-nulos. Então $u \cdot v = 0$ se e somente se u é ortogonal a v.
2. $u \cdot v = v \cdot u$.
3. $\lambda(u \cdot v) = \lambda u \cdot v = u \cdot \lambda v$.
4. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$.

Uma expressão útil para o produto interno pode ser obtida da seguinte maneira. Sejam $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$. Verifica-se facilmente que $e_i \cdot e_j = 1$ se $i = j$ e que $e_i \cdot e_j = 0$ se $i \neq j$, onde $i, j = 1, 2, 3$. Desta maneira, se escrevemos

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3,$$

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3,$$

e utilizamos as propriedades 3 e 4, obtemos

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Segue-se da expressão acima que se $u(t)$ e $v(t)$, $t \in I$, são curvas diferenciáveis, então $u(t) \cdot v(t)$ é uma função diferenciável, e

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t).$$

Exercícios

1. Encontre uma curva parametrizada $\alpha(t)$ cujo traço seja o círculo $x^2 + y^2 = 1$ de maneira que $\alpha(t)$ percorra o círculo no sentido anti-horário e tenhamos $\alpha(0) = (0, 1)$.

2. Seja $\alpha(t)$ uma curva parametrizada que não passa pela origem. Se $\alpha(t_0)$ é o ponto do traço de α mais próximo da origem e $\alpha'(t_0) \neq 0$, mostre que o vetor posição $\alpha(t_0)$ é ortogonal a $\alpha'(t_0)$.

3. Considere uma curva parametrizada $\alpha(t)$ tal que a sua derivada segunda $\alpha''(t)$ seja identicamente nula. O que podemos dizer a respeito de α?

4. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada e seja $v \in \mathbb{R}^3$ um vetor fixado. Admita que $\alpha'(t)$ seja ortogonal a v para todo $t \in I$ e que $\alpha(0)$ também seja ortogonal a v. Prove que $\alpha(t)$ é ortogonal a v para todo $t \in I$.

5. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada, com $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Mostre que $|\alpha(t)|$ é uma constante não nula se e somente se $\alpha(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo $t \in I$.

1.3 Curvas Regulares; Comprimento de Arco

Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável parametrizada. Para cada $t \in I$ tal que $\alpha'(t) \neq 0$, há uma reta bem definida contendo o ponto $\alpha(t)$ e o vetor $\alpha'(t)$. Essa reta é chamada a *reta tangente* a α em t. Para o desenvolvimento da geometria diferencial das curvas é essencial a existência de uma reta tangente em todos os pontos. Convém, portanto, chamar *ponto singular* de α um ponto $t \in I$ onde $\alpha'(t) = 0$, e restringirmos as nossas considerações às curvas sem pontos singulares. Observe que o ponto $t = 0$ no Exemplo 2 da seção 1.2 é um ponto singular.

DEFINIÇÃO. *Uma curva diferenciável parametrizada* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *é chamada* regular *se* $\alpha'(t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$.

De agora em diante consideraremos apenas curvas diferenciáveis parametrizadas regulares (e omitiremos por comodidade a palavra diferenciável).

Dado $t_0 \in I$, o *comprimento de arco* de uma curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, a partir do ponto t_0, é por definição

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\, dt,$$

onde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

é o comprimento do vetor $\alpha'(t)$. Como $\alpha'(t) \neq 0$, o comprimento de arco s é uma função diferenciável de t e $ds/dt = |\alpha'(t)|$.

Apresentaremos no Exercício 8 uma justificação geométrica para a definição dada acima para o comprimento de arco.

Pode acontecer que o parâmetro t já seja o comprimento de arco medido a partir de um certo ponto. Neste caso, $ds/dt = 1 = |\alpha'(t)|$; isto é, o vetor velocidade tem comprimento constante igual a 1. Reciprocamente, se $|\alpha'(t)| = 1$, então

$$s = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0;$$

i.e., t é o comprimento de arco de α medido a partir de algum ponto.

Para simplificar a exposição, vamos nos restringir às curvas parametrizadas pelo comprimento de arco s; veremos posteriormente (Seção 1.5) que esta restrição não é essencial. Em geral, não é necessário mencionar a origem do comprimento de arco, uma vez que a maioria dos conceitos são definidos apenas em termos das derivadas de $\alpha(s)$.

Convém estabelecer uma última convenção. Dada uma curva α parametrizada pelo comprimento de arco $s \in (a, b)$, podemos considerar a curva β definida em $(-b, -a)$ por $\beta(-s) = \alpha(s)$, que possui o mesmo traço que a primeira, percorrido porém em sentido contrário. Diremos que estas duas curvas diferem por uma *mudança de orientação*.

Exercícios

1. Mostre que as retas tangentes à curva parametrizada regular $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ fazem um ângulo constante com a reta $y = 0$, $z = x$.

2. Um disco circular de raio 1 no plano xy gira sem escorregar ao longo do eixo Ox. A figura descrita por um ponto da circunferência do disco é chamada uma *ciclóide* (Fig 1.7).

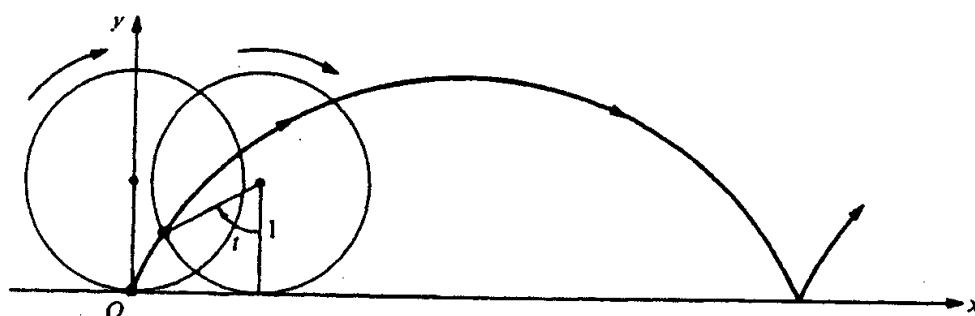



Figura 1-7. *A cicloide.*

   a. Obtenha uma curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cujo traço seja uma ciclóide e determine seus pontos singulares.

   b. Calcule o comprimento de arco da ciclóide correspondente a uma rotação completa do disco.

3. Seja OA um diâmetro, de comprimento $2a$, de um círculo S^1 e sejam OY e AV as retas tangentes a S^1, respectivamente, em O e A. Uma semi-reta r é traçada a partir de O e encontra o círculo S^1 em C e a reta AV em B. Marque na reta OB o segmento Op de maneira que comprimento de Op seja igual ao de CB. Girando r em torno de O, o ponto p descreve uma curva chamada a *cissóide de Diocles.* Tomando O como a origem do plano xy, OA como o eixo Ox e OY como o eixo Oy, mostre que

   a. O traço de

$$a(t) = (\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2}), \ t \in \mathbb{R},$$

   é a cissóide de Diocles ($t = \tan\theta$, ver Fig. 1.8).

b. A origem$(0,0)$ é um ponto singular da cissóide.

c. À medida que $t \to \infty$, $\alpha(t)$ se aproxima da reta $x = 2a$, e $\alpha'(t) \to (2a, 0)$. Assim, quando $t \to \infty$, a curva e a sua tangente se aproximam da reta $x = 2a$; dizemos que $x = 2a$ é uma assíntota da cissóide.

4. Seja $\alpha : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$a(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t + \log \operatorname{tg} \frac{t}{2}),$$

onde t é o ângulo que o vetor $\alpha'(t)$ faz com o eixo Oy. O traço de α é chamado de *tractriz.*

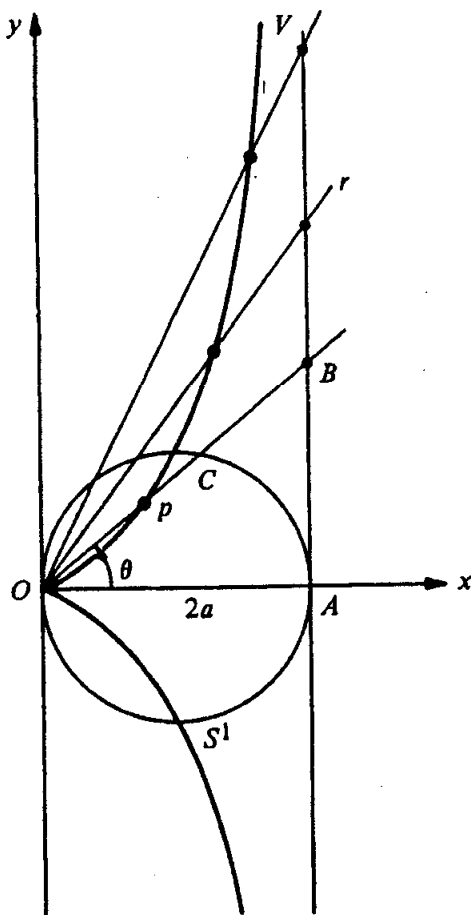
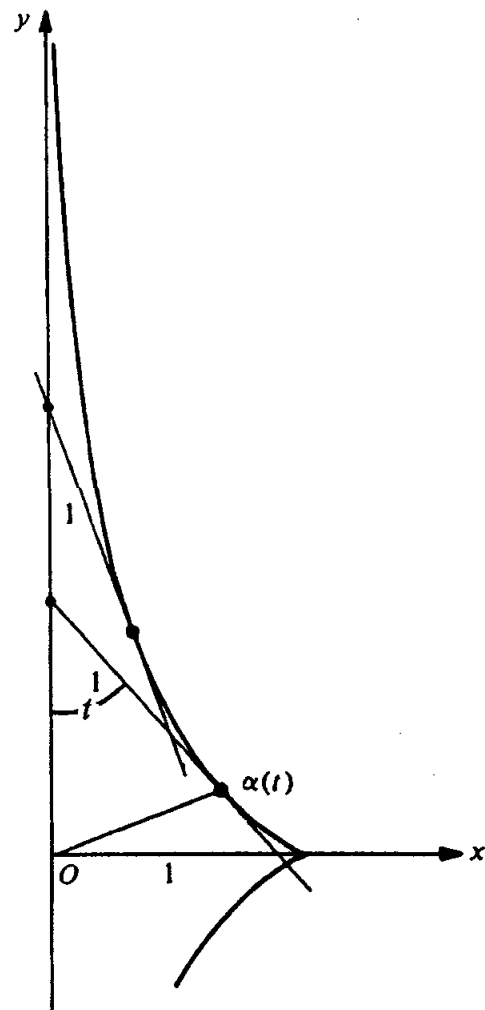



Figura 1-8. *A cissoide de Diocles.* **Figura 1-9.** *A tractriz.*

Mostre que

*a. α é uma curva diferenciável parametrizada, regular exceto em $t = \frac{\pi}{2}$.

b. O comprimento do segmento da tangente da tractriz entre o ponto de tangência e o eixo Oy é constante e igual a 1.

5. Seja $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3}).$$

Prove que:

a. Para $t = 0, \alpha$ é tangente ao eixo Ox.

b. Quando $t \to +\infty$, $\alpha(t) \to (0,0)$ e $\alpha'(t) \to (0,0)$.

c. Considerando a curva com a orientação oposta, quando $t \to -1$, a curva e a sua tangente se aproximam da reta $x + y + a = 0$.

A figura obtida completando-se o traço de α de forma que ele se torne simétrico em relação à reta $y = x$ é chamada o *folium de Descartes* (ver Fig. 1.10)

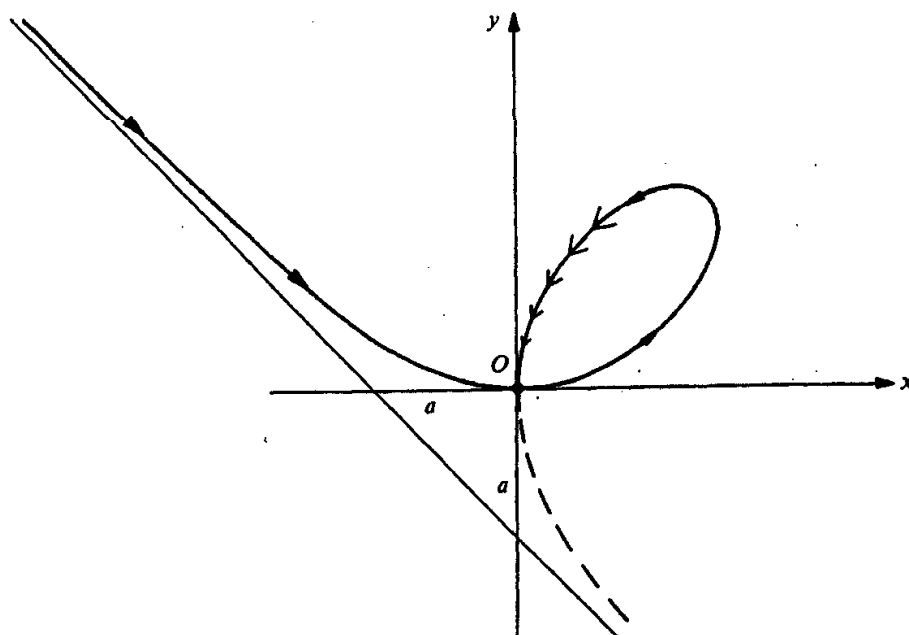



Figura 1-10. *O folium de Descates.*

6. Seja $\alpha(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $b < 0$ constantes, uma curva parametrizada.

   a. Mostre que quando $t \to +\infty$, $\alpha(t)$ aproxima-se da origem, espiralando em torno dela (por causa disto, o traço de α é chamada a *espiral logarítmica*; ver Fig. 1.11).

   b. Mostre que $\alpha'(t) \to (0,0)$ quando $t \to +\infty$ e que

   $$\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}|\alpha'(t)|\,dt$$

   é finito; isto é, α tem comprimento de arco finito em $[t_0, \infty)$.

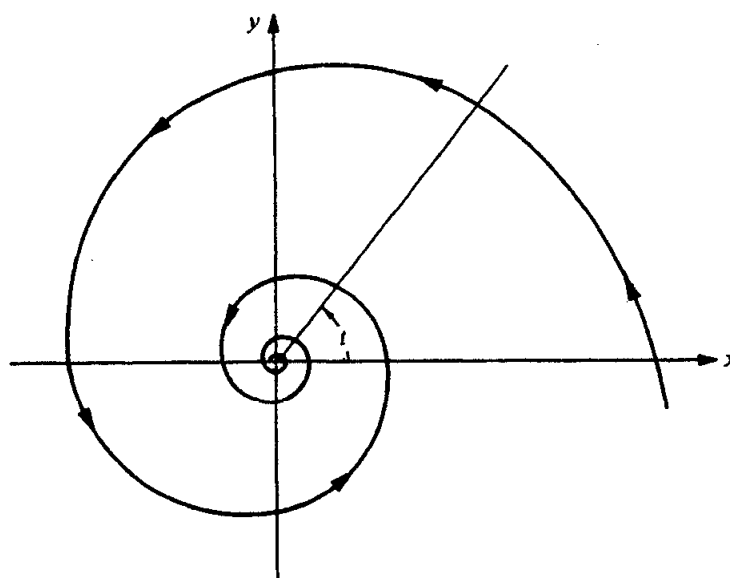



Figura 1-11. *A espiral logarítmica.*

7. Uma aplicação $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ é chamada uma *curva de classe* C^k se cada uma das funções coordenadas na expressão $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tem derivadas contínuas até a ordem k. Se α é apenas contínua, diz-se que α é de classe C^0. A curva α é dita *simples* se a aplicação α é biunívoca. Assim, a curva no Exemplo 3 da secão 1.2 não é simples.

   Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva simples de classe C^0. Diz-se que α possui *tangente fraca* em $t_0 \in I$, se a reta determinada por $\alpha(t_0 + h)$ e $\alpha(t_0)$

tiver uma posição limite quando $h \to 0$. Diz-se que α possui *tangente forte* em $t_0 \in I$, se a reta determinada por $\alpha(t_0 + h)$ e $\alpha(t_0 + k)$ tiver uma posição limite quando $h \to 0$ e $k \to 0$. Mostre que

a. $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, possui tangente fraca, porém não tangente forte, em $t = 0$.

***b.** Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 e regular em $t = t_0$, então α possui tangente forte em $t = t_0$.

c. A curva dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t^2, t^2), & t \geq 0, \\ (t^2, -t^2), & t \leq 0, \end{cases}$$

é de classe C^1, porém não de classe C^2. Faça um esboço da curva e de seus vetores tangentes.

***8.** Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável e seja $[a, b] \subset I$ um intervalo fechado. Para toda partição

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

de $[a, b]$, considere a soma $\sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = l(\alpha, P)$, onde P designa a partição dada. A norma $|P|$ da partição P é definida por

$$|P| = \max(t_i - t_{i-1}), \ i = 1, ..., n.$$

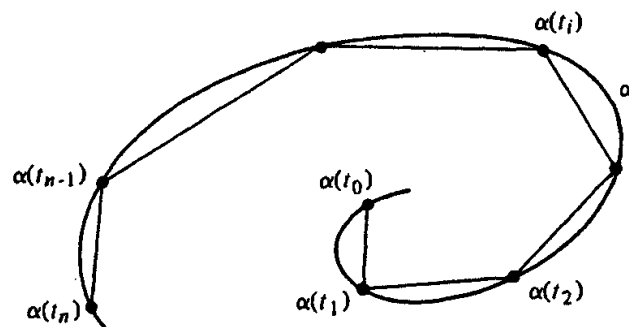



Figura 1-12

Geometricamente, $l(\alpha, P)$ é o comprimento de um polígono inscrito em $\alpha([a,b])$ com vértices em $\alpha(t_i)$ (ver Fig 1.12). O objetivo deste exercício é mostrar que o comprimento de arco de $\alpha([a,b])$ é, em certo sentido, um limite de comprimentos de polígonos inscritos.

Prove que dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $|P| < \delta$ então

$$\left| \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt - l(\alpha, P) \right| < \epsilon.$$

9. a. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva de classe C^0 (cf. Exercício 7). Utilize a aproximação por polígonos descrita no Exercício 8 para dar uma definição razoável para o comprimento de arco de α.

b. (Uma *curva não-retificável.*) O exemplo que se segue mostra que, para qualquer definição razoável, o comprimento de uma curva C^0 definida em um intervalo fechado pode ser ilimitado. Seja $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, sen(\frac{\pi}{t}))$ se $t \neq 0$, e $\alpha(0) = (0,0)$. Mostre, geometricamente, que o comprimento de arco da parte da curva correspondente a $\frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}$ é pelo menos $\frac{2}{(n+\frac{1}{2})}$. Use isto para mostrar que o comprimento da curva no intervalo $\frac{1}{N} \leq t \leq 1$ é maior que $2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)}$, tendendo assim para o infinito quando $N \to \infty$.

10. (*Retas como caminhos mais curtos.*) Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada. Seja $[a,b] \subset I$ e defina $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$.

a. Moste que, para qualquer vetor constante v, $|v| = 1$,

$$(q-p) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt.$$

b. Defina

$$v = \frac{q-p}{|q-p|}$$

e mostre que

$$|\alpha(a) - \alpha(b)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt,$$

isto é, a curva com menor comprimento de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$ é o segmento de reta ligando estes pontos.

1.4 O produto vetorial em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção faremos uma exposição de algumas das propriedades do produto vetorial em $\mathbb{R}^3$. Tais propriedades nos serão úteis no decorrer do estudo das curvas e superfícies.

Começaremos revisando a noção de orientação de um espaço vetorial. Duas bases ordenadas $e = \{e_i\}$ e $f = \{f_i\}$, $i = 1, ..., n$, de um espaço vetorial V, $n-$dimensional, têm a *mesma orientação* se a matriz da mudança de base possui um determinante positivo. Denotamos esta relação por $e \sim f$. Segue-se das propriedades elementares sobre determinantes que $e \sim f$ define uma relação de equivalência; i.e. satisfaz

1. $e \sim e$.
2. Se $e \sim f$, então $f \sim e$.
3. Se $e \sim f$, $f \sim g$, então $e \sim g$.

Temos assim uma decomposição das bases ordenadas de V em classes de equivalência (os elementos de uma dada classe estão relacionados por $\sim$), que são disjuntas pela propriedade 3. Como o determinante da mudança de base ou é positivo ou é negativo, existem apenas duas classes.

Cada uma das classes determinada pela relação de equivalência acima é chamada uma *orientação* de V. Assim, V tem duas orientações, e se fixamos uma das duas de maneira arbitrária, a outra é chamada de orientação oposta.

No caso em que $V = \mathbb{R}^3$ existe uma base ordenada natural $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, e a orientação correspondente a esta base é chamada a *orientação positiva* do $\mathbb{R}^3$, a outra sendo a *orientação negativa* (é claro que isto se aplica analogamente a qualquer $\mathbb{R}^n$). Diremos também que uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ é *positiva* (ou *negativa*) se ela pertence à orientação positiva (ou negativa) de $\mathbb{R}^3$. A base ordenada e_1, e_3, e_2, por exemplo, é uma base negativa, uma vez que a matriz que muda esta base para e_1, e_2, e_3 tem determinante igual a -1.

Apresentamos agora o produto vetorial. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$. O *produto vetorial* de u e v (nesta ordem) é o único vetor $u \wedge v \in \mathbb{R}^3$ caracterizado por

$$(u \wedge v) \cdot w = \det(u, v, w),$$

para todo $w \in \mathbb{R}^3$. A expressão $\det(u, v, w)$ tem o seguinte sentido. Expres-

sando u, v e w na base natural $\{e_i\}$,

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{3} u_i e_i, \qquad v = \sum_{n=1}^{3} v_i e_i, \\ w &= \sum_{n=1}^{3} w_i e_i, \qquad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

então

$$\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

onde $|a_{ij}|$ denota o determinante da matriz (a_{ij}). Uma consequência imediata da definição é a seguinte

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3. \qquad (1)$$

Observação. Frequentemente encontra-se $u \wedge v$ escrito como $u \times v$.

As seguintes propriedades podem ser verificadas sem dificuldade (na verdade elas simplesmente expressam propriedades conhecidas dos determinantes):

1. $u \wedge v = -v \wedge u$ (anti-comutatividade).

2. $u \wedge v$ depende linearmente de u e v; i.e., para quaisquer números reais a, b temos

$$(au + bw) \wedge v = au \wedge v + bw \wedge v.$$

3. $u \wedge v = 0$ se e somente se u e v são linearmente dependentes.

4. $(u \wedge v) \cdot u = 0$, $(u \wedge v) \cdot v = 0$.

Segue-se da propriedade 4 que o produto vetorial $u \wedge v \neq 0$ é ortogonal ao plano gerado pelos vetores u e v. Uma interpretação geométrica para a sua norma e direção pode ser obtida da seguinte maneira.

Primeiramente observamos que $(u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = |u \wedge v|^2 > 0$. Isto significa que o determinante dos vetores $u, v, u \wedge v$ é positivo; isto é, $\{u, v, u \wedge v\}$ é uma base positiva.

Em seguida provamos a relação

$$(u \wedge v) \cdot (x \wedge y) = \begin{vmatrix} u \cdot x & v \cdot x \\ u \cdot y & v \cdot y \end{vmatrix},$$

onde u, v, x, y são vetores arbitrários. A relação acima é obtida facilmente observando-se que os dois lados da equação são lineares em u, v, x, y. Desta maneira, basta verificar que

$$(e_i \wedge e_j) \cdot (e_k \wedge e_l) = \begin{vmatrix} e_i \cdot e_k & e_j \cdot e_k \\ e_i \cdot e_l & e_j \cdot e_l \end{vmatrix}$$

para todo $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Tal verificação não oferece dificuldades.

Conclui-se então que

$$|u \wedge v|^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & v \cdot u \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix} = |u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2 \theta) = A^2,$$

onde θ é o ângulo entre u e v, e A é a área do paralelogramo gerado por u e v.

Resumindo, o produto vetorial de u e v é um vetor $u \wedge v$ perpendicular ao plano gerado por u e v, cuja norma é igual à área do paralelogramo gerado por u e v e cuja direção é tal que $\{u, v, u \wedge v\}$ é uma base positiva (Fig.1.13).

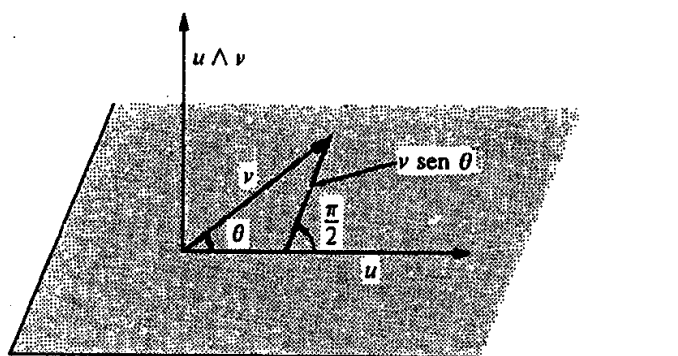



Figura 1-13

O produto vetorial não é associativo. De fato, verifica-se a seguinte identidade:

$$(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u, \tag{2}$$

que pode ser provada da seguinte maneira. Note que os dois lados são lineares em u, v, w; assim a identidade será verdadeira se valer para todos os vetores de uma base. No entanto, esta última verificação é imediata; por exemplo,

$$(e_1 \wedge e_2) \wedge e_1 = e_2 = (e_1 \cdot e_1)e_2 - (e_2 \cdot e_1)e_1.$$

Finalmente, sejam $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ e $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ aplicações diferenciáveis de um intervalo (a, b) em $\mathbb{R}^3$, $t \in (a, b)$. Decorre imediatamente da Eq.(1) que $u(t) \wedge v(t)$ é diferenciável e que

$$\frac{d}{dt}(u(t) \wedge v(t)) = \frac{du}{dt}(t) \wedge v(t) + u(t) \wedge \frac{dv}{dt}(t).$$

Os produtos vetoriais aparecem naturalmente em muitas construções geométricas. Na verdade, grande parte da geometria de planos e retas em $\mathbb{R}^3$ pode ser expressa de maneira elegante em termos de produtos vetoriais e determinantes. Os exercícios seguintes são uma ilustração de como isto pode ser feito.

Exercícios

1. Verifique se as seguintes base são positivas:

a. A base $\{(1,3),(4,2)\}$ em $\mathbb{R}^2$.

b. A base $\{(1,3,5),(2,3,7),(4,8,3)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

***2.** Considere um plano P em $\mathbb{R}^3$ dado pela equação $ax + by + cz + d = 0$. Mostre que o vetor (a, b, c) é perpendicular ao plano e que $|d| / \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ mede a distância do plano à origem $(0,0,0)$.

***3.** Determine o ângulo de interseção entre dois planos $5x + 3y + 2z - 4 = 0$ e $3x + 4y - 7z = 0$.

***4.** Dados dois planos $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$, $i = 1, 2$ prove que uma condição necessária e suficiente para que eles sejam paralelos é

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

onde fazemos a convenção de que se o denominador é zero, o numerador correspondente também é zero (dizemos que dois planos são paralelos se eles ou coincidem ou não se intersectam).

5. Mostre que a equação de um plano passando por três pontos não colineares $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $p_3 = (x_3, y_3, z_3)$ é dada por

$$(p - p_1) \wedge (p - p_2) \cdot (p - p_3) = 0,$$

onde $p = (x, y, z)$ é um ponto arbitrário do plano e, por exemplo, $p - p_1$ denota o vetor $(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$.

*6. Dados dois planos não-paralelos $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$, $i = 1, 2$, mostre que a reta de interseção pode ser parametrizada como

$$x - x_0 = u_1 t, \qquad y - y_0 = u_2 t, \qquad z - z_0 = u_3 t,$$

onde (x_0, y_0, z_0) pertence à interseção e $u = (u_1, u_2, u_3)$ é o produto vetorial $u = v_1 \wedge v_2$, $v_i = (a_i, b_i, c_i)$, $i = 1, 2$.

*7. Prove que uma condição necessária e suficiente para que o plano

$$ax + by + cz + d = 0$$

e a reta $x - x_0 = u_1 t$, $y - y_0 = u_2 t$, $z - z_0 = u_3 t$ sejam paralelos é

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0.$$

*8. Prove que a distância ρ entre duas retas não paralelas

$$\begin{array}{lll} x - x_0 = u_1 t, & y - y_0 = u_2 t, & z - z_0 = u_3 t, \\ x - x_1 = v_1 t, & y - y_1 = v_2 t, & z - z_1 = v_3 t, \end{array}$$

é dada por

$$\rho = \frac{|(u \wedge v) \cdot r)|}{|u \wedge v|},$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $r = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$.

9. Determine o ângulo de interseção entre o plano $3x + 4y + 7z + 8 = 0$ e a reta $x - 2 = 3t$, $y - 3 = 5t$, $z - 5 = 9t$.

10. A orientação natural de $\mathbb{R}^2$ possibilita associar um sinal à área A de um paralelogramo gerado por dois vetores linearmente independentes $u, v \in \mathbb{R}^2$. Para fazer isto, considere $\{e_i\}$, $i = 1, 2$, a base ordenada natural de $\mathbb{R}^2$, e escreva $u = u_1e_1 + u_2e_2$, $v = v_1e_1 + v_2e_2$. Note a seguinte relação matricial

$$\begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

e conclua que

$$A^2 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2.$$

Como o sinal do determinante acima coincide com o sinal da base $\{u, v\}$, podemos dizer que a área A é positiva ou negativa conforme seja positiva ou negativa a orientação de $\{u, v\}$. Esta é a chamada *área orientada* em $\mathbb{R}^2$.

11.a Mostre que o volume V de um paralelepípedo gerado por três vetores linearmente independentes $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ é dado por $V = |(u \wedge v) \cdot w|$, e defina o *volume orientado* em $\mathbb{R}^3$.

b. Prove que

$$V^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{vmatrix}.$$

12. Dados os vetores $v \neq 0$ e w, mostre que existe um vetor u tal que $u \wedge v = w$ se e somente se v é perpendicular à w. O vetor u está unicamente determinado? Se não, qual a solução mais geral?

13. Sejam $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ e $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ aplicações diferenciáveis do intervalo (a, b) em $\mathbb{R}^3$. Mostre que se as derivadas $u'(t)$ e $v'(t)$ satisfazem as condições

$$u'(t) = au(t) + bv(t), \ v'(t) = cu(t) - av(t),$$

onde a, b, c são constantes, então o vetor $u(t) \wedge v(t)$ é constante.

14. Encontre todos os vetores unitários que são perpendiculares ao vetor $(2, 2, 1)$ e paralelos ao plano determinado pelos pontos $(0, 0, 0)$, $(1, -2, 1)$, $(-1, 1, 1)$.

1.5 Teoria Local das Curvas Parametrizadas pelo Comprimento de Arco

Esta seção contém os resultados principais sobre curvas a serem utilizados no decorrer do livro.

Seja $\alpha : I = (a, b) \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s. Como o vetor tangente $\alpha'(s)$ é unitário, o módulo $|\alpha''(s)|$ da derivada segunda mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente em s. $|\alpha''(s)|$ dá, portanto, uma medida do quão rapidamente a curva se afasta, em uma vizinhança de s, da tangente em s (ver Fig. 1.14). Isso sugere a seguinte definição.

DEFINIÇÃO. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$. O número $|\alpha''(s)| = k(s)$ chama-se* curvatura de α em s.

Se α é uma reta, $\alpha(s) = us + v$, onde u e v são vetores constantes ($|u| = 1$), então $k \equiv 0$. Reciprocamente, se $k = |\alpha''(s)| \equiv 0$, então por integração, $\alpha(s) = us + v$, e a curva é uma reta.

Observe que mudando-se a orientação, o vetor tangente muda de sentido; isto é, se $\beta(-s) = \alpha(s)$, então

$$\frac{d\beta}{d(-s)}(-s) = -\frac{d\alpha}{ds}(s).$$

Portanto, $\alpha''(t)$ e a curvatura permanecem invariantes por uma mudança de orientação.

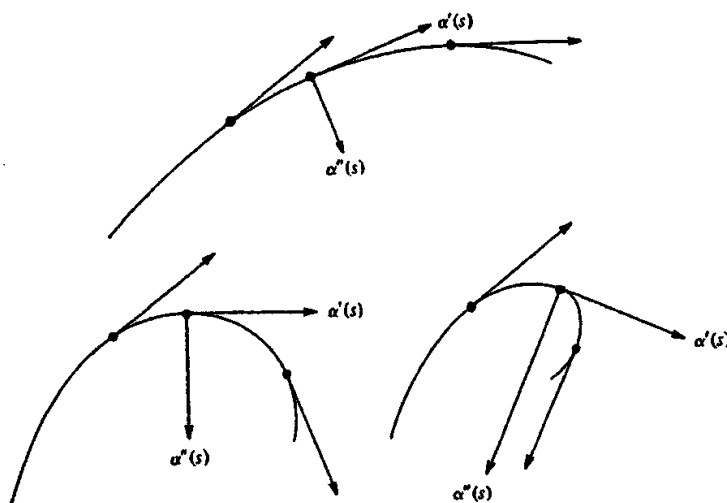



Figura 1-14

Nos pontos onde $k(s) \neq 0$, fica bem definido pela equação $\alpha''(s) = k(s)n(s)$, um vetor unitário $n(s)$ na direção de $\alpha''(s)$. Além disso, $\alpha''(s)$ é normal a $\alpha'(s)$, pois derivando $\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1$ obtemos $\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0$. Assim, $n(s)$ é normal a $\alpha'(s)$ e é chamado o *vetor normal* em s. O plano determinado por $\alpha'(s)$ e $n(s)$ é chamado o *plano osculador* em s. (ver Fig. 1.15.)

Nos pontos onde $k(s) = 0$, o vetor normal (e portanto o plano osculador) não está definido (cf. Exercício 10). Para prosseguir a análise local das curvas, necessitamos, de uma maneira essencial, do plano osculador. É portanto conveniente dizer que $s \in I$ é um *ponto singular de ordem 1* se $\alpha''(s) = 0$ (neste contexto, os pontos onde $\alpha'(s) = 0$ são chamados pontos singulares de ordem 0).

No que se segue, nos restringiremos às curvas parametrizadas pelo comprimento de arco sem pontos singulares de ordem 1. Indicaremos por $t(s) = \alpha'(s)$ o vetor tangente unitário de α em s. Temos então $t'(s) = k(s)n(s)$.

O vetor unitário $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ é normal ao plano osculador e será chamado o *vetor binormal* em s. Como $b(s)$ é unitário, o módulo $|b'(s)|$ mede a taxa de variação do ângulo do plano osculador em s com os planos osculadores vizinhos; isto é, $|b'(s)|$ indica quão rapidamente a curva se afasta, em uma vizinhança de s, do plano osculador em s,(ver Fig.1.15).

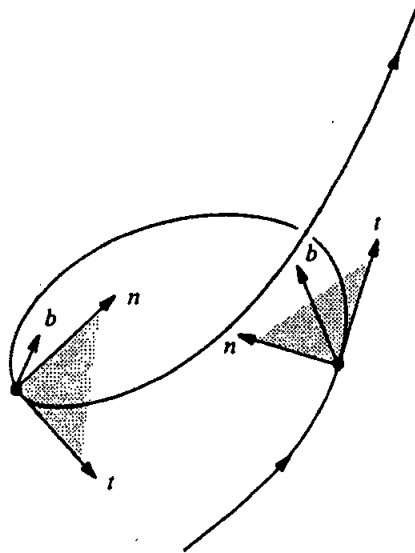



Figura 1-15

Para calcular $b'(s)$ observamos que, por um lado, $b'(s)$ é normal a $b(s)$ e, por outro lado,

$$b'(s) = t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) = t(s) \wedge n'(s);$$

isto é , $b'(s)$ é normal a $t(s)$. Decorre daí que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$, e podemos escrever

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

para alguma função $\tau(s)$. (*Aviso*: Muitos autores escrevem $-\tau(s)$ ao invés da nossa $\tau(s)$.)

DEFINIÇÃO. *Seja* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *uma curva parametrizada pelo comprimento de arco* s *tal que* $\alpha''(s) \neq 0$, $s \in I$. *O número* $\tau(s)$ *definido por* $b'(s) = \tau(s)n(s)$ *é chamado* torção *de* α *em* s.

Se α é uma curva plana (isto é, $\alpha(I)$ está contido em um plano) então o plano da curva coincide com o plano osculador; consequentemente, $\tau \equiv 0$. Reciprocamente, se $\tau \equiv 0$ (e $k \neq 0$), temos que $b(s) = b_0 = const.$, e portanto

$$(\alpha(s) \cdot b_0)' = \alpha'(s) \cdot b_0 = 0.$$

Decorre daí que $\alpha(s) \cdot b_0 = const.$; desta maneira, $\alpha(s)$ está contida em um plano normal a b_0. A condição que $k \neq 0$ por toda a parte é essencial aqui. No Exercício 10 daremos um exemplo onde τ pode ser definido como identicamente zero e, entretanto, a curva não é plana.

Diferentemente da curvatura a torção pode ser positiva ou negativa. O sinal da torção admite uma interpretação geométrica, que apresentaremos adiante (Seção 1.6).

Observe que mudando-se a orientação, o vetor binormal muda de sinal, pois $b = t \wedge n$. Decorre daí que $b'(s)$, e, consequentemente, a torção, permanecem invariantes por uma mudança de orientação.

Em suma, a cada valor do parâmetro s associamos três vetores unitários e ortogonais $t(s), n(s), b(s)$. O triedro assim construído chama-se *triedro de Frenet* em s. As derivadas $t'(s) = kn$, $b'(s) = \tau n$ dos vetores $t(s)$ e $b(s)$, quando expressas na base $\{t, n, b\}$, fornecem entidades geométricas (curvatura k e torção τ) que informam sobre o comportamento de α em uma vizinhança de s.

A procura de outros entes geométricos locais nos levaria a calcular $n'(s)$. Entretanto, como $n = b \wedge t$, teremos

$$n'(s) = b'(s) \wedge t(s) + b(s) \wedge t'(s) = -\tau b(s) - kt(s),$$

e obtemos novamente a curvatura e a torção.

Para uso posterior, vamos destacar as equações

$$\begin{aligned} t' &= kn, \\ n' &= -kt - \tau b, \\ b' &= \tau n, \end{aligned}$$

e chamá-las *fórmulas de Frenet* (onde omitimos o s por comodidade). É usual chamar-se o plano tb de *plano retificante* e o plano nb de *plano normal.* As retas passando por $\alpha(s)$, e contendo $n(s)$ e $b(s)$, são chamadas a *normal principal* e a *binormal*, respectivamente, em s. O inverso $R = 1/k$ da curvatura é chamado *raio de curvatura* em s. Pode-se verificar facilmente que um círculo de raio r possui um raio de curvatura igual a r.

Fisicamente, podemos pensar em uma curva em $\mathbb{R}^3$ como sendo obtida a partir de uma reta quando esta é entortada (curvatura) ou torcida (torção). Pensando um pouco sobre esta construção, somos levados a conjecturar a afirmação que se segue; que, a grosso modo, mostra que o comportamento local de uma curva pode ser descrito completamente por κ e τ.

Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas. *Dadas as funções diferenciáveis $k(s) > 0$ e $\tau(s)$, $s \in I$, existe uma curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ tal que s é o comprimento de arco, $k(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção de α. Além disso, qualquer outra curva $\tilde{\alpha}$, satisfazendo às mesmas condições, difere de α por um movimento rígido; isto é, existe uma transformação linear ortogonal ρ de $\mathbb{R}^3$, com determinante positivo, e um vetor c tal que $\tilde{\alpha} = \rho \circ \alpha + c$.*

Este enunciado é verdadeiro. Uma demonstração completa envolve o teorema sobre existência e unicidade de soluções de sistemas de equações ordinárias, e pode ser encontrada no apêndice do Capítulo 4. Entretanto, uma prova da unicidade, a menos de movimentos rígidos, para curvas possuindo as mesmas $k(s)$ e $\tau(s)$ é simples e pode ser apresentada aqui.

Prova da Unicidade do Teorema Fundamental. Primeiramente observamos que comprimento de arco, curvatura e torção são invariantes por movimentos rígidos; isto quer dizer, por exemplo, que se $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um movimento rígido e $\alpha = \alpha(t)$ é uma curva parametrizada, então

$$\int_a^b \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| dt = \int_a^b \left| \frac{d(M \circ \alpha)}{dt} \right| dt.$$

Isto é plausível, uma vez que estes conceitos são definidos utilizando-se os produtos interno e vetorial de certas derivadas (as derivadas são invariantes por translações, e os produtos interno e vetorial são expressos em termos de comprimentos e ângulos entre vetores, e assim são também invariantes por movimentos rígidos). Uma verificação cuidadosa deste fato fica como um exercício para o leitor (ver exercício 6).

Agora, admita que as duas curvas $\alpha = \alpha(s)$ e $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(s)$ satisfaçam às condições $k(s) = \tilde{k}(s)$ e $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$, $s \in I$. Sejam, respectivamente, t_0, n_0, b_0 e $\tilde{t}_0, \tilde{n}_0, \tilde{b}_0$ os triedros de Frenet em $s = s_0 \in I$ de α e $\tilde{\alpha}$. É claro que existe um movimento rígido que leva $\tilde{\alpha}(s_0)$ em $\alpha(s_0)$ e $\tilde{t}_0, \tilde{n}_0, \tilde{b}_0$ em t_0, n_0, b_0. Então, depois de aplicarmos este movimento rígido sobre $\tilde{\alpha}$, teremos $\tilde{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$ e os triedros de Frenet $t(s), n(s), b(s)$ e $\tilde{t}(s), \tilde{n}(s), \tilde{b}(s)$ de α e $\tilde{\alpha}$, respectivamente, satisfazendo as equações de Frenet

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{dt}{ds} = kn & \dfrac{d\tilde{t}}{ds} = k\tilde{n} \\
\dfrac{dn}{ds} = -kt - \tau b & \dfrac{d\tilde{n}}{ds} = -k\tilde{t} - \tau\tilde{b} \\
\dfrac{db}{ds} = \tau n & \dfrac{d\tilde{b}}{ds} = \tau\tilde{n},
\end{array}
$$

com $t(s_0) = \tilde{t}(s_0)$, $n(s_0) = \tilde{n}(s_0)$, $b(s_0) = \tilde{b}(s_0)$.

Observamos agora, usando as equações de Frenet, que

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\{|t-\tilde{t}|^2 + |n-\tilde{n}|^2 + |b-\tilde{b}|^2\} \\
= \; & < t-\tilde{t}, t'-\tilde{t}' > + < b-\tilde{b}, b'-\tilde{b}' > + < n-\tilde{n}, n'-\tilde{n}' > \\
= \; & k < t-\tilde{t}, n-\tilde{n} > + \tau < b-\tilde{b}, n-\tilde{n} > - k < n-\tilde{n}, t-\tilde{t} > \\
& -\tau < n-\tilde{n}, b-\tilde{b} > = 0,
\end{aligned}
$$

para todo $s \in I$. Logo, a expressão acima entre chaves é constante, e, como é nula para $s = s_0$, é de fato identicamente nula. Segue-se que $t(s) = \tilde{t}(s)$, $n(s) = \tilde{n}(s)$, $b(s) = \tilde{b}(s)$ para todo $s \in I$. Como

$$
\frac{d\alpha}{ds} = t = \tilde{t} = \frac{d\tilde{\alpha}}{ds},
$$

obtemos $\frac{d}{ds}(\alpha - \tilde{\alpha}) = 0$. Decorre daí que $\alpha(s) = \tilde{\alpha}(s) + a$, onde a é um vetor constante. Mas já que $\alpha(s_0) = \tilde{\alpha}(s_0)$, temos que $a = 0$; logo, $\alpha(s) = \tilde{\alpha}(s)$ para todo $s \in I$. **Q.E.D.**

Observação 1. No caso particular de uma curva plana $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, é possível associar um sinal à curvatura k. Para isto, seja $\{e_1, e_2\}$ uma base natural (ver Seção 1.4) de $\mathbb{R}^2$ e defina o vetor normal $n(s)$, $s \in I$, de forma que as bases $\{t(s), n(s)\}$ e $\{e_1, e_2\}$ tenham a mesma orientação. A curvatura é então definida por

$$\frac{dt}{ds} = kn$$

e tanto pode ser positiva quanto negativa. É claro que $|k|$ coincide com a definição anterior e que k muda de sinal quando mudamos a orientação de α ou a de $\mathbb{R}^2$ (Fig. 1.16).

Observamos ainda que no caso das curvas planas ($\tau \equiv 0$), a prova do teorema fundamental, citado acima, é na verdade bastante simples (ver Exercício 9).

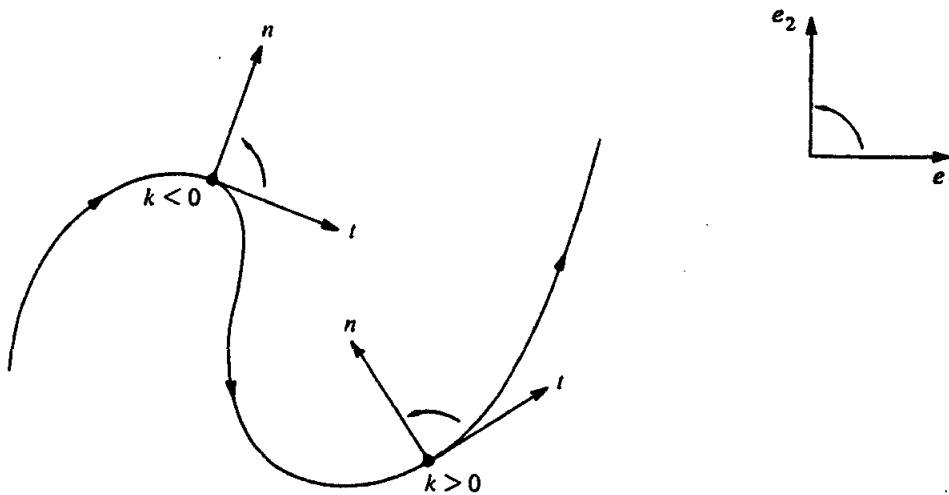



Figura 1-16

Observação 2. Dada uma curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ (não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco), é possível obter uma curva $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco cujo traço coincide com o traço de α. De fato, seja

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\, dt, \ \ t, t_0 \in I.$$

Como $ds/dt = |\alpha'(t)| \neq 0$, a função $s = s(t)$ possui uma inversa diferenciável $t = t(s)$, $s \in s(I) = J$, onde, por abuso de notação, t também denota a função inversa s^{-1} de s. Agora seja $\beta = \alpha \circ t : J \to \mathbb{R}^3$. É claro que $\beta(J) = \alpha(I)$ e que $|\beta'(s)| = |\alpha'(t).(dt/ds)| = 1$. Isto mostra que β possui o mesmo traço que α e é parametrizada pelo comprimento de arco. É costume dizer que β é uma reparametrização de $\alpha(I)$ pelo comprimento de arco.

Este fato permite-nos estender todos os conceitos locais desenvolvidos anteriormente para curvas regulares com uma parametrização arbitrária. Dizemos então que a curvatura $k(t)$ de $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ em $t \in I$ é a curvatura de uma reparametrização $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ de $\alpha(I)$ pelo comprimento de arco no ponto correspondente $s = s(t)$. Isto evidentemente independe da escolha de β; e mostra que a restrição, feita no final da seção 1.3, de considerarmos apenas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, não é de fato essencial.

Fórmulas explícitas para as entidades geométricas em termos de um parâmetro arbitrário acabam sendo bastante úteis nas aplicações; apresentaremos algumas delas no Exercício 12.

Exercícios

Salvo menção em contrário, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ indicará uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s, com curvatura $k(s) \neq 0$, para todo $s \in I$.

1. Dada a curva parametrizada (hélice)

$$\alpha(s) = (a \cos \frac{s}{c}, a \operatorname{sen} \frac{s}{c}, b\frac{s}{c}), \ s \in \mathbb{R},$$

onde $c^2 = a^2 + b^2$,

   a. Mostre que o parâmetro s é o comprimento de arco.

   b. Determine a curvatura e a torção de α.

   c. Determine o plano osculador de α.

   d. Mostre que as retas contendo $n(s)$ e passando por $\alpha(s)$ encontram o eixo Oz sob um ângulo constante igual a $\pi/2$.

   e. Mostre que as retas tangentes a α fazem um ângulo constante com o eixo Oz.

***2.** Mostre que a torção τ de α é dada por

$$\tau(s) = -\frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \cdot \alpha'''(s)}{|k(s)|^2}.$$

3. Suponha que $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ (i.e. α é uma curva plana), escolha uma base ortonormal $\{e_1,e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, e considere k com um sinal, como fizemos no texto. Translade o vetor $t(s)$ de modo que sua origem vá na origem de $\mathbb{R}^2$. Considere a curva parametrizada $s \to t(s)$, chamada *indicatriz tangente* de α. Seja $\theta(s)$ o ângulo de e_1 a $t(s)$ na orientação de $\mathbb{R}^2$. Prove que (note que estamos admitindo $k \neq 0$).

a. A indicatriz tangente é uma curva parametrizada regular.

b. $dt/ds = (d\theta/ds)n$, isto é, $k = d\theta/ds$.

***4.** Suponha que todas as normais a uma curva parametrizada passem por um ponto fixo. Mostre que o traço da curva está contido em um círculo.

5. Uma curva parametrizada regular α tem a seguinte propriedade: todas as suas tangentes passam por um ponto fixo.

a. Prove que o traço de α é (o segmento de) uma reta.

b. A conclusão ainda é válida se α não é regular?

6. Uma *translação* por um vetor v em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $A(p) = p+v$, $p \in \mathbb{R}^3$. Uma aplicação linear $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma *transformação ortogonal* quando $\rho u \cdot \rho v = u \cdot v$ para vetores quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^3$. Um *movimento rígido* em $\mathbb{R}^3$ é o resultado da composição de uma translação com uma transformação ortogonal com determinante positivo (incluímos esta última condição pois espera-se que movimentos rígidos preservem orientações).

a. Demonstre que o módulo de um vetor e o ângulo θ entre dois vetores, $0 \leq \theta \leq \pi$, são invariantes por transformações ortogonais com determinante positivo.

b. Mostre que o produto vetorial de dois vetores é invariante por transformações ortogonais com determinante positivo. A afirmação continua verdadeira caso não seja levada em conta a condição sobre o determinante?

c. Mostre que o comprimento de arco, a curvatura, e a torção de uma curva parametrizada são (nos pontos onde estão definidas) invariantes por movimentos rígidos.

*7. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular plana (parâmetro arbitrário), e defina $n = n(t)$ e $k = k(t)$ como na Observação 1. Suponha que $k(t) \neq 0$, $t \in I$. Nestas condições , a curva

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} n(t), \quad t \in I,$$

é chamada a *evoluta* de α (Fig. 1.17).

a. Mostre que a tangente em t da evoluta de α é normal a α em t.

b. Considere as retas normais de α em dois pontos vizinhos t_1, t_2 $t_1 \neq t_2$. Faça t_1 tender a t_2 e mostre que o ponto de interseção entre as respectivas normais converge para um ponto do traço da evoluta de α.

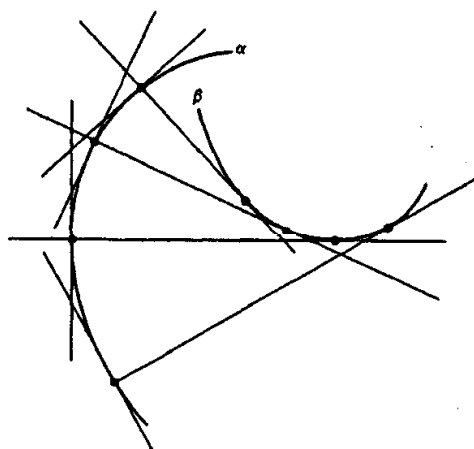



Figura 1-17

8. O traço da curva parametrizada (parâmetro arbitrário)

$$\alpha(t) = (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R},$$

é chamado de *catenária.*

a. Mostre que a curvatura com sinal (cf. Observação 1) da catenária é

$$k(t) = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

b. Mostre que a evoluta (cf. Exercício 7) da catenária é

$$\beta(t) = (t - \operatorname{senh} t \cosh t, 2\cosh t).$$

9. Dada uma função diferenciável $k(s)$, $s \in I$, mostre que a curva plana parametrizada que tem $k(s) = k$ como curvatura é dada por

$$\alpha(s) = \left(\int \cos\theta(s)ds + a, \int \operatorname{sen}\theta(s)ds + b\right),$$

onde

$$\theta(s) = \int k(s)ds + \phi,$$

e que a curva fica determinada a menos de uma translação pelo vetor (a, b) e uma rotação de ângulo ϕ.

10. Considere a aplicação

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}), & t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \end{cases}$$

a. Prove que α é uma curva diferenciável.

b. Prove que α é regular para todo t e que a curvatura $k(t) \neq 0$, para $t \neq 0$, $t \neq \pm\sqrt{2/3}$, e $k(0) = 0$.

c. Mostre que o limite dos planos osculadores quando $t \to 0$, $t > 0$, é o plano $y = 0$ mas que o limite dos planos osculadores quando $t \to 0$, $t < 0$, é o plano $z = 0$ (isto implica que o vetor normal é descontínuo em $t = 0$ e mostra porque excluímos pontos onde $k = 0$.)

d. Mostre que, mesmo sem ser α uma curva plana, pode-se definir τ de forma que $\tau \equiv 0$.

11. Frequentemente uma curva plana é dada em coordenadas polares: $\rho = \rho(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$.

a. Mostre que o comprimento de arco é

$$\int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\theta,$$

onde o símbolo $'$ denota derivação em relação a θ.

b. Mostre que a curvatura é

$$k(\theta) = \frac{2(\rho') - \rho\rho'' + \rho^2}{\{\rho^2 + (\rho')^2\}^{3/2}}.$$

12. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular (não necessariamente pelo comprimento de arco) e seja $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de $\alpha(I)$ pelo comprimento de arco $s = s(t)$, medido a partir de $t_0 \in I$ (ver Observação 2). Seja $t = t(s)$ a função inversa de s e faça $d\alpha/dt = \alpha'$, $d^2\alpha/dt^2 = \alpha''$, etc. Prove que

a. $dt/ds = 1/|\alpha'|$, $d^2t/ds^2 = -(\alpha' \cdot \alpha'')/|\alpha'|^4$

b. A curvatura de α em $t \in I$ é

$$k(t) = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3}.$$

c. A torção de α em $t \in I$ é

$$\tau(t) = -\frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2}.$$

d. Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é uma curva plana $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, a curvatura com sinal (ver Observação 1) de α em t é

$$k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

***13.** Suponha que $\tau(s) \neq 0$ e $k'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Mostre que uma condição necessária e suficiente para que $\alpha(I)$ esteja contida em uma esfera é que

$$R^2 + (R')^2T^2 = const.,$$

onde $R = 1/k$, $T = 1/\tau$, e R' é a derivada de R em relação a s.

14. Seja $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular plana. Suponha que existe t_0, $a < t_0 < b$, tal que a distância $|\alpha(t)|$ do traço de α à origem seja máxima em t_0. Prove que a curvatura k de α em t_0 satisfaz $|k(t_0)| \geq 1/|\alpha(t_0)|$.

15. Mostre que o conhecimento da função vetorial $b = b(s)$ (vetor binormal) de uma curva α, de torção não nula por toda parte, determina a curvatura $k(s)$ e o valor absoluto da torção $\tau(s)$ de α.

16. Mostre que o conhecimento da função vetorial $n = n(s)$ (vetor normal) de uma curva α, de torção não nula por toda parte, determina a curvatura $k(s)$ e a torção $\tau(s)$ de α.

17. De uma maneira geral, uma curva α é chamada uma hélice se as retas tangentes de α fazem um ângulo constante com uma direção fixa. Supondo que $\tau(s) \neq 0$, $s \in I$, prove que:

***a.** α é uma hélice se e somente se $k/\tau = const.$

***b.** α é uma hélice se e somente se as retas contendo $n(s)$ e passando por $\alpha(s)$ são paralelas a um plano fixo.

***c.** α é uma hélice se e somente se as retas contendo $b(s)$ e passando por $\alpha(s)$ fazem um ângulo constante com uma direção fixa.

d. A curva

$$\alpha(s) = \left(\frac{a}{c}\int \operatorname{sen}\theta(s)ds, \frac{a}{c}\int \cos\theta(s)ds, \frac{b}{c}s\right),$$

onde $c^2 = a^2 + b^2$, é uma hélice, e $k/\tau = a/b$.

18. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular (não necessariamente pelo comprimento de arco) com $k(t) \neq 0$, $\tau(t) \neq 0$, $t \in I$. A curva α é chamada *curva de Bertrand* se existe uma curva $\bar{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ tal que as retas normais de α e $\bar{\alpha}$ coincidam em $t \in I$. Neste caso, $\bar{\alpha}$ é chamada o *par de Bertrand* de α, e podemos escrever

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + rn(t).$$

Prove que

a. r é constante.

b. α é uma curva de Bertrand se e somente se existe uma relação linear

$$Ak(t) + B\tau(t) = 1, \quad t \in I,$$

onde A, B são constantes não nulas e k e τ são, respectivamente, a curvatura e a torção de α.

c. Caso α tenha mais do que um par de Bertrand, α tem um número infinito de pares de Bertrand. Esta situação ocorre se e somente se α é uma hélice circular.

1.6 Forma Canônica Local*

Um dos métodos mais eficazes para resolver problemas em geometria consiste na escolha de um sistema de coordenadas adaptado ao problema. Para o estudo das propriedades locais de uma curva na vizinhança de um ponto s, dispomos de um sistema de coordenadas natural, o triedro de Frenet em s, e convém referir a curva a este triedro.

Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e sem pontos singulares de ordem 1. Escreveremos as equações da curva, em uma vizinhança de s_0, utilizando o triedro $t(s_0), n(s_0), b(s_0)$ como uma base para $\mathbb{R}^3$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $s_0 = 0$ e considerar o desenvolvimento de Taylor

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + \frac{s^3}{6}\alpha'''(0) + R,$$

onde $\lim_{s\to 0} R/s^3 = 0$. Como $\alpha'(0) = t$, $\alpha''(0) = kn$, e

$$\alpha'''(0) = (kn)' = k'n + kn' = k'n - k^2t - k\tau b,$$

obtemos

$$\alpha(s) - \alpha(0) = (s - \frac{k^2s^3}{3!})t + (\frac{s^2k}{2} + \frac{s^3k'}{3!})n - \frac{s^3}{3!}k\tau b + R,$$

onde todos os termos são calculados em $s = 0$.

Tomemos agora um sistema $Oxyz$ de maneira que a origem O coincida com $\alpha(0)$ e que $t = (1, 0, 0)$, $n = (0, 1, 0)$, $b = (0, 0, 1)$. Nestas condições, $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ é dada por

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \tfrac{k^2s^3}{3!} + R_x, \\ y(s) &= \tfrac{s^2k}{2} + \tfrac{s^3k'}{3!} + R_y, \\ z(s) &= -\tfrac{s^3}{3!}k\tau + R_z, \end{aligned} \qquad (1)$$

* **Esta seção pode ser omitida em uma primeira leitura.**

onde $R = (R_x, R_y, R_z)$. A representação (1) é chamada *forma canônica local* de α, em uma vizinhança de $s = 0$. A Fig. 1.18 é um esboço das projeções do traço de α, para s pequeno, nos planos tn, tb e nb.

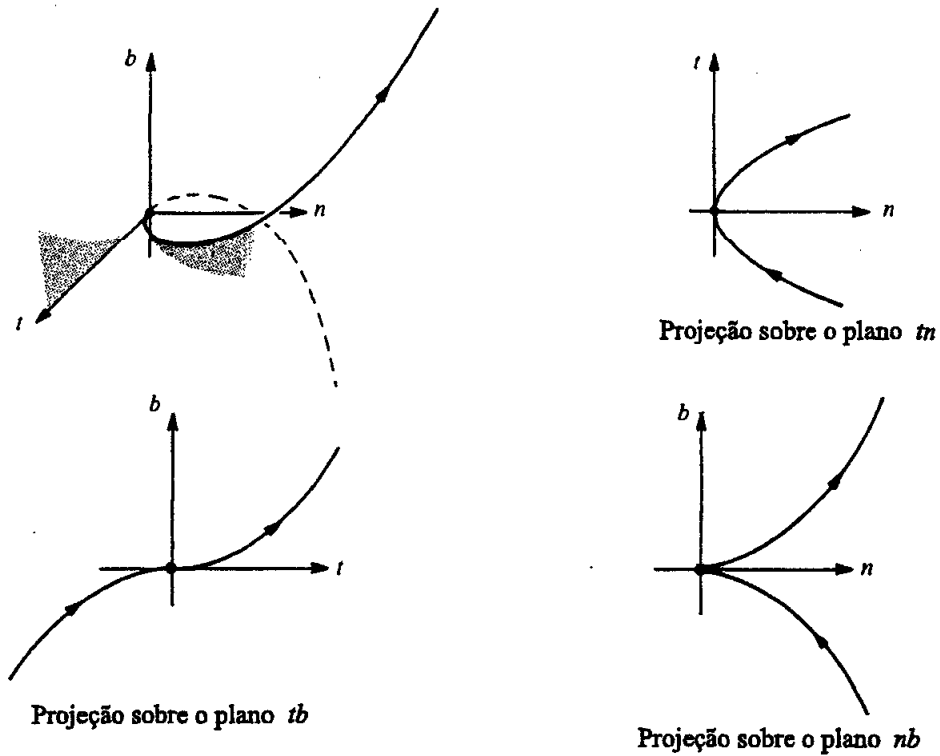



Figura 1-18

Descreveremos abaixo algumas aplicações geométricas da forma canônica local. Os Exercícios desta seção fornecem outras aplicações.

Uma primeira aplicação é a seguinte interpretação do sinal da torção. Da terceira equação em (1) segue-se que se $\tau < 0$ e s é suficientemente pequeno, então $z(s)$ cresce com s. Façamos a seguinte convenção: chamaremos o lado do plano osculador para o qual b aponta de *lado positivo*. Então, como $z(0) = 0$, se percorremos a curva no sentido crescente do comprimento de arco, a curva atravessa o plano osculador em $s = 0$, apontando para o lado positivo (ver Fig. 1.19). Se, pelo contrário, $\tau > 0$, a curva (percorrida no sentido crescente do comprimento de arco) atravessa o plano osculador em $s = 0$, apontando para o lado oposto ao lado positivo.

A hélice do Exercício 1 da seção 1.5 tem torção negativa. Um exemplo de curva com torção positiva é a hélice

$$\alpha(s) = (a\cos\frac{s}{c}, a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{c}, -b\frac{s}{c}),$$

obtida da primeira por uma reflexão no plano xz (ver Fig.1.19).

Observação. É comum definir-se a torção por $b' = -\tau n$. Com uma tal definição, a torção da hélice do Exercício 1 torna-se positiva.

Figura 1-19

Uma outra consequência da forma canônica é a existência de uma vizinhança $J \subset I$ de $s = 0$ tal que $\alpha(J)$ está totalmente contida no lado do plano retificante para o qual o vetor normal n aponta. (ver Fig.1.18). Com efeito, como $k > 0$, temos que, para s suficientemente pequeno, $y(s) \geq 0$, e $y(s) = 0$ se e somente se $s = 0$. Isto demonstra a afirmação feita acima.

Como última aplicação da forma canônica, mencionaremos a seguinte propriedade do plano osculador. O plano osculador em s é a posição limite do plano determinado pela reta tangente em s e o ponto $\alpha(s+h)$ quando $h \to 0$. Para mostrar isto, suponhamos $s = 0$. Assim, todo plano contendo a tangente em $s = 0$ é da forma $z = cy$ ou $y = 0$. O plano $y = 0$ é o plano retificante que, como foi visto acima, não contém pontos próximos de $\alpha(0)$ (exceto o próprio $\alpha(0)$) e pode então ser descartado das nossas considerações. A condição para que o plano $z = cy$ passe por $\alpha(s+h)$ é $(s = 0)$

$$c = \frac{z(h)}{y(h)} = \frac{-\frac{k}{6}\tau h^3 + \dots}{\frac{k}{2}h^2 + \frac{k^2}{6}h^3 + \dots}.$$

Quando $h \to 0$ teremos que $c \to 0$ e, portanto, a posição limite do plano $z(s) = c(h)y(s)$ é o plano $z = 0$, isto é, o plano osculador, como desejado.

Exercícios

*1. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular com curvatura $k(s) \neq 0$, $s \in I$. Seja P um plano satisfazendo às duas condições seguintes:

   1. P contém a reta tangente em s.
   2. Para toda vizinhaça $J \subset I$ de s, existem pontos de $\alpha(J)$ de ambos os lados de P.

   Prove que P é o plano osculador de α em s.

2. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, com curvatura $k(s) \neq 0$, $s \in I$. Mostre que

   *a. O plano osculador em s é a posição limite do plano passando por $\alpha(s)$, $\alpha(s+h_1)$, $\alpha(s+h_2)$, quando $h_1, h_2 \to 0$.

   b. A posição limite do círculo passando por $\alpha(s)$, $\alpha(s+h_1)$, $\alpha(s+h_2)$, quando $h_1, h_2 \to 0$ é um círculo no plano osculador em s, cujo centro está sobre a reta que contém $n(s)$ e cujo raio é igual ao raio de curvatura $1/k(s)$;este círculo é chamado o *círculo osculador* em s.

3. Mostre que a curvatura $k(s) \neq 0$ de uma curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ é a curvatura em t da curva plana $\pi \circ \alpha$, onde π é a projeção ortogonal sobre o plano osculador em t.

1.7 Propriedades Globais das Curvas Planas*

Nesta seção gostariamos de descrever alguns resultados que pertencem à geometria diferencial global das curvas. Mesmo no caso simples das curvas planas, esta área já nos oferece exemplos de teoremas não triviais e questões interessantes. Para que possamos apresentar o conteúdo que se segue, iremos aceitar, sem demonstração, certos resultados plausíveis; teremos o cuidado de enunciar tais resultados com a devida precisão. No Capítulo 5 faremos uma apresentação da geometria diferencial global de maneira mais sistemática. No

---

* Esta seção pode ser omitida em uma primeira leitura.

entanto, parece-nos ao mesmo tempo instrutivo e motivador, fazer desde já uma incursão nesta área. Um livro auto-suficiente sobre o asunto é o excelente texto de Alencar e Santos: Geometria Diferencial das Curvas Planas, Publicações Matemáticas do IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

Esta seção contém três tópicos em ordem crescente de dificuldade: (A) a desigualdade isoperimétrica, (B) o teorema dos quatro vértices, e (C) a fórmula de Cauchy-Crofton. Os tópicos são inteiramente independentes, e alguns, ou mesmo todos, podem ser omitidos em uma primeira leitura.

Uma *função diferenciável em um intervalo fechado* $[a,b]$ é a restrição de uma função diferenciável definida em um intervalo aberto contendo $[a,b]$.

Uma *curva plana fechada* é uma curva parametrizada regular $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tal que α e todas as suas derivadas coincidam em a e b; isto é,

$$\alpha(a) = \alpha(b),\ \alpha'(a) = \alpha'(b),\ \alpha''(a) = \alpha''(b),\ ....$$

Diz-se que α é uma *curva simples* se α não possue outras auto interseções; isto é, se $t_1, t_2 \in [a,b)$, $t_1 \neq t_2$, então $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ (Fig. 1.20).

(a) Uma curva fechada simples (b) Uma curva fechada (não-simples)

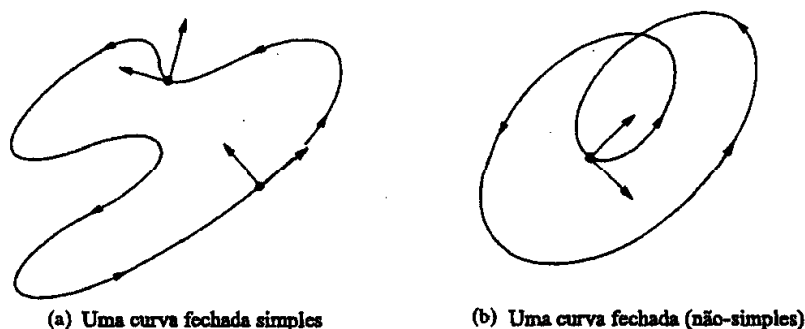



Figura 1-20

Em geral, consideramos curvas $\alpha : [0,l] \to \mathbb{R}^2$ parametrizadas pelo comprimento de arco s; logo, l é o comprimento de α. Por vezes, faremos menção a uma curva fechada simples C, e estaremos nos referindo ao traço de um tal objeto. A curvatura de α será considerada com um sinal, como na Observação 1 da seção 1.5 (ver Fig.1.20).

Admitiremos que *uma curva simples fechada C no plano delimita uma região limitada deste plano que é chamada o interior de C.* Isto é parte do chamado Teorema de Jordan para curvas (daremos uma demonstração na seção 5.7, Teorema 1). Observamos que a afirmação acima não é verdadeira, por

exemplo, se C é uma curva simples em um toro (a superfície de uma câmara de ar; ver Fig. 1.21(a)). Sempre que fizermos referência à área delimitada por uma curva simples fechada C, estaremos considerando a área do interior de C. Vamos também supor que o parâmetro de uma curva simples fechada pode ser escolhido de forma que ao percorrermos a curva no sentido crescente do parâmetro, o interior da curva fica à nossa esquerda (Fig. 1.21(b)). Diz-se que uma tal curva tem *orientação positiva.*

(a) Uma curva fechada simples C sobre o toro T; C não limita uma região em T.

(b) C está orientada positivamente.

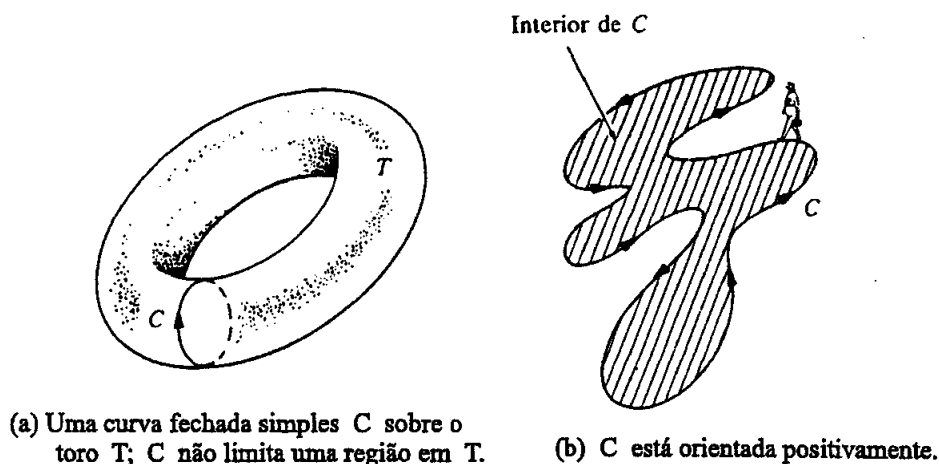



Figura 1-21

A. Desigualdade Isoperimétrica

O teorema a seguir é talvez o mais antigo teorema global em geometria diferencial e está relacionado com o seguinte problema (isoperimétrico). *Dentre todas as curvas simples fechadas no plano com um dado comprimento l, qual delas limita a maior área?* Nesta forma, o problema era conhecido pelos gregos, que também conheciam a solução: um círculo. No entanto, decorreu bastante tempo para que surgisse uma prova satisfatória para o fato do círculo ser uma solução do problema isoperimétrico. A razão principal parece ser a seguinte: nas primeiras tentativas de prova assumia-se, *a priori,* que uma solução deveria existir. Foi somente em 1870 que K. Weierstrass observou que muitas questões similares não tinham solução, e forneceu uma prova completa da existência de uma solução para o problema isoperimétrico. A prova de Weierstrass era um tanto difícil, no sentido em que ela era um corolário da teoria que ele desenvolveu para tratar problemas envolvendo a maximização

(ou minimização) de certas integrais (esta teoria é o cálculo das variações, e o problema isoperimétrico é um exemplo típico dos problemas que por ela são tratados). Mais tarde, provas mais diretas foram encontradas. A prova simples que apresentaremos aqui é devida a E. Schmidt (1939). Uma outra prova direta, bem como bibliografia suplementar sobre o assunto, podem ser encontradas na Referência [10] da Bibliografia.

Utilizaremos a seguinte fórmula para a área A limitada por uma curva simples fechada com orientação positiva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde $t \in \{a, b]$ é um parâmetro arbitrário:

$$A = -\int_a^b y(t)x'(t)\, dt = \int_a^b x(t)y'(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_a^b (xy' - yx')\, dt \qquad (1)$$

Note que a segunda fórmula é obtida da primeira ao observamos que

$$\int_a^b xy'\, dt = \int_a^b (xy)'\, dt - \int_a^b x'y\, dt = [xy(b) - xy(a)] - \int_a^b x'y\, dt$$
$$= -\int_a^b x'y\, dt,$$

já que a curva é fechada. A terceira fórmula decorre imediatamente das duas primeiras.

Para provar a primeira fórmula em (1), consideraremos inicialmente o caso ilustrado na Fig.1.22, onde a curva é formada de dois segmentos de reta paralelos ao eixo Oy e por dois arcos que podem ser escritos na forma

$$y = f_1(x) \text{ e } y = f_2(x), \ x \in [x_0, x_1], \ f_1 > f_2.$$

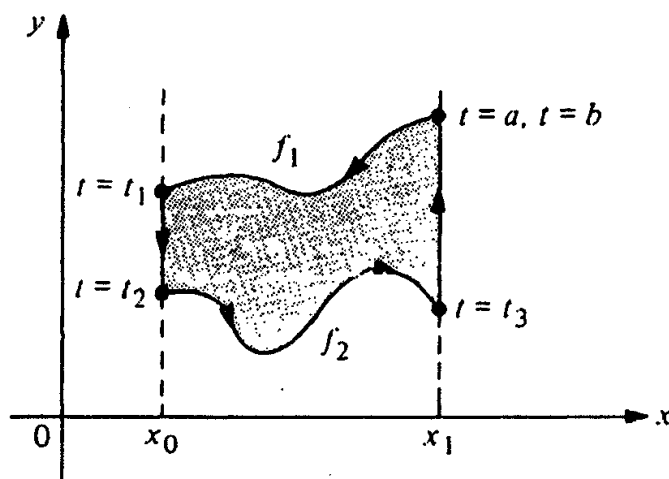



Figura 1-22

É claro que a área limitada pela curva é

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx.$$

Como a curva tem orientação positiva, obtemos, com a notação da Fig. 1.22,

$$A = -\int_a^{t_1} y(t)x'(t)\ dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)\ dt = -\int_a^b y(t)x'(t)\ dt,$$

pois $x'(t) = 0$ ao longo dos segmentos paralelos ao eixo Oy. Provamos assim (1) para este caso.

Para obtermos uma prova para o caso geral, precisaríamos mostrar que é possível dividir a região limitada pela curva em um número finito de regiões do tipo acima. E isto evidentemente é possível (Fig.1.23) se *existe uma reta E no plano tal que a distância $\rho(t)$ de $\alpha(t)$ a esta reta é uma função com um número finito de pontos críticos* (um ponto crítico é um ponto onde $\rho'(t) = 0$). Esta última afirmação é verdadeira mas não iremos demonstrá-la. Contudo, mencionamos que (1) também pode ser obtida utilizando-se o teorema de Stokes (ou de Green) no plano (ver Exercício 15).

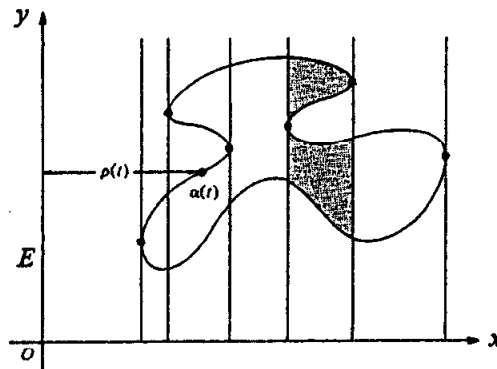



Figura 1-23

Teorema 1 (Desigualdade Isoperimétrica). *Seja C uma curva plana simples e fechada com comprimento l, e seja A a área da região limitada por C. então*

$$l^2 - 4\pi A \geq 0, \tag{2}$$

e verifica-se a igualdade se e somente se C é um círculo.

Demonstração. Sejam E e E' duas retas paralelas que não intersectam a curva fechada C, e considere o movimento destas retas até que elas toquem C pela primeira vez. Obtemos assim duas retas paralelas, L e L', tangentes à curva C, de forma que C está totalmente contida na faixa limitada por L e L'. Considere agora um círculo S^1 que seja tangente a L e L' e não intersecta C. Seja O o centro de S^1 e introduza o sistema de coordenadas cartesianas com a origem em O e o eixo Ox perpendicular a L e L' (ver Fig. 1.24).

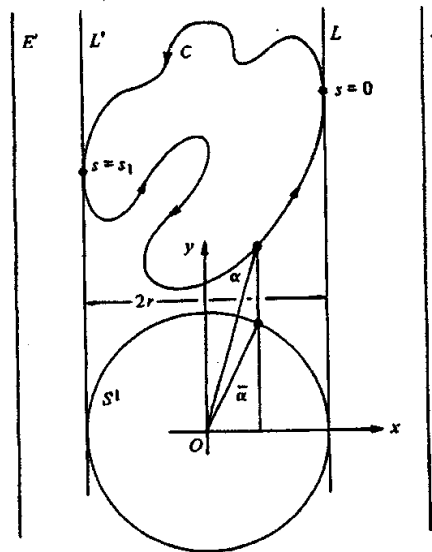



Figura 1-24

Parametrize C pelo comprimento de arco, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, de modo que C tenha orientação positiva e os pontos de tangência com L e L' sejam, respectivemente, $s = 0$ e $s = s_1$.

Podemos supor que a equação de S^1 é

$$\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), \bar{y}(s)), \ s \in [0, l].$$

Utilizando Eq.(1) e denotando por $\bar{A}$ a área da região limitada por S^1, temos

$$A = \int_0^l xy' \, ds, \ \bar{A} = \pi R^2 = -\int_0^l \bar{y}x' \, ds,$$

onde $2r$ é a distância entre L e L'. Assim,

$$\begin{aligned} A + \pi R^2 &= \int_0^l (xy' - \bar{y}x') \, ds = \int_0^l [(x', y') \cdot (-\bar{y}, x)] \, ds \\ &\leq \int_0^l |\alpha'| \, |\bar{\alpha}| \, ds = \int_0^l |\bar{\alpha}| \, ds = lr, \end{aligned} \tag{3}$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, e a igualdade se verifica se e só se α' é um múltiplo de $\bar{\alpha}$, isto é, se e só se,

$$\alpha' = \frac{1}{r}(-\bar{y}, x),$$

em particular, a igualdade implica que $y' = \frac{1}{r}x$.

Observamos agora o fato de que a média geométrica de dois números positivos é menor ou igual à média aritmética destes dois números, e vale a igualdade se e somente se os números são iguais. Daí decorre que

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi R^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi R^2) \leq \frac{1}{2}lr. \tag{4}$$

Logo, $4\pi AR^2 \leq l^2R^2$, e isto nos dá a equação (2).

Suponha agora que vale a igualdade em (2). Temos então igualdades também em (3) e (4). A partir da igualdade em (4) segue-se que $A = \pi R^2$. Assim, $l = 2\pi r$ e r não depende da escolha da direção de L . Além disso, a igualdade em (3) implica que $y' = \frac{1}{r}x$. Como r não depende da direção de L, podemos efetuar a mesma construção com retas perpendiculares a L. É fácil verificar que, neste caso, obteremos que $x' = \frac{1}{r}y$. Portanto,

$$l = (x')^2 + (y')^2 = \frac{1}{R^2}(x^2 + y^2),$$

e C é um círculo.

Q.E.D.

Observação 1. Pode-se verificar facilmente que a prova acima pode ser aplicada a *curvas de classe* C^1, isto é, curvas $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, para as quais exige-se apenas que as derivadas $x'(t), y'(t)$ sejam funções contínuas (que, claro, coincidem, em a e b se a curva é fechada).

Observação 2. A desigualdade isoperimétrica é válida para uma ampla classe de curvas. Existem demonstrações diretas que funcionam desde que se possa definir o comprimento de arco e a área da curva em questão. Para as aplicações, convém observar que o teorema vale para curvas C^1 por partes, isto é, curvas contínuas constituídas de um número finito de arcos de classe C^1. Tais curvas possuem um número finito de quinas, onde a tangente é descontínua (Fig.1.25).

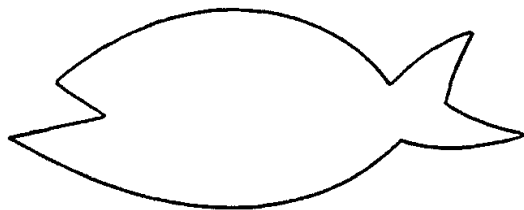



Figura 1-25. Uma curva C′ por partes.

B. O Teorema dos Quatro Vértices

Para o que vem a seguir, precisaremos de alguns fatos gerais sobre curvas planas fechadas.

Seja $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ uma curva plana fechada dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. Como s é o comprimento de arco, o vetor tangente $t(s) = (x'(s), y'(s))$ é unitário. Convém introduzir a *indicatriz tangente* $t : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ dada por $t(s) = (x'(s), y'(s))$; esta é uma curva diferenciável cujo traço está contido em um círculo de raio 1 (Fig. 1.26). Observe que o vetor velocidade da indicatriz tangente é

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= t'(s) = (x''(s), y''(s)) \\ &= \alpha''(s) = kn, \end{aligned}$$

onde n é o vetor normal, orientado como na observação 2 da seção 1.5, e k é a curvatura de α.

Seja $\theta(s)$, $0 < \theta(s) < 2\pi$, o ângulo que $t(s)$ faz com o eixo Ox; isto é, $x'(s) = \cos\theta(s)$, $y'(s) = \operatorname{sen}\theta(s)$. Como

$$\theta(s) = \operatorname{arc\,tg}\frac{y'(s)}{x'(s)},$$

$\theta = \theta(s)$ está bem definida localmente (isto é, está bem definida em um pequeno intervalo em torno de cada s) como uma função diferenciável e

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{d}{ds}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ &= \theta'(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = \theta' n. \end{aligned}$$

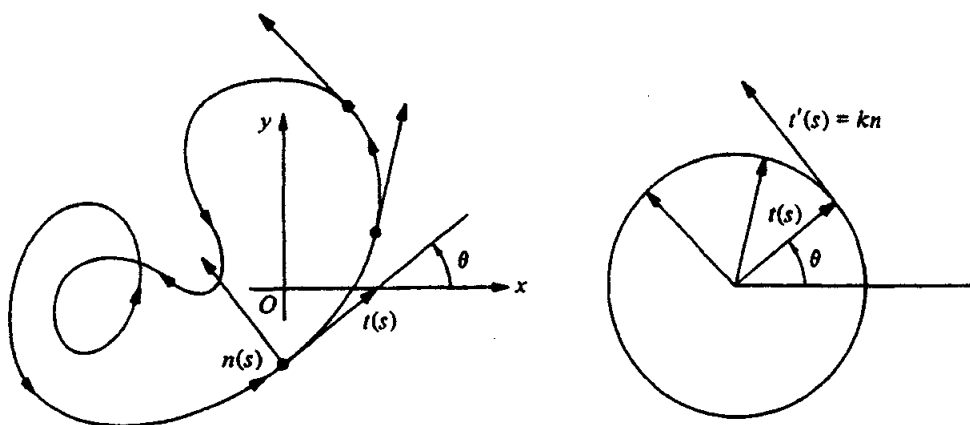



Figura 1-26

Isto significa que $\theta'(s) = k(s)$ e sugere a definição de uma função global diferenciável $\theta : [0, l] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\theta(s) = \int_0^s k(s)ds. \qquad \text{Como}$$

$$\theta' = k = x'y'' - x''y' = (\operatorname{arc\,tg} \frac{y'}{x'})',$$

esta função global coincide, a menos de constantes, com a função local θ definida previamente. Intuitivamente, $\theta(s)$ mede a rotação total do vetor tangente, isto é, o ângulo total descrito pelo ponto $t(s)$ da indicatriz tangente, à medida que percorremos a curva α de 0 a s. Como α é fechada, este ângulo é um múltiplo inteiro I de 2π; ou seja,

$$\int_0^l k(s)ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi I.$$

Este número inteiro I é chamado *índice de rotação* da curva α.

Na Fig. 1.27, o leitor pode encontrar alguns exemplos de curvas com os respectivos índices de rotação. Observe que o índice de rotação muda de sinal quando mudamos a orientação da curva. Além disso, a definição foi escolhida de forma que o índice de rotação de uma curva com orientação positiva seja positivo.

Um fato global importante sobre o índice de rotação é apresentado no teorema seguinte, cuja prova apresentaremos mais adiante no livro (seção 5.7, Teorema 2).

Teorema do Índice de Rotação. *O índice de rotação de uma curva simples fechada é* ± 1, *onde o sinal depende da orientação da curva.*

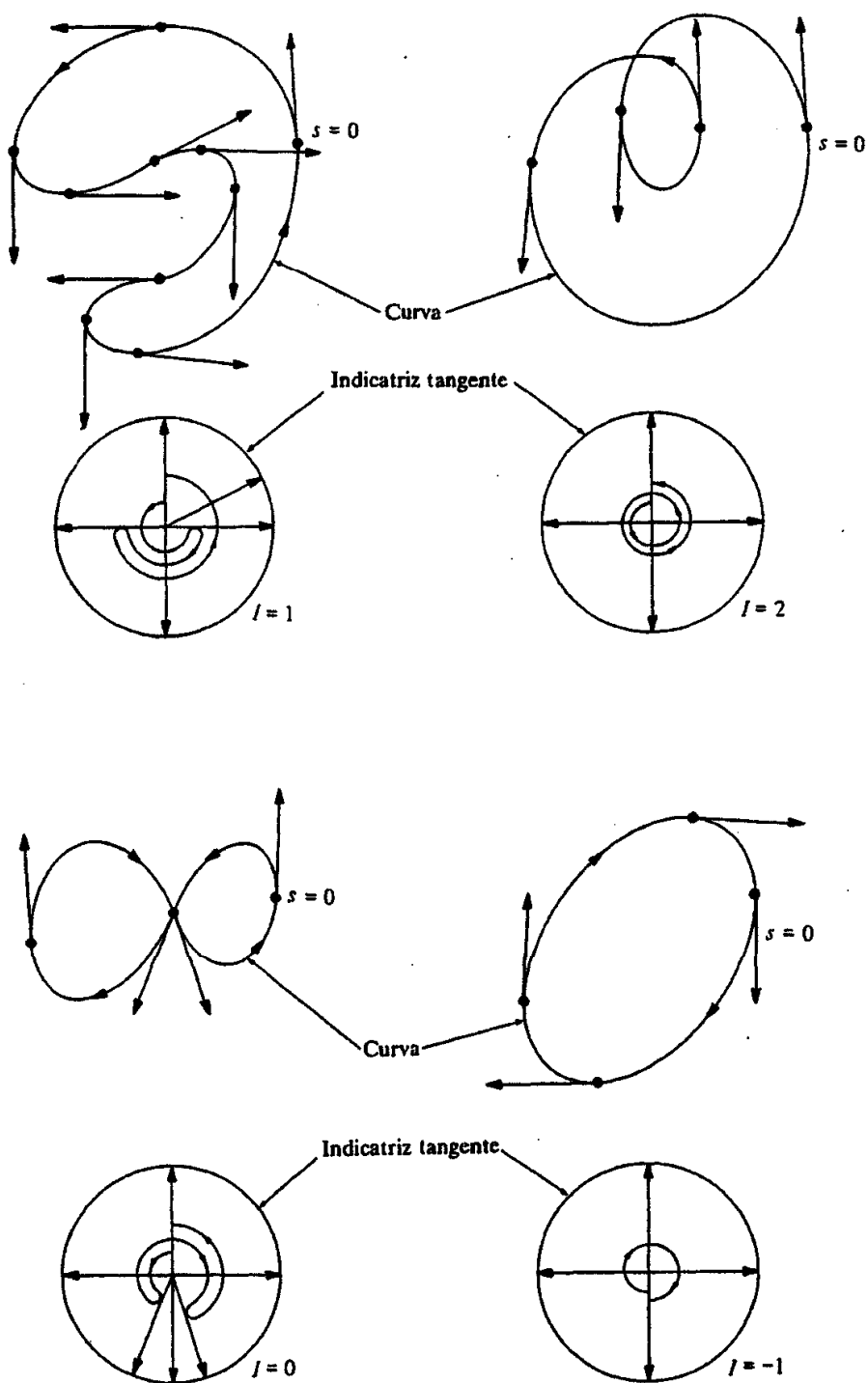



Figura 1-27

Uma curva plana regular (não necessariamente fechada) $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é *convexa* se, para todo $t \in [a, b]$, o traço $\alpha([a, b])$ de α está totalmente contido em um lado do semi-plano fechado determinado pela reta tangente em t. (Fig.1.28).

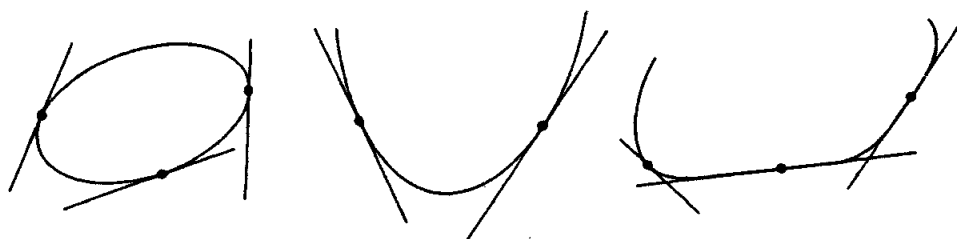
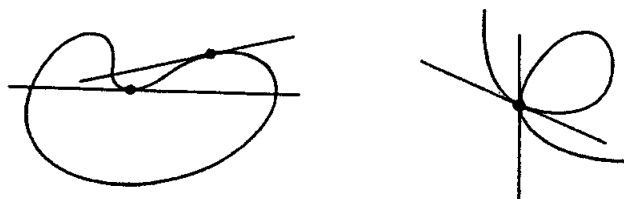
Um *vértice* de uma curva plana regular $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é um ponto $t \in [a, b]$ onde $k'(t) = 0$. Por exemplo, uma elipse com diâmetros distintos tem exatamente quatro vértices, a saber, onde os eixos encontram a elipse (ver Exercício 3). Um fato global interessante é que este é o número mínimo de vértices para uma curva convexa qualquer.

Teorema 2 (Teorema dos Quatro Vértices). *Uma curva simples, convexa e fechada tem pelo menos quatro vértices.*

Antes de iniciarmos a prova, precisamos de um lema.

Lema. *Seja $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ uma curva plana fechada, parametrizada pelo comprimento de arco e sejam A, B e C números reais arbitrários. Então*

$$\int_0^l (Ax + By + C)\frac{dk}{ds}ds = 0, \tag{5}$$

onde as funções $x = x(s)$, $y = y(s)$ são dadas por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, e k é a curvatura de α.

Curvas convexas

Curvas não convexas.

Figura 1-28

Demonstração do lema. Recorde que existe uma função diferenciável $\theta : [0, l] \to \mathbb{R}$ tal que $x'(s) = \cos\theta$, $y'(s) = \operatorname{sen}\theta$. Logo, $k(s) = \theta'(s)$ e

$$x'' = -ky, \; y'' = kx.$$

Portanto, como as funções envolvidas coincidem em 0 e l, temos

$$\int_0^l k' ds = 0,$$

$$\int_0^l xk' ds = -\int_0^l kx' ds = -\int_0^l y'' ds = 0,$$

$$\int_0^l yk' ds = -\int_0^l ky' ds = \int_0^l x'' ds = 0.$$

Q.E.D.

Demonstração do Teorema. Parametrize a curva pelo comprimento de arco, $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$. Como $k = k(s)$ é *uma função contínua sobre o intervalo fechado* $[0, l]$, *ela atinge um máximo e um mínimo em* $[0, l]$ (isto é um fato básico sobre funções reais; pode-se encontrar uma prova, por exemplo, no apêndice ao capítulo 5, Proposição 10). Portanto, α tem pelo menos dois vértices, $\alpha(s_1) = p$, $\alpha(s_2) = q$. Seja L a reta passando por p e q, e sejam β e γ os dois arcos de α determinados pelos pontos p e q.

Afirmamos que cada um destes arcos está contido em um dos lados de L. Caso contrário, a curva intersecta L em um ponto r distinto de p e q (Fig.1.29(a)). Devido à convexidade, e como p, q e r são pontos distintos de α, a reta tangente no ponto intermediário, digamos p, tem que coincidir com L. Novamente pela convexidade, isto implica que L é tangente a α nos três pontos p, q e r. Mas então a tangente a um ponto próximo de p (o ponto intermediário) teria q e r em lados distintos, a não ser que todo o segmento rq da reta L estivesse contido em α (Fig. 1.29(b)). Isto então implicaria que $k = 0$ em p e q. Como estes são pontos de máximo e mínimo para k, teriamos $k \equiv 0$ em α, contradição.

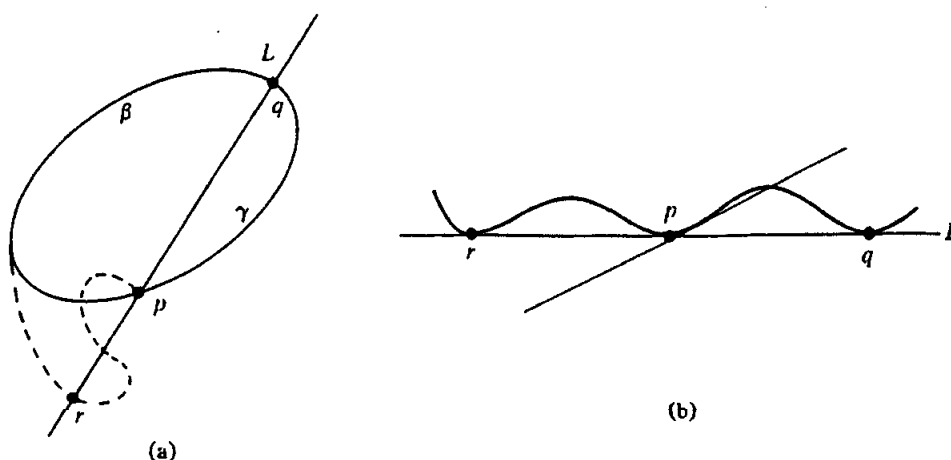



Figura 1-29

Seja $Ax + By + C = 0$ a equação de L. Se não há outros vértices, $k'(s)$ mantém um sinal constante em cada um dos arcos β e γ. Podemos ajustar os sinais de todos os coeficientes A, B, C de modo que a integral em (5) seja positiva. Esta contradição mostra que existe um terceiro vértice e que $k'(s)$ muda de sinal em β ou em γ, digamos em β. Como p e q são pontos de máximo e mínimo, $k'(s)$ muda de sinal duas vezes em β. Logo, existe um quarto vértice.

Q.E.D.

O teorema dos quatro vértices foi objeto de muitas investigações. O teorema também é válido para curvas simples fechadas (não necessariamente convexas), mas a prova é mais difícil. Para mais informações sobre o assunto, veja a Referência [10] e o livro de Alencar e Santos citado no início desta Seção.

Mais adiante (Seção. 5.7, Prop.1), provaremos que *uma curva plana fechada é convexa se e somente se ela é simples e pode ser orientada de modo que a sua curvatura é positiva ou zero.* A partir disto, e da prova dada acima, vê-se que poderíamos reformular o enunciado do teorema dos quatro vértices da seguinte maneira: *A função curvatura de uma curva convexa e fechada é (não negativa e) constante ou então tem pelo menos dois pontos de máximo e dois pontos de mínimo.* É então natural perguntar se tais funções curvatura caracterizam as curvas convexas. Mais precisamente, podemos colocar a seguinte questão. *Seja $k : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável não negativa tal que k, e todas as suas derivadas, coincidam em a e b. Suponha que k ou é constante ou então tem pelo menos dois pontos de máximo e dois pontos de mínimo. Será que*

existe uma curva simples e fechada $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *tal que a curvatura de* α *em* t *seja* $k(t)$?

Para o caso em que $k(t)$ é estritamente positiva, H. Gluck respondeu a questão acima de maneira afirmativa (ver H.Gluck, "The Converse to the Four-Vertex Theorem," *L 'Enseignement Mathématique* T.XVII, fasc.3-4 (1971), 295-309). Entretanto, os métodos utilizados por ele não se aplicam ao caso $k \geq 0$.

C. A Fórmula de Cauchy-Crofton

O nosso último tópico será destinado a encontrar um teorema que, a grosso modo, descreve a seguinte situação. Seja C uma curva regular no plano. Consideramos todas as retas no plano que encontram C e associamos a cada uma delas uma *multiplicidade,* que é o número de pontos de interseções com C (Fig. 1.30).

Queremos primeiramente encontrar uma maneira de associar uma medida a um dado subconjunto de retas no plano. Que isso seja possível, não deve causar espanto. Afinal de contas, associamos uma medida (área) para subconjuntos constituídos de pontos do plano. Tendo em mente que uma reta pode ser determinada por dois parâmetros (por exemplo, p e θ na Fig.1.31), podemos pensar nas linhas retas no plano como pontos em uma região de um certo plano. Assim sendo, o que estamos buscando é uma maneira "razoável" de medirmos "áreas" em um tal plano.

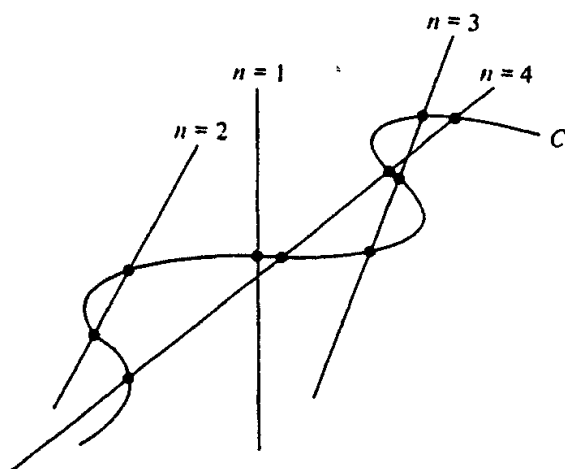



Figura 1-30. n **é a multiplicidade da reta correspondente.**

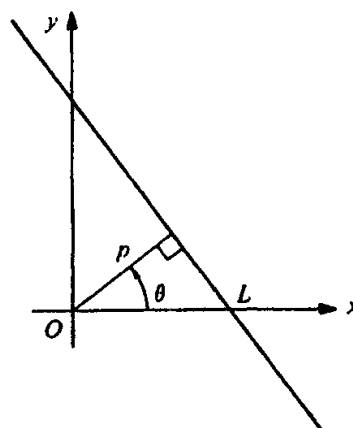



Figura 1-31. L **está determinada por** p **e** θ**.**

Uma vez escolhida esta medida, gostaríamos de aplicá-la e encontrar a medida do conjunto de retas (contadas com multiplicidades) que intersectam C. O resultado é bem interessante e pode ser enunciado da seguinte maneira.

Teorema 3. (Fórmula de Cauchy-Crofton). *Seja C uma curva plana regular de comprimento l. A medida do conjunto de retas (contadas com multiplicidades) que intersectam C é igual a $2l$.*

Antes de introduzírmos uma demonstração, precisamos definir o que vem a ser uma medida razoável para um conjunto de retas no plano. Primeiro, escolheremos um sistema de coordenadas conveniente para um tal conjunto. Uma reta L no plano é determinada pela distância $p \geq 0$ de L à origem O (de um sistema de coordenadas cartesianas) e pelo ângulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, que uma semi-reta iniciando em 0 e normal a L, faz com o eixo Ox (Fig.1.31). Pode-se notar facilmente que a equação de L em termos destes parâmetros é

$$x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta = p.$$

Portanto, podemos substituir o conjunto de todas as retas no plano pelo conjunto

$$\mathcal{L} = \{(p, \theta) \in \mathbb{R}^2;\ p \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Mostraremos a seguir que, a menos de uma escolha de unidades, existe uma única medida razoável neste conjunto.

Para explicitar o que queremos dizer com razoável, vamos olhar mais de perto para a medida usual de áreas em $\mathbb{R}^2$. Precisamos de uma definição.

Um *movimento rígido* em $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $(\bar{x}, \bar{y}) \to (x, y)$, onde (Fig.1.32)

$$\begin{aligned} x &= a + \bar{x} \cos \phi - \bar{y} \operatorname{sen} \phi, \\ y &= b + \bar{x} \operatorname{sen} \phi + \bar{y} \cos \phi. \end{aligned} \tag{6}$$

Para definir a área de um conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ consideramos a integral dupla

$$\iint_S dx\, dy;$$

isto é, integramos o "elemento de área" $dx\, dy$ sobre S. Quando, em algum sentido, esta integral existe dizemos que S é *mensurável* e definimos a área de S como sendo o valor da integral acima. De agora em diante, admitiremos que todas as integrais envolvidas em nossa discussão de fato existem.

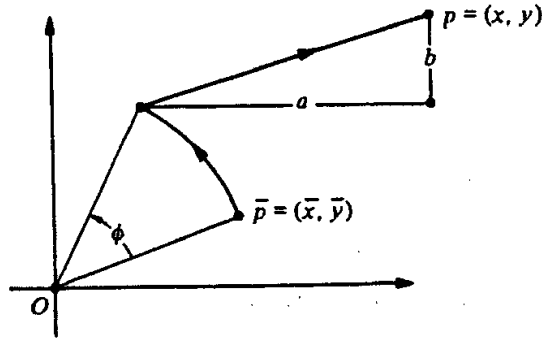



Figura 1-32

Note que poderíamos ter escolhido algum outro elemento de área, digamos, $xy^2 dx\, dy$. A razão pela qual escolhemos $dx\, dy$ é que, a menos de um fator, este é o único elemento de área que é invariante por movimentos rígidos. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 1. *Seja $f(x,y)$ uma função contínua definida em $\mathbb{R}^2$. Para um conjunto qualquer $S \subset \mathbb{R}^2$, defina a área A de S por*

$$A(S) = \iint_S f(x,y)\, dx\, dy.$$

(é claro, estamos considerando apenas os conjuntos para os quais a integral acima existe). Suponha que A seja invariante por movimentos rígidos; isto é, se S é um conjunto qualquer e $\bar{S} = F^{-1}(S)$, onde F é o movimento rígido (6), temos

$$A(\bar{S}) = \iint_{\bar{S}} f(\bar{x},\bar{y}) d\bar{x}\, d\bar{y} = \iint_S f(x,y) dx\, dy = A(S).$$

Então $f(x,y) = const.$

Demonstração. Recordemos a fórmula para a mudança de variáveis em integrais múltiplas (exercício 15 desta seção):

$$\iint_S f(x,y) dx\, dy = \iint_{\bar{S}} f(x(\bar{x},\bar{y}), y(\bar{x},\bar{y})) \frac{\partial(x,y)}{\partial(\bar{x},\bar{y})} d\bar{x}\, d\bar{y}. \qquad (7)$$

Aqui, $x = x(\bar{x},\bar{y})$, $y = y(\bar{x},\bar{y})$ são funções com derivadas parciais contínuas que definem uma mudança de variáveis $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\bar{S} = T^{-1}(S)$, e

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\bar{x},\bar{y})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \dfrac{\partial x}{\partial \bar{y}} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \bar{x}} & \dfrac{\partial y}{\partial \bar{y}} \end{vmatrix}$$

é o (determinante) Jacobiano da transformação T. Em nosso caso particular, a transformação é o movimento rígido (6) e o Jacobiano é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\bar{x},\bar{y})} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{vmatrix} = 1.$$

Utilizando este fato e a equação (7), obtemos

$$\iint_{\bar{S}} f(x(\bar{x},\bar{y}), y(\bar{x},\bar{y}))d\bar{x}\,d\bar{y} = \iint_{S} f(\bar{x},\bar{y})d\bar{x}\,d\bar{y}.$$

Como isto é verdadeiro para um S arbitrário, temos

$$f(x(\bar{x},\bar{y}), y(\bar{x},\bar{y})) = f(\bar{x},\bar{y}).$$

Utilizamos agora o fato de que para qualquer par de pontos (x,y), $(\bar{x},\bar{y})$ em $\mathbb{R}^2$ existe um movimento rígido F tal $F(\bar{x},\bar{y}) = (x,y)$. Portanto,

$$f(x,y) = (f \circ F)(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{x},\bar{y}),$$

e $f(x,y) = const.$, como era desejado.

Q.E.D.

Observação 3. A demonstração acima está apoiada sobre dois fatos: primeiro, que o Jacobiano de um movimento rígido é 1; e, segundo, que os movimentos rígidos são transitivos sobre pontos do plano. Isto é, dados dois pontos no plano existe um movimento rígido levando um ponto ao outro ponto.

Com estes preliminares, podemos finalmente definir uma medida no conjunto $\mathcal{L}$. Observamos primeiro que o movimento rígido (6) induz uma transformação sobre $\mathcal{L}$. Com efeito, a transformação (6) aplica a reta $x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta = p$ sobre a reta

$$\bar{x}\cos(\theta-\phi) + \bar{y}\operatorname{sen}(\theta-\phi) = p - a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta.$$

Isto quer dizer que a transformação induzida por (6) sobre $\mathcal{L}$ é

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p - a\cos\theta - b\,\text{sen}\,\theta, \\ \bar{\theta} &= \theta - \phi. \end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que o Jacobiano da transformação acima é 1 e que tais transformações também são transitivas sobre o conjunto de retas no plano. Definimos então a medida de um conjunto $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ como

$$\iint_{\mathcal{S}} dp\, d\theta.$$

Imitando a prova da Prop. 1, prova-se que, a menos de um fator constante, esta é a única medida em $\mathcal{L}$ que é invariante por movimentos rígidos. Esta medida é, portanto, tão razoável quanto poder-se-ia exigir.

Podemos agora esboçar uma demonstração do Teorema 3.

Esboço da demonstração do Teorema 3. Suponha inicialmente que a curva C é um segmento de reta com comprimento l. Como a nossa medida é invariante por movimentos rígidos, podemos supor que o sistema de coordenadas tem a origem O situada no ponto médio de C e que o eixo Ox é paralelo a C. Então, a medida do conjunto de retas que intersectam C é (Fig. 1.33)

$$\iint dp\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{|\cos\theta|(l/2)} dp\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{l}{2}|\cos\theta|\, d\theta = 2l.$$

Considere agora que C seja uma curva poligonal composta de um número finito de segmentos C_i com comprimento l_i ($\sum_i l_i = l$). Seja $n = n(p,\theta)$ o número de pontos de interseção da reta (p,θ) com C. Efetuando a soma dos resultados para cada segmento C_i, teremos

$$\iint n\, dp\, d\theta = 2\sum_i l_i = 2l, \tag{8}$$

que é a fórmula de Cauchy-Crofton para uma curva poligonal.

Finalmente, utilizando um processo de limite, pode-se estender o resultado acima para uma curva regular qualquer, e isto prova o teorema 3.

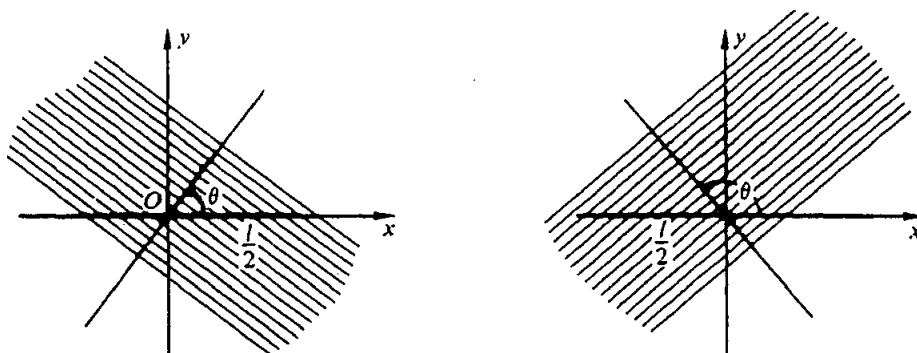



Figura 1-33

Q.E.D.

Deve-se observar que as idéias gerais deste tópico pertencem a um ramo da geometria conhecido como geometria integral. Um apanhado geral sobre o assunto pode ser encontrado em L.A. Santaló, "Integral Geometry," em *Studies in Global Geometry and Analysis*, editado por S.S.Chern, The Mathematical Association of America, 1967, 147-193.

Existem diversas maneiras de aplicar a fórmula de Cauchy-Crofton. Por exemplo, se uma curva não é retificável (ver Exercício 9, seção 1.3), mas o lado esquerdo da Eq.(8) tem um sentido, isto pode ser usado para definir o "comprimento" de uma tal curva. A equação (8) também pode ser usada para estimar comprimentos de curvas de uma maneira eficiente. Com efeito, uma boa aproximação para a integral em (8) é obtida da seguinte maneira.* Considere uma família de retas paralelas tal que a distância entre retas consecutivas seja r. Efetuando rotações desta família pelos ângulos $\pi/4, 2\pi/4$ e $3\pi/4$, obtemos quatro famílias de retas. Seja n o número de pontos de interseção de uma curva C com todas estas retas. Então

$$\frac{1}{2}nr\frac{\pi}{4}$$

é uma aproximação da integral

$$\frac{1}{2}\iint n\,dp\,d\theta = \textit{comprimento de } C,$$

*Gostaria de agradecer a Robert Gardner por sugerir esta aplicação bem como o exemplo que se segue

e fornece assim uma estimativa para o comprimento de C. Para que possamos ter uma idéia do quão boa é esta estimativa, consideramos o seguinte exemplo.

Exemplo. A figura 1.34 é um desenho de uma micrografia eletrônica de uma molécula de DNA circular. Gostaríamos de estimar o comprimento

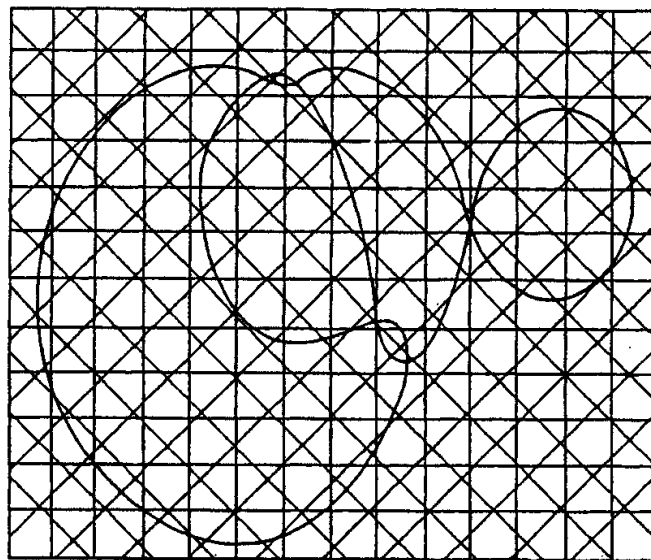



Figura 1-34. *Reproduzido de H. Ris e B. C. Chandler,* Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol. 28, 2 (1963), *com permissão.*

desta molécula. As quatro famílias de retas, espaçadas em 7mm, e dispostas em intervalos ângulares de $\pi/4$, estão sobrepostas sobre o desenho (uma maneira mais prática seria ter a família de retas desenhadas em uma folha transparente). O número de pontos de interseção é 153. Logo,

$$\frac{1}{2}n\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}153\frac{3.14}{4} \sim 60.$$

A escala do desenho é tal que 1 micrometro ($= 10^{-6}$ metro) é representado no desenho por 25 milímetros. Assim r, em micrometros, teria o valor $r = \frac{7}{25}$, e então o comprimento desta molécula de DNA seria aproximadamente

$$60(\frac{7}{25}) \sim 16.8 \textit{ micrometros}.$$

O valor verdadeiro é 16.3 micrometros.

Exercícios

*1. Existe uma curva simples fechada no plano com comprimento igual a 6 metros e limitando uma área de 3 metros quadrados?

*2. Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta e seja $l >$ comprimento de AB. Mostre que a curva C ligando A e B, com comprimento l, e tal que em conjunto com $\overline{AB}$ limita a maior área possível é um arco de círculo passando por A e B (Fig. 1.35).

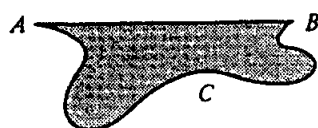
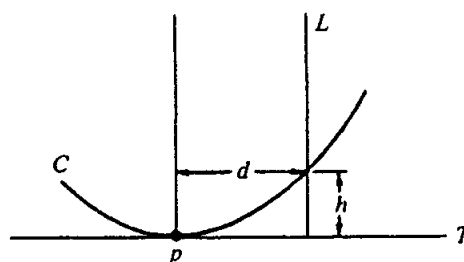



Figura 1-35 **Figura 1-36**

3. Calcule a curvatura da elipse

$$x = a\cos t, \qquad y = b\,\mathrm{sen}\,t, \qquad t \in [0, 2\pi],\ a \neq b,$$

e mostre que ela possui exatamente quatro vértices, que são os pontos: $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(b, 0)$ e $(-b, 0)$.

*4. Seja C uma curva plana e T a reta tangente em um ponto $p \in C$. Considere a reta L, paralela à reta normal em p e a uma distância d de p, como mostra a Fig.1.36. Seja h o comprimento do segmento determinado sobre L por C e T (assim, h é a "altura" de C relativa a T). Prove que

$$|k(p)| = \lim_{d \to 0} \frac{2h}{d^2},$$

onde $k(p)$ é a curvatura de C em p.

*5. Seja C uma curva plana contida no interior de um disco de raio r. Prove que existe um ponto $p \in C$ tal que a curvatura k de C em p satisfaz $|k| \geq 1/r$.

6. Seja $\alpha(s), s \in [0, l]$ uma curva plana convexa e fechada com orientação positiva. A curva

$$\beta(s) = \alpha(s) - rn(s),$$

onde r é uma constante positiva e n o vetor normal, é chamada uma *curva paralela* a α (Fig.1.37). Mostre que

   a. Comprimento de β = comprimento de $\alpha + 2\pi r$.

   b. $A(\beta) = A(\alpha) + rl + \pi R^2$.

   c. $k_\beta(s) = k_\alpha(s)/(1 + rk_\alpha(s))$.
   Nos ítens acima, $A(\ )$ denota a área limitada pela curva correspondente, e k_α, k_β são, respectivamente as curvaturas de α e β.

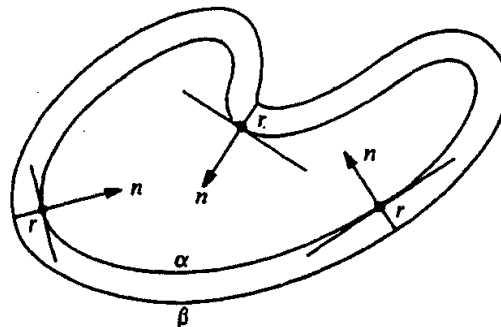



Figura 1-37

7. Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva plana definida na reta real. Suponha que α não passa pela origem $\mathbf{0} = (0, 0)$ e que temos

$$\lim_{t \to +\infty} |\alpha(t)| = \infty \quad e \quad \lim_{t \to -\infty} |\alpha(t)| = \infty.$$

   a. Prove que existe um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|\alpha(t_0)| \leq |\alpha(t)|$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

   b. Mostre, com um exemplo, que a afirmação no ítem (a) é falsa se não supomos que (ambos) $\lim_{t \to +\infty} |\alpha(t)| = \infty$ e $\lim_{t \to -\infty} |\alpha(t)| = \infty$.

8. *a. Seja $\alpha(s)$, $s \in [0, l]$, uma curva plana simples e fechada. Suponha que a curvatura $k(s)$ satisfaça $0 < k(s) \leq c$, onde c é uma constante (assim, α "curva menos" do que um círculo de raio $1/c$). Prove que

$$\textit{comprimento de } \alpha \geq \frac{2\pi}{c}.$$

b. No ítem (a), substitua a condição de ser simples por "α tem índice de rotação N". Prove que

$$\textit{comprimento de } \alpha \geq \frac{2\pi N}{c}.$$

***9.** Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^2$ é *convexo* se, dados dois pontos quaisquer $p, q \in K$, o segmento de reta $\overline{pq}$ está contido em K (Fig.1.38). Prove que uma curva convexa simples delimita um conjunto convexo.

10. Seja C uma curva plana convexa. Prove geometricamente que C não tem auto-interseções.

***11.** Dada uma curva plana simples e fechada C, podemos considerar a sua *envoltória convexa* H (Fig.1.39), isto é, a fronteira do menor conjunto convexo contendo o interior de C. A curva H é formada por arcos de C e por segmentos das tangentes de C que "unem as partes não convexas" (Fig.1.39). Pode-se mostrar que H é uma curva convexa simples e fechada de classe C^1. Utilize esse fato para mostrar que, no problema isoperimétrico, podemos nos restringir às curvas convexas.

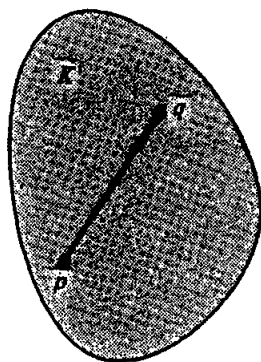



Figura 1-38

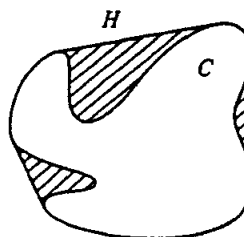



Figura 1-39

*12. Considere um círculo unitário S^1 no plano. Mostre que a razão $M_1/M_2 = \frac{1}{2}$, onde M_2 é a medida do conjunto de retas no plano que intersectam S^1 e M_1 é a medida de todas estas retas que determinam uma corda de comprimento $> \sqrt{3}$. Intuitivamente, esta razão é a probabilidade de uma reta, que intersecta S^1, determinar em S^1 uma corda maior do que o lado de um triângulo equilátero inscrito em S^1 (Fig.1.40).

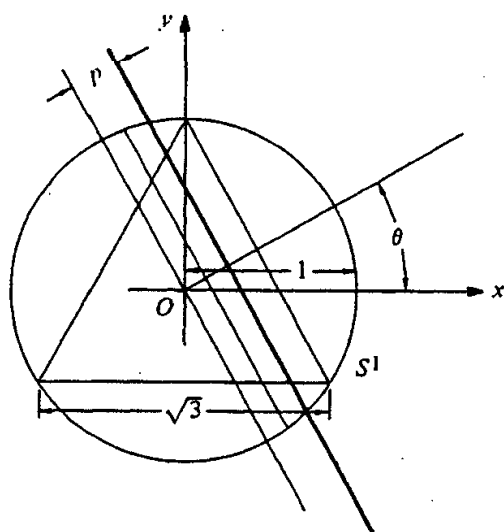
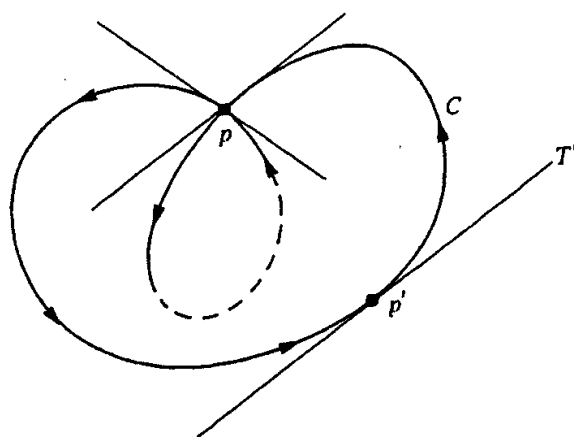



Figura 1-40 **Figura 1-41**

13. Seja C uma curva plana orientada e fechada com curvatura $k > 0$. Suponha que C tenha pelo menos um ponto de auto-interseção. Prove que

   a. Existe um ponto $p' \in C$ tal que a reta tangente T' em p' é paralela a alguma tangente em p.

   b. O ângulo de rotação da tangente no arco positivo de C determinado por $pp'p$ é maior do que π (Fig.1.41).

   c. O índice de rotação de C é maior ou igual a 2.

14. a. Mostre que se uma reta L intersecta uma curva convexa fechada C, então L é tangente a C ou L intersecta C em exatamente dois pontos.

   b. Utilize a parte (a) para mostrar que a medida do conjunto de retas que intersectam C (sem multiplicidades) é igual ao comprimento de C.

15. O Teorema de Green é um resultado básico do Cálculo e pode ser enunciado como se segue. Seja uma curva plana simples e fechada dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Suponha que α tenha orientação positiva, seja C o traço de α, e seja R o interior de C. Sejam $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$ funções reais com derivadas parciais contínuas p_x, p_y, q_x, q_y. Então

$$\iint_R (q_x - p_y)dx\,dy = \int_C \left(p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt}\right) dt, \tag{9}$$

onde, na segunda integral, fica subentendido que as funções p e q estão restritas a α e que a integral é calculada entre os limites $t = a$ e $t = b$. Nos ítens abaixo, propomos uma demonstração, a partir do Teorema de Green, da fórmula para a área de R e da fórmula para a mudança de variáveis em integrais duplas (cf. Eqs. (1) e (7) nesta seção).

a. Considere $q = x$ e $p = -y$ na Eq. (9) e conclua que

$$A(R) = \iint_R dx\,dy = \frac{1}{2}\int_a^b \left(x(t)\frac{dy}{dt} - y(t)\frac{dx}{dt}\right) dt.$$

b. Seja $f(x, y)$ uma função real com derivadas parciais contínuas e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação de coordenadas dada pelas funções $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, que também tem derivadas parciais contínuas. Escolha na Eq. (9) $p = 0$ e q de tal forma que $q_x = f$. Aplique sucessivamente, o Teorema de Green, a transformação T, e novamente o Teorema de Green para obter

$$\begin{aligned} \textstyle\iint_R f(x,y)dx\,dy &= \textstyle\int_C q dy = \int_{T^{-1}(C)} (q \circ T)(y_u u'(t) + y_v v'(t))dt \\ &= \textstyle\iint_{T^{-1}(R)} \left\{\frac{\partial}{\partial u}((q \circ T)y_v) - \frac{\partial}{\partial v}((q \circ T)y_u)\right\} du\,dv. \end{aligned}$$

Mostre que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}((q(x(u,v), y(u,v))y_v) - \frac{\partial}{\partial v}((q(x(u,v), y(u,v))y_u) \\ = \;& f(x(u,v), y(u,v))(x_u y_v - x_v y_u) = f\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}. \end{aligned}$$

Juntando esses dois resultados obtenha a fórmula de mudança de variáveis para integrais duplas:

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy = \iint_{T^{-1}(R)} f(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv.$$

2

Superfícies Regulares

2.1 Introdução

Neste capítulo, começaremos o nosso estudo das superfícies. Enquanto no primeiro capítulo utilizamos principalmente o Cálculo elementar de uma variável, precisaremos agora de algumas noções do Cálculo de várias variáveis. Especificamente, precisaremos conhecer alguns fatos sobre a continuidade e a diferenciabilidade de funções e aplicações em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Tais fatos podem ser encontrados em qualquer bom texto de Cálculo, como por exemplo, R. Courant, Differential and Integral Calculus, volume II; incluímos uma breve revisão deste material no apêndice ao capítulo 2.

Na seção 2.2 introduzimos o conceito básico de uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$. Em contraste com o tratamento das curvas no capítulo 1, as superfícies regulares são definidas como conjuntos e não como aplicações. O objetivo da seção 2.2 é descrever alguns critérios úteis para decidirmos se um dado subconjunto de $\mathbb{R}^3$ é uma superfície regular.

Na seção 2.3 mostramos que é possível definir a noção de diferenciabilidade para uma função definida sobre uma superfície regular, e na seção 2.4 mostraremos que a noção usual de diferencial em $\mathbb{R}^2$ pode ser estendida a tais funções. Dessa maneira, as superfícies regulares fornecem um ambiente natural para o Cálculo bi-dimensional.

É claro que as curvas também podem ser tratadas a partir desse mesmo ponto de vista, isto é, como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ fornecendo um ambiente natural para o Cálculo uni-dimensional. Faremos um breve comentário sobre isso na seção 2.3.

As seções 2.2 e 2.3 são cruciais para o restante do livro. É possível que um principiante considere as demonstrações nestas seções um tanto difíceis. Se tal acontecer, as demonstrações podem ser omitidas em uma primeira leitura.

Na seção 2.5 introduzimos a primeira forma fundamental, um instrumento natural para tratar questões métricas (comprimento de curvas, áreas de regiões, etc.) sobre superfícies regulares. Veremos mais tarde que tais questões constituem um tema muito importante que será abordado no capítulo 4.

As seções 2.6, 2.7 e 2.8 são opcionais em uma primeira leitura. Na seção 2.6 trataremos de orientação sobre uma superfície regular. Tal noção será utilizada nos capítulos 3 e 4. Para a comodidade dos leitores que decidam omitir esta seção, faremos uma breve revisão da noção de orientação no início do capítulo 3.

2.2 Superfícies Regulares; Imagens inversas de valores regulares*

Nesta seção introduzimos a noção de uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$. A grosso modo, uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ é obtida tomando-se pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si, de tal modo que a figura resultante não apresente pontas, arestas ou auto-interseções; e que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos desta figura. A idéia é definir um conjunto que seja, em certo sentido, bi-dimensional e que seja também suficientemente suave de forma que as noções usuais do Cálculo possam ser estendidas a um tal conjunto.

Ao final da seção 2.4, deve ficar claro que a definição que se segue é uma boa definição.

DEFINIÇÃO 1. *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma* superfície regular *se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que* (Fig. 2.1)

1. $\mathbf{x}$ *é diferenciável. Isto significa que se escrevemos*

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \qquad (u,v) \in U,$$

as funções $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U.

---

* As demonstrações nesta seção podem ser omitidas em uma primeira leitura.

2. $\mathbf{x}$ *é um homeomorfismo. Como* $\mathbf{x}$ *é contínua pela condição 1, isto significa que* $\mathbf{x}$ *tem inversa* $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \to U$ *que é contínua.*

3. *(condição de regularidade) Para todo* $q \in U$, *a diferencial* $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *é injetiva.*

Explicaremos a condição 3 dentro em pouco.

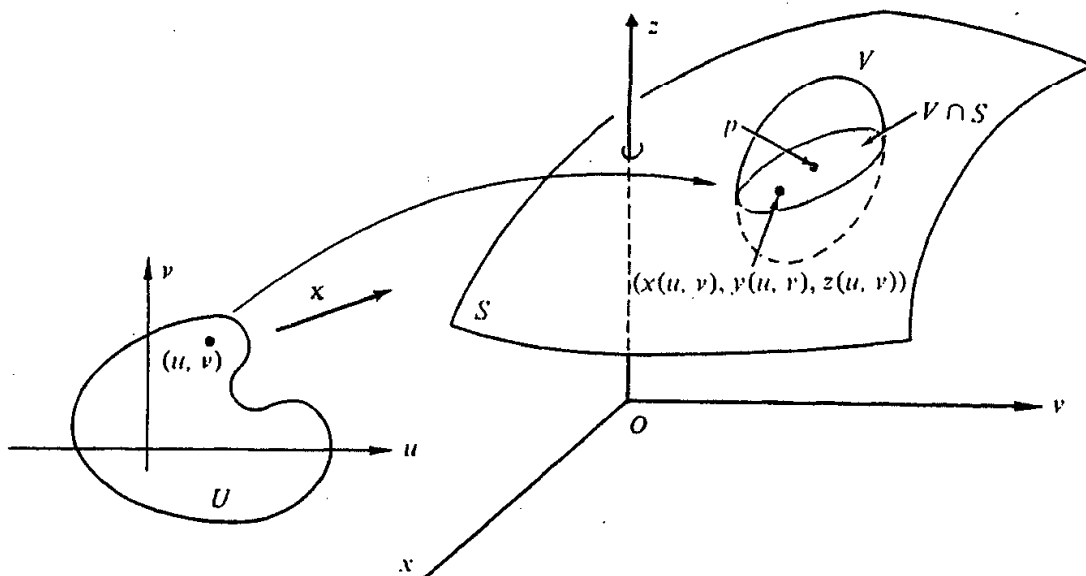



Figura 2-1

A aplicação $\mathbf{x}$ é chamada uma *parametrização* ou um sistema de coordenadas (locais) em (uma vizinhança de) p. A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada uma *vizinhança coordenada.*

Com o intuito de expressar a condição 3 de uma forma mais familiar, iremos calcular a matriz da aplicação linear $d\mathbf{x}_q$ nas bases canônicas $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (u,v) e $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (0,1,0)$ e $f_3 = (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ com coordenadas (x,y,z).

Seja $q = (u_0, v_0)$. O vetor e_1 é tangente à curva $u \longrightarrow (u, v_0)$ cuja imagem por $\mathbf{x}$ é a curva

$$u \longrightarrow (x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0)).$$

Esta última curva (chamada *curva coordenada* $v = v_0$) está em S e tem em $\mathbf{x}(q)$ o vetor tangente (Fig. 2.2)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u},$$

onde as derivadas são calculadas em (u_0, v_0) e um vetor é indicado pelas suas componentes na base $\{f_1, f_2, f_3\}$. Pela definição de diferencial (apêndice ao capítulo 2, Def. 1),

$$d\mathbf{x}_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}.$$

Analogamente, usando a curva coordenada $u = u_0$ (imagem por $\mathbf{x}$ da curva $v \longmapsto (u_0, v)$), obtemos

$$d\mathbf{x}_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}.$$

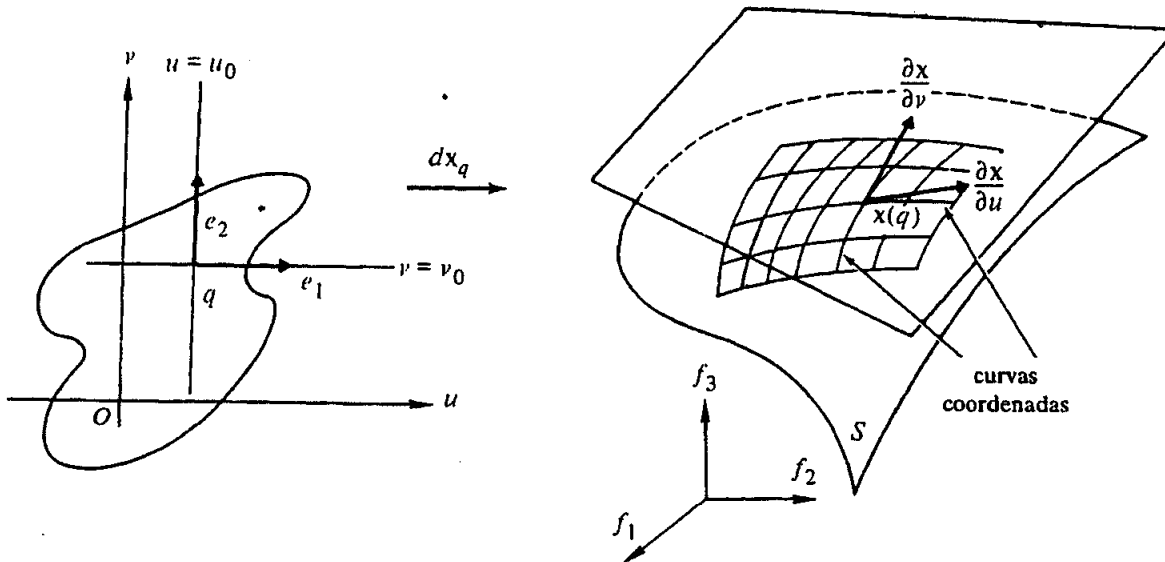



Figura 2-2

Portanto, a matriz da aplicação linear $d\mathbf{x}_q$ nas bases consideradas é,

$$d\mathbf{x}_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

A condição 3 da Def.1 pode agora ser expressa exigindo-se que os dois vetores coluna desta matriz sejam linearmente independentes, ou, de forma equivalente, que o produto vetorial $\partial \mathbf{x}/\partial u \wedge \partial \mathbf{x} \partial v \neq 0$; ou, ainda de outro modo, que

um dos menores de ordem 2 da matrix de $d\mathrm{x}_q$, isto é, que um dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \qquad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)},$$

seja diferente de zero em q.

Observação 1. A Definição 1 merece alguns comentários. Primeiramente, em contraste com o nosso tratamento das curvas no capítulo 1, definimos uma superfície como um subconjunto S de $\mathbb{R}^3$, e não como uma aplicação. Conseguimos isso cobrindo S com traços de parametrizações satisfazendo às condições 1, 2 e 3.

A condição 1 é bastante natural se esperamos fazer alguma geometria diferencial sobre S. A injetividade na condição 2 tem como objetivo excluir a possibilidade de auto-interseções em superfícies regulares. Evidentemente isso é necessário se queremos falar, digamos, sobre o plano tangente em um ponto p de S (ver Fig.2.3 (a)). A continuidade da inversa na condição 2 tem um propósito mais sutil, que poderá ser plenamente entendido na próxima seção. No momento, diremos apenas que esta condição é essencial para provar que certos objetos definidos em termos de uma parametrização não dependem desta parametrização, mas apenas do próprio conjunto S. Finalmente, como mostraremos na seção 2.4, a condição 3 garante a existência de um "plano tangente" em todos os pontos de S (ver Fig. 2.3 (b)).

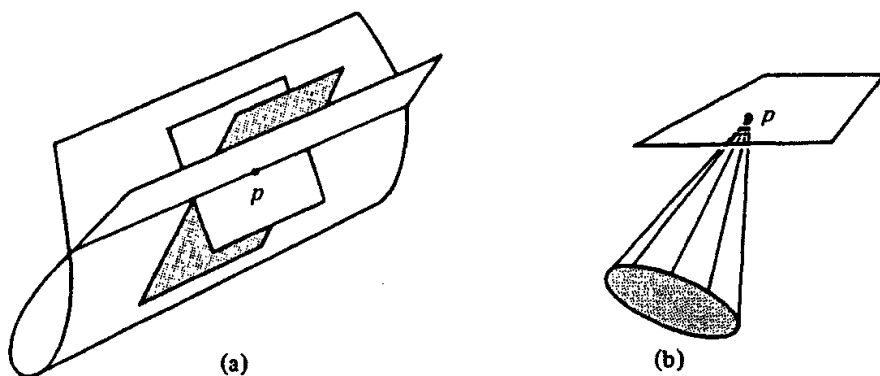



Figura 2-3. *Algumas situações que são evitadas na definição de superfície regular.*

Exemplo 1. Vamos mostrar que a esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular.

Primeiro verificaremos que a aplicação $\mathbf{x}_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}_1 = (x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \qquad (x, y) \in U,$$

onde $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$ e $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$, é uma parametrização de S^2. Observe que $\mathbf{x}_1(U)$ é a parte (aberta) de S^2 acima do plano xy.

Como $x^2+y^2 < 1$, a função $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Portanto, $\mathbf{x}_1$ é diferenciável e a condição 1 é satisfeita.

A condição 3 é verificada facilmente, uma vez que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} \equiv 1.$$

Para verificar a condição 2, observamos que $\mathbf{x}_1$ é bijetiva e que $\mathbf{x}_1^{-1}$ é a restrição da projeção (contínua) $\pi(x, y, z) = (x, y)$ ao conjunto $\mathbf{x}_1(U)$. Assim, $\mathbf{x}_1^{-1}$ é contínua em $\mathbf{x}_1(U)$.

Agora, cobriremos a esfera inteira utilizando parametrizações similares. Procedemos da seguinte maneira. Definimos $\mathbf{x}_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por

$$\mathbf{x}_2(x, y) = \left(x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\right), \qquad (x, y) \in U,$$

verificamos que $\mathbf{x}_2$ é uma parametrização, e observamos que $\mathbf{x}_1(U) \cup \mathbf{x}_2(U)$ cobre a esfera menos o equador

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}.$$

Utilizando então os planos xz e zy, definimos as seguintes parametrizações

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_3(x, z) &= \left(x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z\right), \\
\mathbf{x}_4(x, z) &= \left(x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z\right), \\
\mathbf{x}_5(y, z) &= \left(+\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z\right), \\
\mathbf{x}_6(y, z) &= \left(-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z\right),
\end{aligned}$$

que, juntamente com $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, cobrem inteiramente S^2 (Fig.2.4). Mostramos assim que S^2 é uma superfície regular.

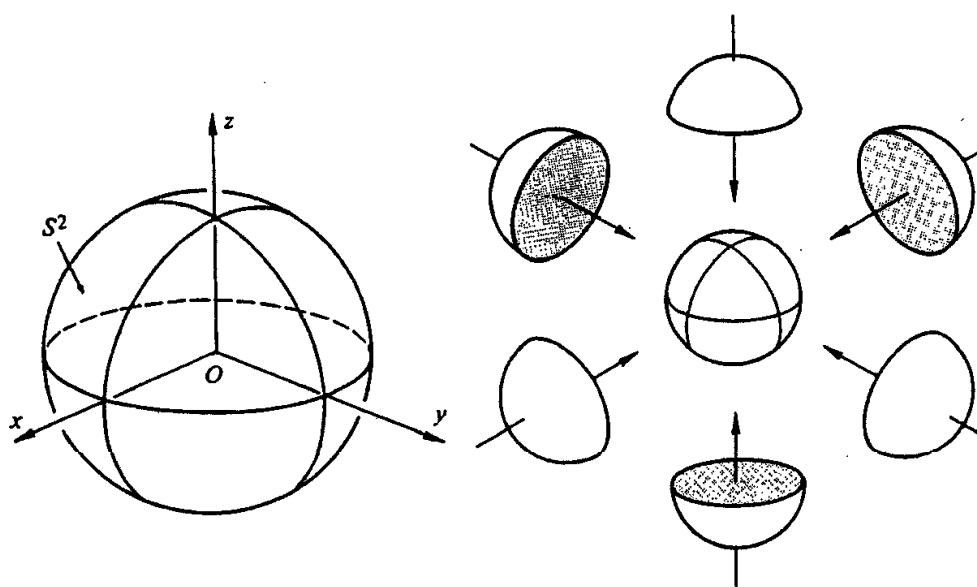



Figura 2-4

Para a maioria das aplicações, é conveniente relacionar parametrizações com as coordenadas geograficas em S^2. Sejam $V = \{(\theta, \varphi); 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ e $\mathbf{x} : V \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta).$$

É claro que $\mathbf{x}(V) \subset S^2$. Mostraremos que $\mathbf{x}$ é uma parametrização de S^2. É costume dizer que θ é a *colatitude* (o complemento da latitude) e φ a *longitude* (Fig. 2.5).

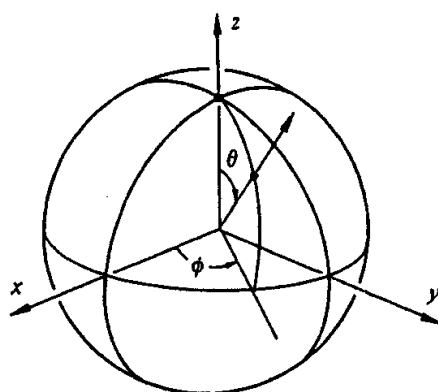



Figura 2-5

É evidente que as funções $\operatorname{sen}\theta \cos\varphi$, $\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$, $\cos\theta$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens; logo, $\mathbf{x}$ é diferenciável. Além disso, para

que os determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)} = \cos\theta \operatorname{sen}\varphi,$$
$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)} = \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi,$$
$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(\theta,\varphi)} = -\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi,$$

se anulem simultaneamente, é necessário que

$$\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta \cos^2\varphi + \operatorname{sen}^4\theta \operatorname{sen}^2\varphi = \operatorname{sen}^2\theta = 0.$$

Isto não acontece em V, e portanto ficam satisfeitas as condições 1 e 3 da Def. 1.

Em seguida, observamos que dado $(x, y, z) \in S^2 - C$, onde C é o semi-círculo

$$C = \{(x, y, z) \in S^2;\ y = 0,\ x \geq 0\},$$

θ fica determinado de maneira única por $\theta = \cos^{-1} z$, uma vez que $0 < \theta < \pi$. Conhecendo o valor de θ, determinamos $\operatorname{sen}\varphi$ e $\cos\varphi$ a partir de $x = \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$, $y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$, e isto determina φ de maneira única $(0 < \varphi < 2\pi)$. Segue-se então que $\mathbf{x}$ tem uma inversa $\mathbf{x}^{-1}$. Para completar a verificação da condição 2, deveríamos provar que $\mathbf{x}^{-1}$ é contínua. No entanto, como demonstraremos em breve (Prop. 4) que esta prova não é necessária quando já se sabe que S é uma superfície regular, não a faremos aqui.

Observamos que $\mathbf{x}(V)$ omite apenas um semi-círculo de S^2 (incluíndo os dois pólos) e que S^2 pode ser coberta por vizinhanças coordenadas de duas parametrizações deste tipo.

No Exercício 16 indicamos como cobrir S^2 com um outro conjunto útil de vizinhanças coordenadas.

O Exemplo 1 mostra que, decidir se um dado subconjunto de $\mathbb{R}^3$ é uma superfície regular, a partir da definição, pode ser um tanto cansativo. Antes de prosseguirmos com os exemplos, apresentaremos duas proposições que simplificarão essa tarefa. A Proposição 1 mostra a relação existente entre a definição de uma superfície regular e o gráfico de uma função $z = f(x, y)$. A Proposição 2 utiliza o teorema da função inversa e relaciona a definição de superfície regular com subconjuntos da forma $f(x, y, z) =$ constante.

Proposição 1. *Se $f : U \to R$ é uma função diferenciável em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$, então o gráfico de f, isto é, o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, é uma superfície regular.*

Demonstração. Basta mostrar que a aplicação $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

é uma parametrização do gráfico, cuja vizinhança coordenada cobre todos os pontos do gráfico. A condição 1 é verificada sem problemas, e a condição 3 também não oferece dificuldade, uma vez que $\partial(x, z)/\partial(u, v) \equiv 1$. Finalmente, cada ponto (x, y, z) do gráfico é a imagem por $\mathbf{x}$ de um único ponto $(u, v) = (x, y) \in U$. Consequentemente, $\mathbf{x}$ é bijetiva, e como $\mathbf{x}^{-1}$ é a restrição ao gráfico de f da projeção (contínua) de $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy, $\mathbf{x}^{-1}$ é contínua.

Q.E.D.

Antes de enunciarmos a Prop. 2, precisaremos da seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2. *Dada uma aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$, dizemos que $p \in U$ é um* ponto crítico *de F se a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem $F(p) \in \mathbb{R}^m$ de um ponto crítico é chamado um* valor crítico *de F. Um ponto de $\mathbb{R}^m$ que não é um valor crítico é chamado um* valor regular *de F.*

A terminologia é evidentemente motivada pelo caso particular em que $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real de uma variável real. Um ponto $x_0 \in U$ é crítico se $f'(x_0) = 0$, isto é, se a diferencial df_{x_0} leva todos os vetores em $\mathbb{R}$ no vetor nulo (Fig.2.6). Note que qualquer ponto $a \notin f(U)$ é, trivialmente, um valor regular de f.

Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então df_p aplicada ao vetor $(1, 0, 0)$ é obtida calculando-se o vetor tangente em $f(p)$ à curva

$$x \longrightarrow f(x, y_0, z_0).$$

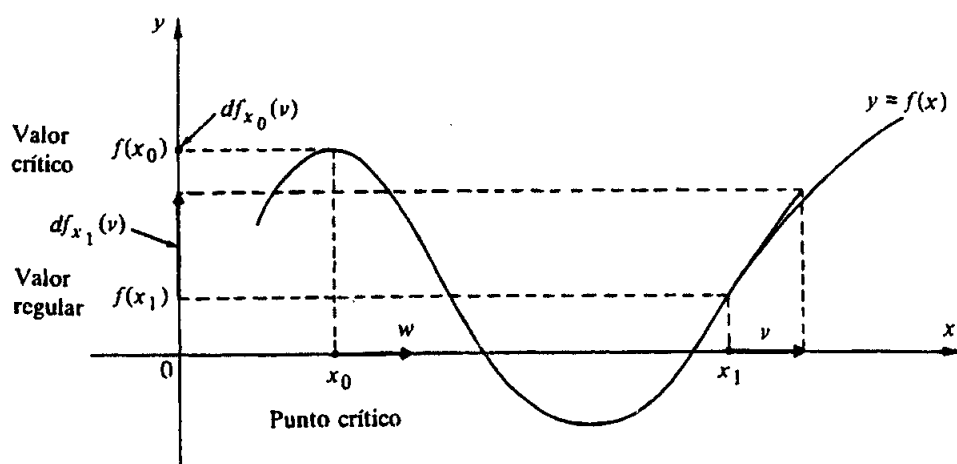
Figura 2-6

Decorre daí que

$$df_p(1,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_x$$

e, analogamente, que

$$df_p(0,1,0) = f_y, \qquad df_p(0,0,1) = f_z.$$

Concluímos que a matriz de df_p na base $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ é dada por

$$df_p = (f_x, f_y, f_z).$$

Note que, nesse caso, dizer que df_p não é sobrejetiva é equivalente a dizer que $f_x = f_y = f_z = 0$ em p. Portanto, $a \in f(U)$ é um valor regular de $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to R$ se e somente se f_x, f_y e f_z não se anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x,y,z) \in U : \ f(x,y,z) = a\}.$$

Proposição 2. *Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f, então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Seja $p = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $f^{-1}(a)$. Como a é um valor regular de f, podemos admitir, trocando os nomes dos eixos coordenados se necessário, que $f_z \neq 0$ em p. Definimos uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por

$$F(x,y,z) = (x, y, f(x,y,z)),$$

e indicamos por (u, v, t) as coordenadas de um ponto do $\mathbb{R}^3$ onde F toma seus valores. A diferencial de F em p é dada por

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix},$$

donde

$$\det(dF_p) = f_z \neq 0.$$

Podemos então aplicar o teorema da função inversa (cf. apêndice ao Capítulo 2), que garante a existência de vizinhanças V de p e W de $F(p)$ tais que $F : V \to W$ é inversível e a inversa $F^{-1} : W \to V$ é diferenciável (Fig. 2.7). Segue-se que as funções coordenadas de F^{-1}, i.e., as funções

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = g(u, v, t), \qquad (u, v, t) \in W,$$

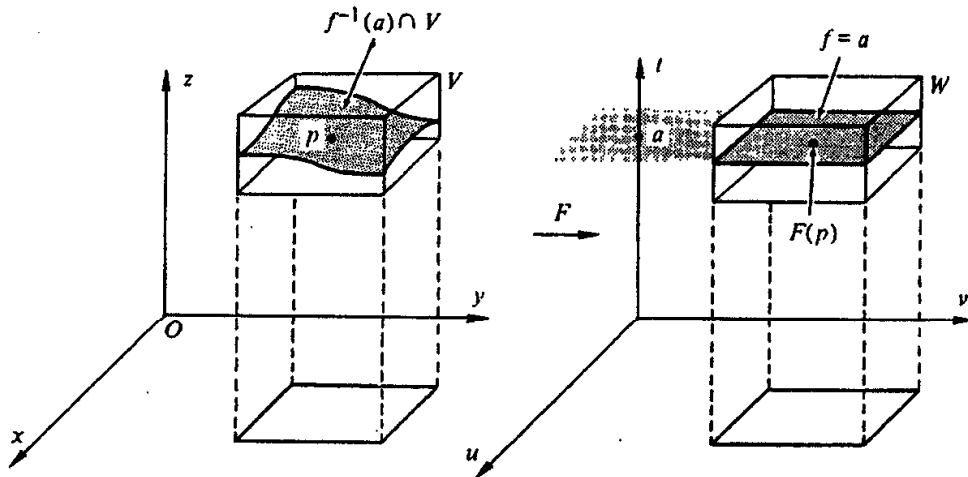



Figura 2-7

são diferenciáveis. Em particular, $z = g(u, v, a) = h(x, y)$ é uma função diferenciável definida na projeção de V sobre o plano xy. Como

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t);\ t = a\},$$

concluímos que o gráfico de h é $f^{-1}(a) \cap V$. Pela Prop. 1, $f^{-1}(a) \cap V$ é uma vizinhança coordenada de p. Consequentemente, todo $p \in f^{-1}(a)$ pode ser coberto por uma vizinhança coordenada, e podemos concluir que $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular. **Q.E.D.**

Observação 2. A demonstração consiste essencialmente em aplicar o teorema da função inversa para "resolver em z" a equação $f(x,y,z) = a$. Isto pode ser feito em uma vizinhança de p se $f_z \neq 0$. Tal fato é apenas um caso especial do teorema geral das funções implícitas, que decorre do teorema da função inversa; e que lhe é, em verdade, equivalente.

Exemplo 2. O elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é uma superfície regular. De fato, é o conjunto $f^{-1}(0)$, onde

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

é uma função diferenciável e 0 é um valor regular de f. Isso segue-se do fato das derivadas parciais $f_x = 2x/a^2$, $f_y = 2y/b^2$, $f_z = 2z/c^2$ se anularem simultaneamente apenas no ponto $(0,0,0)$, que não pertence a $f^{-1}(0)$. Este exemplo inclui a esfera como um caso particular $(a = b = c = 1)$.

Os exemplos de superfícies regulares apresentados até agora são conjuntos conexos de $\mathbb{R}^3$. Diremos que uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é *conexa* se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por uma curva contínua contida em S. Na definição de uma superfície regular, não fizemos nenhuma restrição sobre a conexidade das superfícies. O próximo exemplo mostra que superfícies regulares dadas pela Prop. 2 podem não ser conexas.

Exemplo 3. O hiperbolóide de duas folhas $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ é uma superfície regular, já que é dada por $S = f^{-1}(0)$, onde 0 é um valor regular de $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1$ (Fig.2.8). Note que a superfície S não é conexa; isto é, dados dois pontos em duas folhas distintas ($z > 0$ e $z < 0$) não é possível ligá-los por uma curva contínua $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ contida na superfície. De fato, caso fosse possível, $z(t)$ mudaria de sinal, e para algum t_0 teríamos $z(t_0) = 0$. Isto significa que $\alpha(t_0) \notin S$.

A propósito, o argumento do Exemplo 3 pode ser utilizado para provar uma propriedade das superfícies conexas que usaremos com frequência. Se $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua que não se anula, definida sobre uma superfície conexa, então* f *não muda de sinal em* S.

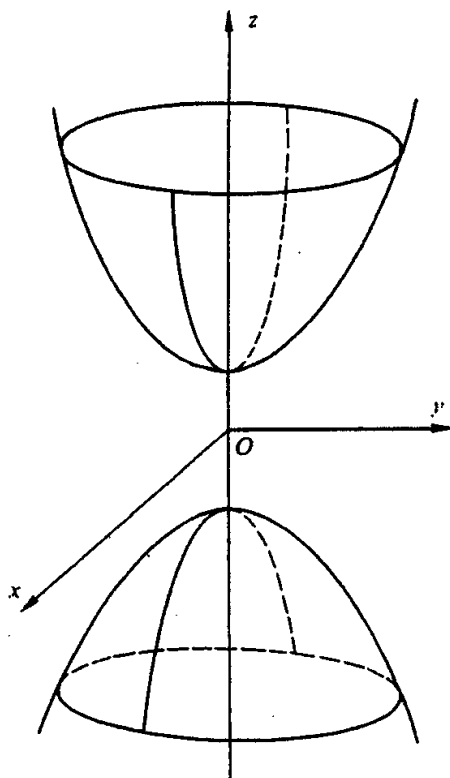



Figura 2-8. *Uma superfície não conexa:* $-y^2 - x^2 + z^2 = 1$.

Para provar isto, utilizamos o teorema do valor intermediário (apêndice ao capítulo 2, Prop. 4). Suponha, por contradição, que $f(p) > 0$ e $f(q) < 0$ para dois pontos $p, q \in S$. Como S é conexa, existe uma curva contínua $\alpha : [a, b] \to S$ tal que $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$. Aplicando o teorema do valor intermediário à função contínua $f \circ \alpha : [a, b] \to R$, podemos assegurar a existência de $c \in (a, b)$ tal que $f \circ \alpha(c) = 0$; isto é, f é zero em $\alpha(c)$,o que é uma contradição.

Exemplo 4. O toro T é a "superfície" gerada pela rotação de um círculo S^1 de raio r em torno de uma reta pertencente ao plano do círculo e a uma distância $a > r$ do centro do círculo (Fig. 2.9).

Seja S^1 o círculo no plano yz centrado no ponto $(0, a, 0)$. Então S^1 é dado por $(y - a)^2 + z^2 = r^2$ e os pontos do conjunto T, obtidos pela rotação deste círculo em torno do eixo Oz satisfazem a equação

$$z^2 = r^2 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2.$$

Consequentemente, T é a imagem inversa de r^2 pela função

$$f(x,y,z) = z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2.$$

Essa função é diferenciável para $(x,y) \neq (0,0)$, e como

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

r^2 é um valor regular de f. Segue-se então que o toro T é uma superfície regular.

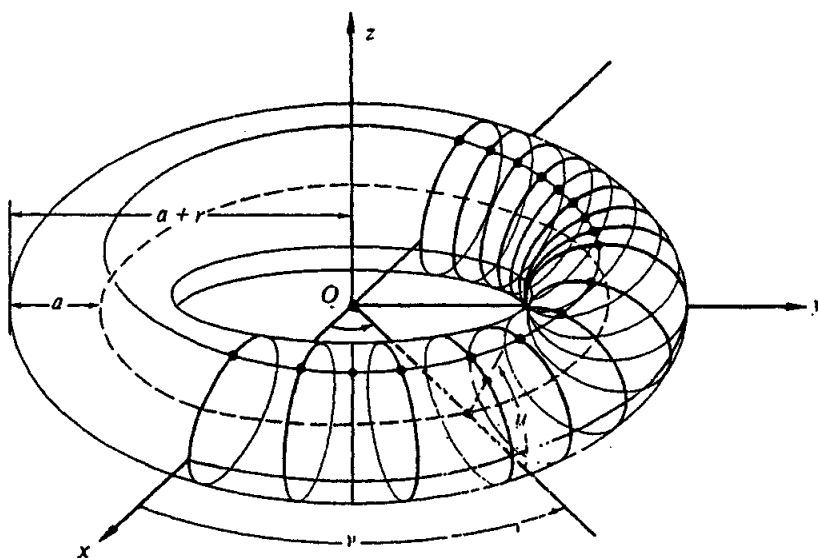



Figura 2-9

A proposição 1 afirma que o gráfico de uma função diferenciável é uma superfície regular. A proposição seguinte fornece uma recíproca local deste fato; isto é, qualquer superfície regular é localmente o gráfico de uma função diferenciável.

Proposição 3. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Então existe uma vizinhança V de p em S tal que V é o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das seguintes formas: $z = f(x,y)$, $y = g(x,z)$, $x = h(y,z)$.*

Demonstração. Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ uma parametrização de S em p, e escreva $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in U$. Pela condição 3 da Def. 1, um dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \qquad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \qquad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},$$

não se anula em $\mathbf{x}^{-1}(p) = q$.

Primeiramente suponha que $\partial(x,y)/\partial(u,v)(q) \neq 0$, e considere a aplicação $\pi \circ \mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^2$, onde π é a projeção $\pi(x,y,z) = (x,y)$. Então $\pi \circ \mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, e, como $\partial(x,y)/\partial(u,v)(q) \neq 0$, podemos aplicar o teorema da função inversa para garantir a existência de vizinhanças V_1 de q e V_2 de $\pi \circ \mathbf{x}(q)$ tais que $\pi \circ \mathbf{x}$ aplique V_1 difeomorficamente sobre V_2 (Fig. 2.10). Decorre daí que π restrita a $\mathbf{x}(V_1) = V$ é bijetiva e tem uma inversa diferenciável $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1} : V_2 \to V_1$. Observe que, como $\mathbf{x}$ é um homeomorfismo, V é uma vizinhança de p em S. Agora, considerando a composição da aplicação $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1} : (x,y) \to (u(x,y), v(x,y))$ com a função $(u,v) \to z(u,v)$, podemos notar que V é o gráfico de uma função diferenciável $z = z(u(x,y), v(x,y)) = f(x,y)$, e isso encerra a demonstração deste primeiro caso.

Os casos que restam podem ser tratados da mesma maneira, fornecendo-nos $x = h(y,z)$ e $y = g(x,z)$.

Q.E.D.

A proposição seguinte afirma que se já sabemos que S é uma superfície regular e temos um candidato a ser uma parametrização de S, digamos $\mathbf{x}$, então, não precisamos verificar que $\mathbf{x}^{-1}$ é contínua, desde que as outras condições da definição de superfície sejam satisfeitas. Esta observação foi utilizada no Exemplo 1.

Proposição 4. *Seja $p \in S$ um ponto de uma superfície regular S e seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação com $p \in \mathbf{x}(U)$ tal que as condições 1 e 3 da Def. 1 sejam satisfeitas. Suponha que $\mathbf{x}$ seja bijetiva. Então $\mathbf{x}^{-1}$ é contínua.*

Demonstração. A primeira parte da demonstração é similar à prova da Proposição 3. Escreva $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in U$, e seja $q \in U$. Pelas condições 1 e 3 podemos admitir, intercambiando os eixos coordenados de $\mathbb{R}^3$ se necessário, que $\partial(x,y)/\partial(u,v)(q) \neq 0$. Seja $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a projeção $\pi(x,y,z) = (x,y)$. A partir do teorema da função inversa, obtemos vizinhanças V_1 de q em U e V_2 de $\pi \circ \mathbf{x}(q)$ em $\mathbb{R}^2$ tais que $\pi \circ \mathbf{x}$ aplica V_1 difeomorficamente sobre V_2.

Suponha agora que $\mathbf{x}$ seja bijetiva. Então, restrita a $\mathbf{x}(V_1)$,

$$\mathbf{x}^{-1} = (\pi \circ \mathbf{x})^{-1} \circ \pi$$

(ver Fig.2.10). Assim, $\mathbf{x}^{-1}$, sendo a composição de aplicações contínuas, é contínua.

Q.E.D.

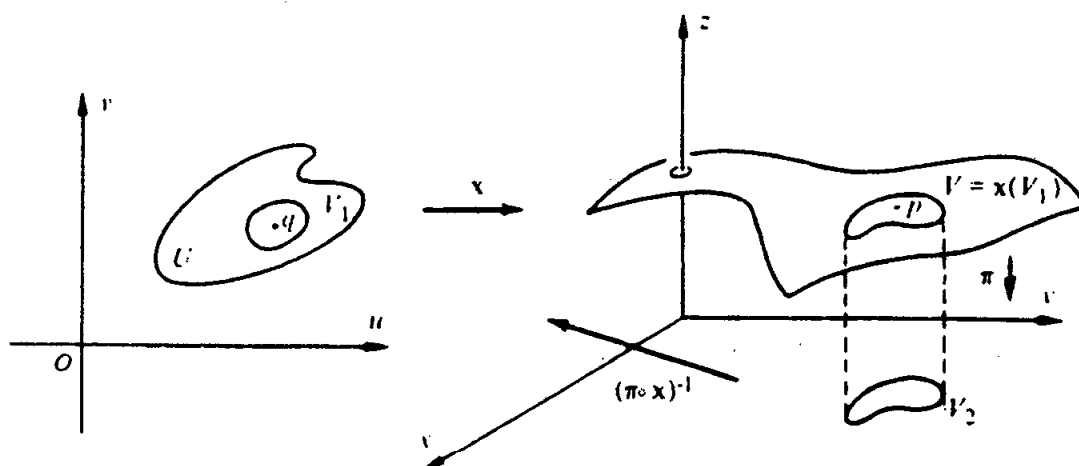



Figura 2-10

Exemplo 5. O cone de uma folha C, dado por

$$z = +\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

não é uma superfície regular. Observe que não podemos concluir isto somente pelo fato da parametrização "natural"

$$(x, y) \longrightarrow (x, y, +\sqrt{x^2 + y^2}), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

não ser diferenciável; poderiam existir outras parametrizações satisfazendo a Def. 1.

Para mostrar que isto não acontece, utilizamos a Prop. 3. Se C fosse uma superfície regular, seria, em uma vizinhança do $(0, 0, 0) \in C$, o gráfico de uma função diferenciável tendo uma das três formas: $y = h(x, z)$, $x = g(y, z)$, $z = f(x, y)$. As duas primeiras formas podem ser descartadas pelo simples fato de que as projeções de C sobre os planos xz e yz não são injetivas. A forma restante teria que coincidir, em uma vizinhança do $(0, 0, 0)$, com $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$. Mas isso é impossível, já que $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$ não é diferenciável em $(0, 0)$.

Exemplo 6. Uma parametrização para o toro T do Exemplo 4 pode ser dada por (Fig. 2.9)

$$\mathbf{x}(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u),$$

onde $0 < u < 2\pi$, $0 < v < 2\pi$.

A condição 1 da Def. 1 é facilmente verificada, a verificação da condição 3 reduz-se a um simples cálculo, que deixamos como exercício. Como sabemos que T é uma superfície regular, a condição 2 é equivalente, pela Prop. 4, ao fato de $\mathbf{x}$ ser bijetiva.

Para provar que $\mathbf{x}$ é bijetiva, primeiramente observamos que $\operatorname{sen} u = z/r$; também notamos que, se $\sqrt{x^2+y^2} \leq a$, então $\pi/2 \leq u \leq 3\pi/2$, e se $\sqrt{x^2+y^2} \geq a$, então ou $0 < u \leq \pi/2$ ou $3\pi/2 \leq u \leq 2\pi$. Logo, dado (x, y, z), isto determina u, $0 < u < 2\pi$, de maneira única. Conhecendo u, x e y determinamos $\cos v$ e $\operatorname{sen} v$. Isto determina v de maneira única, $0 < v < 2\pi$. Concluímos assim que $\mathbf{x}$ é bijetiva.

É fácil ver que o toro pode ser coberto por três destas vizinhanças coordenadas.

Exercícios *

1. Mostre que o cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular, e encontre parametrizações cujas vizinhanças coordenadas cubram o cilindro.

2. O conjunto $\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0 \text{ e } x^2+y^2 \leq 1\}$ é uma superfície regular? O conjunto $\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0 \text{ e } x^2+y^2 < 1\}$ é uma superfície regular?

3. Mostre que o cone de duas folhas, com o vértice na origem, isto é, o conjunto $\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$, não é uma superfície regular.

4. Seja $f(x, y, z) = z^2$. Prove que 0 não é um valor regular de f, mas ainda assim $f^{-1}(0)$ é uma superfície regular.

*5. Seja $P = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3;\ x = y\}$ (um plano) e seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u + v, u + v, uv),$$

---

* Os leitores que tenham omitido as demonstrações desta seção devem também omitir os Exercícios 17-19.

onde $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u > v\}$. Evidentemente, $\mathbf{x}(U) \subset P$. Será que $\mathbf{x}$ é uma parametrização de P?

6. Apresente uma outra demonstração para a Prop.1, aplicando a Prop.2 a $h(x,y,z) = f(x,y) - z$.

7. Seja $f(x,y,z) = (x+y+z-1)^2$.

- **a.** Localize os pontos críticos e os valores críticos de f.
- **b.** Para quais valores de c o conjunto $f(x,y,z) = c$ é uma superfície regular?
- **c.** Responda às questões dos itens **a** e **b** para a função $f(x,y,z) = xyz^2$.

8. Seja $\mathbf{x}(u,v)$ como na Def. 1. Verifique que $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva se e somente se

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq \mathbf{0}.$$

9. Seja V um conjunto aberto do plano xy. Mostre que o conjunto

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0 \text{ e } (x,y) \in V\}$$

é uma superfície regular.

10. Seja C a "figura 8" no plano xy e seja S a superfície cilíndrica sobre C (Fig. 2.11); isto é,

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in C\}.$$

O conjunto S é uma superfície regular?

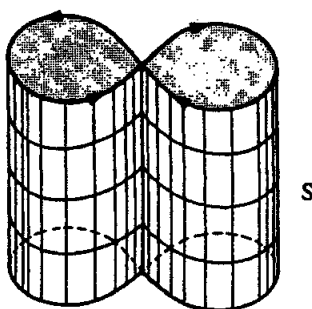



Figura 2-11

11. Mostre que o conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x^2 - y^2\}$ é uma superfície regular, e verifique que as aplicações nos itens **a** e **b** são parametrizações de S :

a. $\mathbf{x}(u, v) = (u + v, u - v, 4uv),\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

***b.** $\mathbf{x}(u, v) = (u \cosh v, u \operatorname{senh} v, u^2),\ (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ u \neq 0$.

Quais partes de S são cobertas por estas parametrizações?

12. Mostre que $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \operatorname{sen} u \cos v, b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c \cos u) \qquad a, b, c \neq 0,$$

onde $0 < u < \pi$, $0 < v < 2\pi$, é uma parametrização do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Descreva geometricamente as curvas $u = const.$ sobre o elipsóide.

***13.** Encontre uma parametrização para o hiperbolóide de duas folhas $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$.

14. Considere uma semi-reta $[0, \infty)$, perpendicular a uma reta E, girando em torno de E a partir de uma dada posição inicial, enquanto a origem 0 da semi-reta percorre a reta E. Suponha um tal movimento de maneira que, quando $[0, \infty)$ tenha girado um ângulo θ, a origem esteja a uma distância $d = sen^2(\theta/2)$ da posição inicial sobre E. Verifique que, ao removermos a reta E da figura obtida, teremos uma superfície regular. Se o movimento fosse tal que $d = sen(\theta/2)$, o que mais deveria ser removido para obtermos uma superfície regular?

***15.** Considere dois pontos $p(t)$ e $q(t)$ movendo-se com a mesma velocidade (em módulo), com p começando em $(0, 0, 0)$ e movendo-se ao longo do eixo Oz, e q começando em $(a, 0, 0)$, $a \neq 0$, e movendo-se paralelamente ao eixo Oy. Mostre que a reta ligando $p(t)$ a $q(t)$ descreve um conjunto em $\mathbb{R}^3$ dado por $y(x - a) + zx = 0$. Tal conjunto é uma superfície regular?

16. Uma maneira de definir um sistema de coordenadas para a esfera S^2, dada por $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, é considerar a chamada *projeção*

estereográfica $\pi : S^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2$, que leva um ponto $p = (x, y, z)$ da esfera S^2 menos o pólo norte $N = (0, 0, 2)$ sobre o plano xy (Fig. 2.12). Seja $(u, v) = \pi(x, y, z)$, onde $(x, y, z) \in S^2 - \{N\}$ e $(u, v) \in$ plano xy.

a. Mostre que $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2$ é dada por

$$\pi^{-1} \begin{cases} x = \dfrac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \\[2ex] y = \dfrac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \\[2ex] z = \dfrac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4}. \end{cases}$$

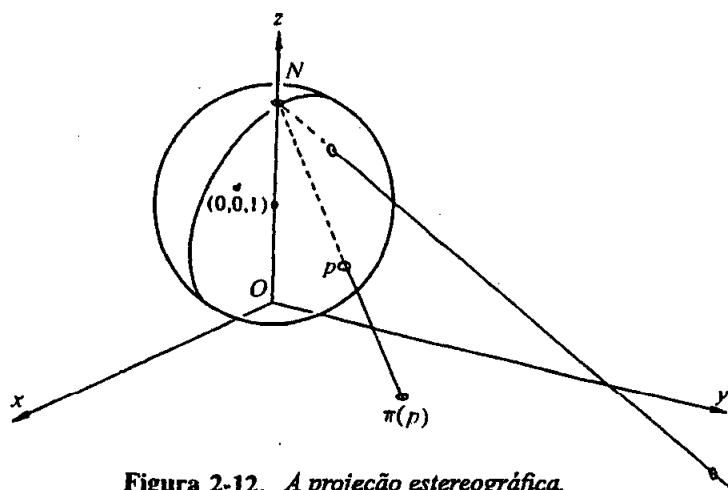



Figura 2-12. *A projeção estereográfica.*

b. Mostre que, utilizando a projeção estereográfica, é possível cobrir a esfera com duas vizinhanças coordenadas.

17. Defina uma curva regular por analogia com a definição de uma superfície regular. Prove que

a. A imagem inversa de um valor regular de uma função diferenciável

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

é uma curva plana regular. Dê um exemplo de uma tal curva que não seja conexa.

b. A imagem inversa de um valor regular de uma aplicação diferenciável

$$F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

é uma curva regular em $\mathbb{R}^3$. Mostre a relação entre esta afirmação e a maneira clássica de definir uma curva em $\mathbb{R}^3$ como a interseção de duas superfícies.

***c.** O conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 = y^3\}$ não é uma curva regular.

18. Suponha que $f(x, y, z) = u = const.$, $g(x, y, z) = v = const.$, $h(x, y, z) = w = const.$ descrevem três famílias de superfícies regulares e admita que, em (x_0, y_0, z_0), o Jacobiano

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \neq 0.$$

Prove que, em uma vizinhança de (x_0, y_0, z_0), as três famílias podem ser descritas por uma aplicação $F(u, v, w) = (x, y, z)$ de um conjunto aberto de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$; onde, por exemplo, uma parametrização local para a superfície da família $f(x, y, z) = u$ é obtida colocando-se $u = const.$ na aplicação F. Determine F para o caso onde as três famílias de superfícies são

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = u = \text{const.}; \quad \text{(esferas com centro em } (0, 0, 0));$$

$$g(x, y, z) = \frac{y}{z} = v = \text{const.}, \quad \text{(planos passando pelo eixo } Oz);$$

$$h(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z^2} = w = \text{const.}, \quad \text{(cones com vértice em } (0, 0, 0)).$$

***19.** Seja $\alpha : (-3, 0) \to \mathbb{R}^2$ definida por (Fig. 2.13)

$$\alpha(t) \begin{cases} = (0, -(t+2)), & \text{se } t \in (-3, -1), \\ = \text{curva parametrizada regular ligando } p{=}(0, -1) \text{ a } q{=} \left(\dfrac{1}{\pi}, 0\right), \\ \quad \text{se } t \in \left(-1, -\dfrac{1}{\pi}\right), \\ = \left(-t, sen(\dfrac{1}{t})\right), & \text{se } t \in \left(-\dfrac{1}{\pi}, 0\right). \end{cases}$$

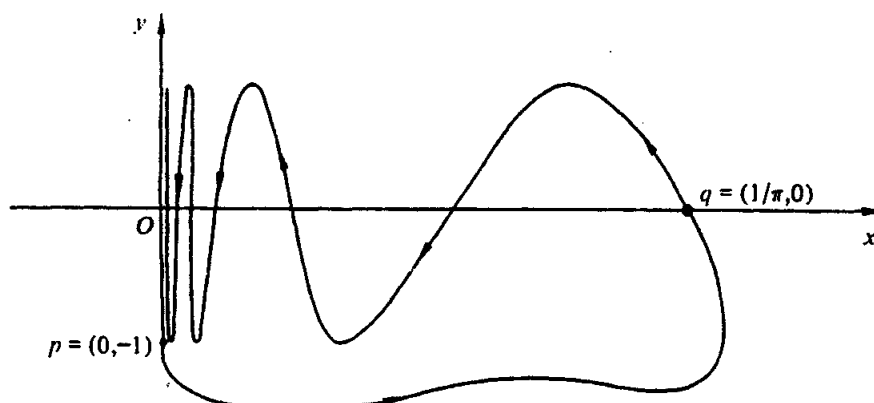



Figura 2-13. *A escala horizontal é distinta da escala vertical.*

É possível definir a curva ligando p a q de forma que todas as derivadas de α sejam contínuas e α não tenha auto-interseções. Seja C o traço de α.

a. C é uma curva regular?

b. Considere as retas normais ao plano $\mathbb{R}^2$ e que passam por C, formando assim um cilindro S. S é uma superfície regular?

2.3 Mudança de Parâmetros; Funções Diferenciáveis sobre Superfícies*

Um dos objetivos da geometria diferencial é o estudo das propriedades de superfícies que dependem do comportamento das superfícies em uma vizinhança de um ponto. A definição de superfície regular, dada na Seção 2.2, é adequada a este estudo. De acordo com essa definição, cada ponto p de uma superfície regular pertence a uma vizinhança coordenada. Os pontos de uma tal vizinhança coordenada são caracterizados pelas suas coordenadas. Assim sendo, deveríamos, em princípio, poder definir as propriedades locais que nos interessam em termos dessas coordenadas.

Por exemplo, é importante que possamos definir o que significa uma função $f : S \to \mathbb{R}$ ser diferenciável em um ponto p de uma superfície regular S.

* As demonstrações desta Seção podem ser omitidas em uma primeira leitura.

Uma maneira natural para dar sentido a este conceito seria escolher uma vizinhança coordenada de p, digamos com coordenadas u, v, e dizer que f é diferenciável em p se a sua expressão em coordenadas u, v possuir derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

No entanto, um ponto p de S pode pertencer a várias vizinhanças coordenadas (na esfera considerada no Exemplo 1 da seção 2.2, todo ponto do interior do primeiro octante pertence a três das vizinhanças coordenadas consideradas). Além disso, outros sistemas de coordenadas poderiam ter sido escolhidos em uma vizinhança de p (os pontos da esfera poderiam também ser parametrizados por coordenadas geográficas ou pela projeção estereográfica; cf. Exercício 16, seção 2.2). Para que a definição acima faça sentido, é necessário que ela não dependa do sistema de coordenadas escolhido. Em outras palavras, precisa-se mostrar que quando um ponto pertence a duas vizinhanças coordenadas, com parâmetros (u, v) e (ξ, η), é possível passar de um destes pares de coordenadas ao outro através de uma aplicação diferenciável.

A proposição seguinte mostra que isso de fato acontece.

Proposição 1. (Mudança de Parâmetros). *Seja p um ponto de uma superfície regular S, e sejam $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ e $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ duas parametrizações de S, tais que $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$. Então a "mudança" de coordenadas $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W)$ (Fig.2.14) é um difeomorfismo; isto é, h é diferenciável e tem uma inversa diferenciável h^{-1}.*

Em outras palavras, se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \qquad (u, v) \in U, \\ \mathbf{y}(\xi, \eta) &= (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)), \qquad (\xi, \eta) \in V, \end{aligned}$$

então a mudança de coordenadas h, dada por

$$u = u(\xi, \eta), \qquad v = v(\xi, \eta), \qquad (\xi, \eta) \in \mathbf{y}^{-1}(W),$$

é tal que as funções u e v têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Além disso, a aplicação h pode ser invertida, fornecendo

$$\xi = \xi(u, v), \qquad \eta = \eta(u, v), \qquad (u, v) \in \mathbf{x}^{-1}(W),$$

onde as funções ξ e η também possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Como

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} = 1,$$

isto implica que os determinantes Jacobianos, tanto de h como de h^{-1}, são diferentes de zero em todos os pontos.

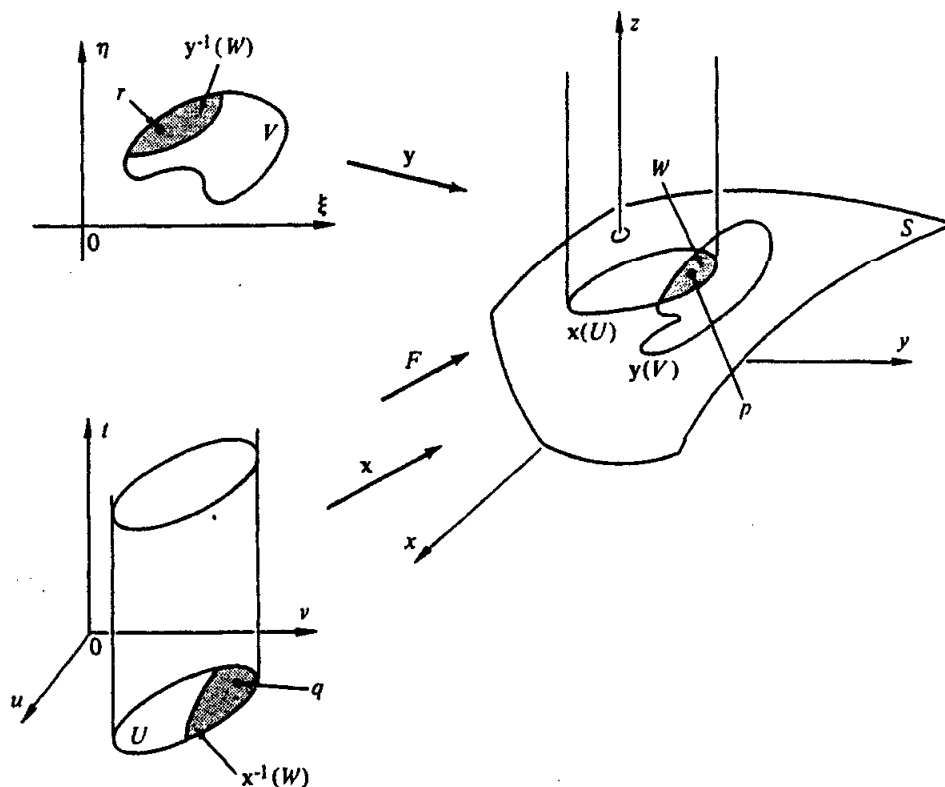



Figura 2-14

Demonstração da Prop. 1. A aplicação $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$, sendo a composição de homeomorfismos, é um homeomorfismo (cf. apêndice ao Capítulo 2, Prop. 3). Não é possível concluir, por um argumento análogo, que h é diferenciável, já que $\mathbf{x}^{-1}$ está definida em um subconjunto aberto de S, e não sabemos ainda o que vem a ser uma função diferenciável definida em S.

Procedemos da seguinte maneira. Seja $r \in \mathbf{y}^{-1}(W)$ e defina $q = h(r)$. Como $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ é uma parametrização, podemos supor, renomeando os eixos caso necessário, que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0.$$

Estendemos $\mathbf{x}$ a uma aplicação $F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(u,v,t) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v) + t) \qquad (u,v) \in U, \; t \in \mathbb{R}.$$

Geometricamente, F aplica um cilindro vertical C sobre U em um "cilindro vertical" sobre $\mathbf{x}(U)$, levando cada seção de C com altura t na superfície $\mathbf{x}(u,v) + te_3$, onde e_3 é um vetor unitário do eixo Oz (Fig. 2.14).

É claro que F é diferenciável e que a restrição $F\,|U \times \{0\} = \mathbf{x}$. Calculando o determinante da diferencial dF_q, obtemos

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0.$$

Podemos então aplicar o teorema da função inversa, que garante a existência de uma vizinhança M de $\mathbf{x}(q)$ em $\mathbb{R}^3$ tal que F^{-1} existe e é diferenciável em M.

Pela continuidade de $\mathbf{y}$, existe uma vizinhança N de r em V tal que $\mathbf{y}(N) \subset M$ (apêndice ao Capítulo 2, Prop. 2). Observe que, restrita a N, $h\,|N = F^{-1} \circ \mathbf{y}\,|N$ é a composição de aplicações diferenciáveis. Assim sendo, podemos aplicar a regra da cadeia para aplicações (apêndice ao Capítulo 2, Prop. 8) e concluir que h é diferenciável em r. Como r é arbitrário, h é diferenciável em $\mathbf{y}^{-1}(W)$.

Aplicando exatamente o mesmo argumento, pode-se mostrar que a aplicação h^{-1} é diferenciável, e portanto h é um difeomorfismo.

Q.E.D.

Daremos agora uma definição explícita do que se entende por função diferenciável em uma superfície regular.

DEFINIÇÃO 1. *Seja $f : V \subset S \to \mathbb{R}$ uma função, definida em um subconjunto aberto V de uma superfície regular S. Então f é* diferenciável *em $p \in V$ se, para alguma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, com $p \in \mathbf{x}(U) \subset V$, a composição $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é* diferenciável *em $\mathbf{x}^{-1}(p)$. A função f é diferenciável em V se é diferenciável em todos os pontos de V.*

Como consequência imediata da proposição anterior, segue que a definição dada acima não depende da escolha da parametrização $\mathbf{x}$. De fato, se $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ é uma outra parametrização, com $p \in \mathbf{y}(V)$, e se $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$, então $f \circ \mathbf{y} = f \circ \mathbf{x} \circ h$ também é diferenciável. Daí, a independência afirmada.

Observação 1. Frequentemente, iremos cometer um abuso de notação ao indicarmos f e $f \circ \mathbf{x}$ pelo mesmo símbolo $f(u,v)$, e diremos que $f(u,v)$ é a *expressão* de f no sistema de coordenadas $\mathbf{x}$. Isso é equivalente a identificar $\mathbf{x}(U)$ com U, e pensar em (u,v), indiferentemente, como um ponto de U e como um ponto de $\mathbf{x}(U)$ com coordenadas (u,v). De agora em diante, utilizaremos abusos de linguagem deste tipo sem maiores comentários.

Exemplo 1. Seja S uma superfície regular e $V \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto tal que $S \subset V$. Seja $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então a restrição de f a S é uma função diferenciável sobre S. De fato, para qualquer $p \in S$ e qualquer parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ em p, a função $f \circ \mathbf{x} : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável. Em particular, temos os seguintes exemplos de funções diferenciáveis:

1. A *função altura* relativa a um vetor unitário $v \in \mathbb{R}^3$, $h : S \to \mathbb{R}$, dada por $h(p) = p \cdot v$, $p \in S$, onde o ponto denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$. $h(p)$ é a altura de $p \in S$ relativa a um plano normal a v e passando pela origem de $\mathbb{R}^3$ (Fig. 2.15).

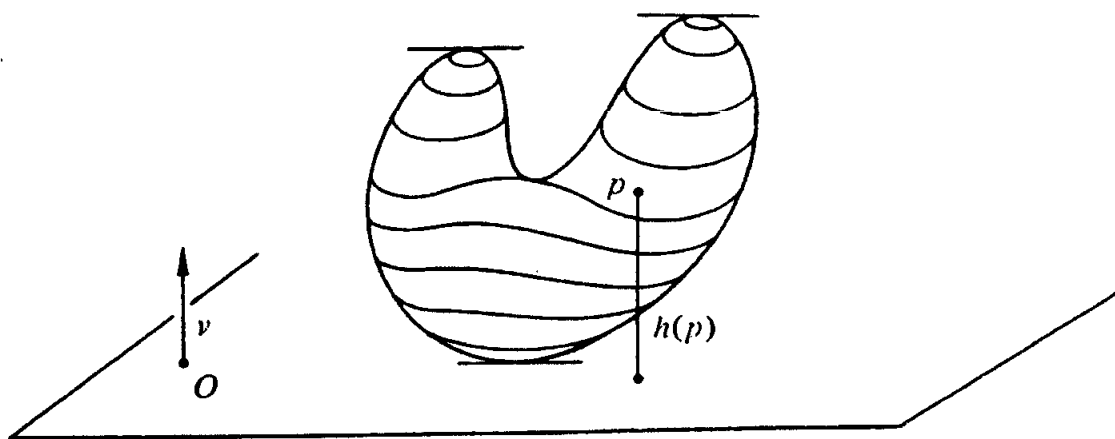



Figura 2-15

2. O quadrado da distância a um ponto fixo $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $f(p) = |p - p_0|^2$, $p \in S$. A necessidade de considerar o quadrado vem do fato da distância $|p - p_0|$ não ser diferenciável em $p = p_0$.

Observação 2. Na demonstração da Prop. 1, utilizamos, de maneira essencial, o fato de que a inversa de uma parametrização é contínua. Como precisamos da Prop.1 para podermos definir funções diferenciáveis em superfícies (um conceito vital), não podemos prescindir desta condição na definição de uma superfície regular (cf. Observação 1 da seção 2.2).

A definição de diferenciabilidade pode ser facilmente estendida a aplicações entre superfícies. Diremos que uma aplicação contínua $\varphi : V_1 \subset S_1 \to S_2$, de um conjunto aberto V_1 de uma superfície regular S_1 em uma superfície regular S_2, é *diferenciável* em $p \in V_1$ se, dadas parametrizações

$$\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1, \qquad \mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2,$$

com $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ e $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$, a aplicação

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \to U_2$$

é diferenciável em $q = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$ (Fig. 2.16).

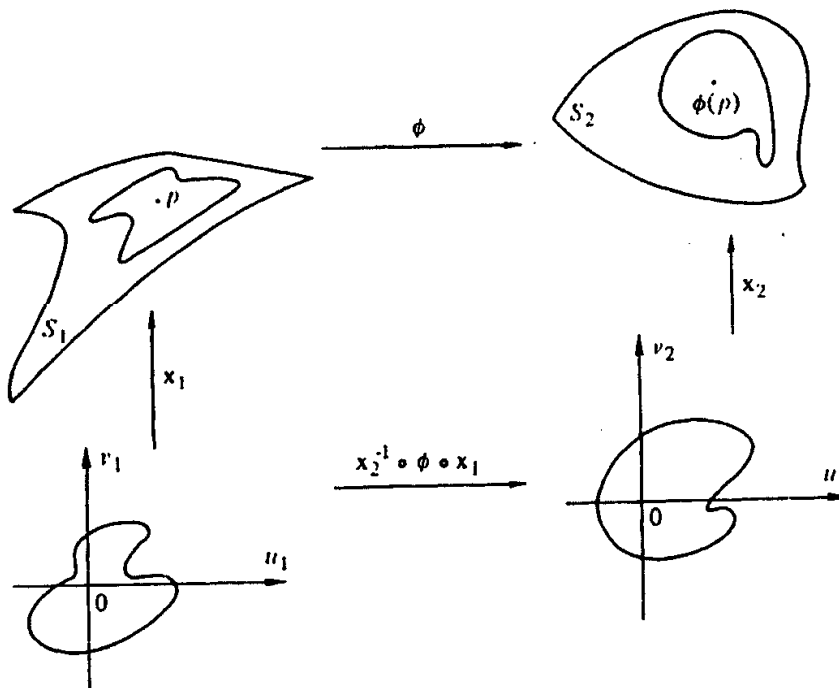



Figura 2-16

Em outras palavras, φ é diferenciável se, quando expressa em coordenadas locais como $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$, as funções φ_1 e φ_2 têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

A demonstração de que esta definição não depende da escolha de uma parametrização será deixada como um exercício.

Convém mencionar que a noção natural de equivalência associada à diferenciabilidade é a noção de difeomorfismo. Duas superfícies regulares S_1 e S_2 são *difeomorfas* se existe uma aplicação diferenciável $\varphi : S_1 \to S_2$ com uma inversa diferenciável $\varphi^{-1} : S_2 \to S_1$. Uma tal φ é chamada um *difeomorfismo* de S_1 em S_2. A noção de difeomorfismo desempenha para as superfícies regulares o mesmo papel que a noção de isomorfismo para os espaços vetoriais; ou o mesmo papel que a noção de congruência para a geometria Euclidiana. Em outra palavras, do ponto de vista da diferenciabilidade, duas superfícies difeomorfas são indistinguíveis.

Exemplo 2. Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ é uma parametrização, $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \to \mathbb{R}^2$ é diferenciável. Com efeito, para qualquer $p \in \mathbf{x}(U)$ e qualquer parametrização $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ em p, temos que $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W)$, onde

$$W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V),$$

é diferenciável. Isso mostra que U e $\mathbf{x}(U)$ são difeomorfos (i.e., toda superfície regular é localmente difeomorfa a um plano) e justifica as identificações feitas na Observação 1.

Exemplo 3. Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares. Suponha que $S_1 \subset V \subset \mathbb{R}^3$, onde V é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^3$, e que $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ seja uma função diferenciável tal que $\varphi(S_1) \subset S_2$. Então a restrição $\varphi|S_1 : S_1 \to S_2$ é uma aplicação diferenciável. De fato, dado $p \in S_1$ e parametrizações $\mathbf{x}_1 : U_1 \to S_1$, $\mathbf{x}_2 : U_2 \to S_2$, com $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ e $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$, temos que a aplicação

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \to U_2$$

é diferenciável. Exibimos abaixo alguns casos particulares deste exemplo geral:

1. Seja S simétrica em relação ao plano xy; isto é, se $(x, y, z) \in S$, então $(x, y, -z) \in S$. A aplicação $\sigma : S \to S$, que leva $p \in S$ no ponto simétrico, é diferenciável. Com efeito, σ é a restrição a S de $\Sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Sigma(x, y, z) = (x, y, -z)$. Tal fato, obviamente, pode ser generalizado para superfícies simétricas em relação a um plano qualquer de $\mathbb{R}^3$.

2. Seja $R_{z,\theta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a rotação de um ângulo θ em torno do eixo Oz, e seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular invariante por essa rotação; i.e., se $p \in S$, $R_{z,\theta}(p) \in S$. Então a restrição $R_{z,\theta} : S \to S$ é uma aplicação diferenciável.

3. Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x,y,z) = (xa, yb, zc)$, onde a, b, e c são números reais diferentes de zero. É evidente que φ é diferenciável, e que a restrição $\varphi|S^2$ é uma aplicação diferenciável da esfera

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

sobre o elipsóide

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

(cf. Exemplo 6 do apêndice ao Capítulo 2).

Observação 3. A proposição 1 implica (cf. Exemplo 2) que a parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ é um difeomeorfismo de U sobre $\mathbf{x}(U)$. Em verdade, podemos agora caracterizar as superfícies regulares como sendo subconjuntos $S \subset \mathbb{R}^3$ que são localmente difeomorfos a $\mathbb{R}^2$; isto é, para cada ponto $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em S, um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e uma aplicação $\mathbf{x} : U \to V$, que é um difeomorfismo. Essa bela caracterização poderia ser tomada como ponto de partida no estudo das superfícies (ver Exercício 13).

A esta altura poderiamos retomar a teoria das curvas, a fim de tratá-las do ponto de vista deste capítulo, i.e., como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Mencionaremos apenas alguns pontos fundamentais, deixando os detalhes aos cuidados do leitor.

O símbolo I indicará um intervalo aberto da reta $\mathbb{R}$. Uma *curva regular* em $\mathbb{R}^3$ é um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ com a seguinte propriedade: Para cada ponto $p \in C$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e um homeomorfismo diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to V \cap C$ tal que a diferencial $d\alpha_t$ é injetiva para cada $t \in I$ (Fig. 2.17).

É possível provar (Exercício 15) que a mudança de parâmetros é dada (como para as superfícies) por um difeomorfismo. A partir desse resultado fundamental, é possível verificar quando uma dada propriedade, obtida através de uma parametrização, independe desta parametrização. Uma tal propriedade será então uma propriedade local do conjunto C.

Figura 2-17. *Uma curva regular.*

?or exemplo, verifica-se que o comprimento de arco, definido no Capítulo 1, dependente da parametrização escolhida (Exercício 15), e é, portanto, uma oriedade do conjunto C. Como sempre é possível parametrizar localmente . curva regular C pelo comprimento de arco, as propriedades (curvatura, ão, etc) determinadas por meio desta parametrização são propriedades is de C. Isso mostra que a teoria local das curvas desenvolvida no Capítulo válida para curvas regulares.

Algumas vezes uma superfície é definida ao deslocarmos uma certa curva lar de uma determinada maneira. Isso ocorre no exemplo seguinte.

mplo 4. (Superfícies de Revolução). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto obtido ao rmos uma curva regular plana C em torno de um eixo no plano que não ntra a curva; vamos considerar o plano xz como o plano da curva e o eixo como o eixo de rotação. Seja

$$x = f(v), \qquad z = g(v), \qquad a < v < b, \qquad f(v) > 0,$$

. parametrização para C e denote por u o ângulo de rotação em torno do Oz. Assim, obtemos a aplicação

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\operatorname{sen} u, g(v))$$

onjunto aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$ em S (Fig. 2.18).

do eixo Oz,
rotação; i.e.,
na aplicação

a, b, e c são
ciável, e que

ametrização
de, podemos
ntos $S \subset \mathbb{R}^3$
$\in S$, existe
na aplicação
poderia ser
rcício 13).

tratá-las do
ncionaremos
cuidados do

urva regular
Para cada
eomorfismo
a para cada

tros é dada
se resultado
tida através
propriedade

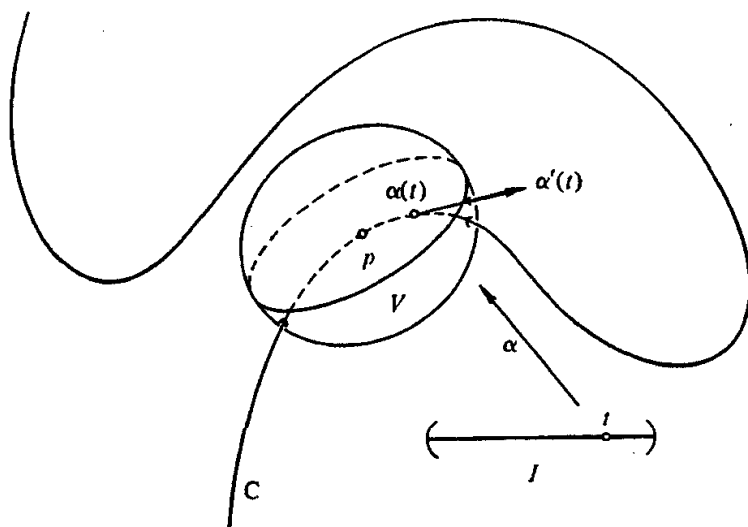



Figura 2-17. *Uma curva regular.*

Por exemplo, verifica-se que o comprimento de arco, definid
é independente da parametrização escolhida (Exercício 15), e é
propriedade do conjunto C. Como sempre é possível parametr
uma curva regular C pelo comprimento de arco, as proprieda
torção, etc) determinadas por meio desta parametrização sã
locais de C. Isso mostra que a teoria local das curvas desenvolv
1 é válida para curvas regulares.

Algumas vezes uma superfície é definida ao deslocarmos u
regular de uma determinada maneira. Isso ocorre no exemplo

Exemplo 4. (Superfícies de Revolução). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o con
girarmos uma curva regular plana C em torno de um eixo no
encontra a curva; vamos considerar o plano xz como o plano d
Oz como o eixo de rotação. Seja

$$x = f(v), \qquad z = g(v), \qquad a < v < b, \qquad f(v) >$$

uma parametrização para C e denote por u o ângulo de rotaç
eixo Oz. Assim, obtemos a aplicação

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v))$$

do conjunto aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$ e

Figura 2-17. *Uma curva regular.*

Por exemplo, verifica-se que o comprimento de arco, definido no Capítulo 1, é independente da parametrização escolhida (Exercício 15), e é, portanto, uma propriedade do conjunto C. Como sempre é possível parametrizar localmente uma curva regular C pelo comprimento de arco, as propriedades (curvatura, torção, etc) determinadas por meio desta parametrização são propriedades locais de C. Isso mostra que a teoria local das curvas desenvolvida no Capítulo 1 é válida para curvas regulares.

Algumas vezes uma superfície é definida ao deslocarmos uma certa curva regular de uma determinada maneira. Isso ocorre no exemplo seguinte.

Exemplo 4. (Superfícies de Revolução). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana C em torno de um eixo no plano que não encontra a curva; vamos considerar o plano xz como o plano da curva e o eixo Oz como o eixo de rotação. Seja

$$x = f(v), \qquad z = g(v), \qquad a < v < b, \qquad f(v) > 0,$$

uma parametrização para C e denote por u o ângulo de rotação em torno do eixo Oz. Assim, obtemos a aplicação

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\,\mathrm{sen}\,u, g(v))$$

do conjunto aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < u < 2\pi,\ a < v < b\}$ em S (Fig. 2.18).

Veremos em breve que x satisfaz as condições para uma parametrização na definição de uma superfície regular. Como S pode ser inteiramente coberta por parametrizações similares, segue-se que S é uma superfície regular, chamada *superfície de revolução*. A curva C é chamada *curva geratriz* de S, e o eixo Oz é o *eixo de rotação* de S. Os círculos descritos pelos pontos de C são chamados de *paralelos de* S, e as várias posições de C sobre S são os chamados *meridianos* de S.

Para mostrar que x é uma parametrização de S precisamos verificar as condições 1, 2 e 3 da Def. 1, Seção 2.2. As condições 1 e 3 não apresentam dificuldades, e deixamos a verificação a cargo do leitor. Para mostrar que x é um homeomorfismo, mostraremos primeiro que x é injetiva. De fato, como $(f(v), g(v))$ é uma parametrização de C, dados z e $x^2 + y^2 = (f(v))^2$, podemos determinar v de maneira única. Daí, x é injetiva.

Observamos que, novamente por $(f(v), g(v))$ ser uma parametrização de C, v é uma função contínua de z e de $\sqrt{x^2 + y^2}$, e consequentemente, uma função contínua de (x, y, z).

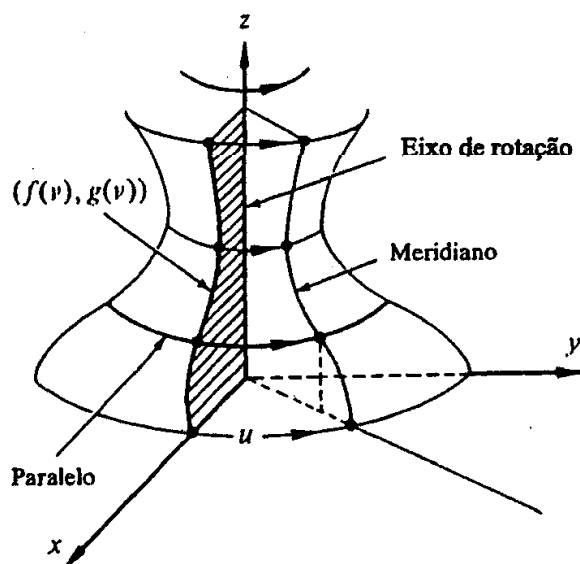



Figura 2-18. *Uma superfície de revolução.*

Para provar que $\mathbf{x}^{-1}$ é contínua, resta mostrar que u é uma função contínua de (x, y, z). Para ver isso, primeiro observamos que se $u \neq \pi$, obtemos, já que

$f(v) \neq 0$,

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{2\cos^2\frac{u}{2}} = \frac{\operatorname{sen} u}{1+\cos u}$$
$$= \frac{\frac{y}{f(v)}}{1+\frac{x}{f(v)}} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}};$$

daí,

$$u = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Assim, se $u \neq \pi$, u é uma função contínua de (x, y, z). Pelo mesmo argumento, se u está em um pequeno intervalo em torno de π, obtemos que

$$u = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{-x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

Portanto, u é uma função contínua de (x, y, z). Isso mostra que $\mathbf{x}^{-1}$ é contínua e finaliza a verificação.

Observação 4. Há um pequeno problema com a nossa definição de superfície de revolução. Se $C \subset \mathbb{R}^2$ é uma curva regular fechada e plana, que é simétrica em relação a um eixo r de $\mathbb{R}^3$, então, girando C em torno de r, obtemos uma superfície. Pode-se mostrar que essa superfície é regular, e caberia chamá-la uma superfície de revolução (quando C é um círculo e r contém um diâmetro de C, a superfície é uma esfera). Para incluí-la em nossa definição, teríamos que excluir dois de seus pontos, a saber, os pontos onde r encontra C. Por razões técnicas, queremos manter a terminologia prévia e iremos chamar as superfícies acima de *superfícies de revolução estendidas.*

Convém fazer um comentário final sobre a nossa definição de superfície. Escolhemos definir uma superfície (regular) como um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Se queremos considerar tanto propriedades globais, como propriedades locais, das superfícies, esta é a maneira adequada. O leitor pode, entretanto, ter se colocado a questão de por que não definimos uma superfície simplesmente como

uma superfície parametrizada, como no caso das curvas. Isso pode ser feito, e de fato, parte considerável da literatura clássica em geometria diferencial é apresentada dessa maneira. Não há nenhum problema sério com esse ponto de vista, desde que apenas questões locais sejam consideradas. Por outro lado, conceitos globais básicos, como a orientação (tratada na seções 2.6 e 3.1), teriam que ser omitidos, ou tratados inadequadamente.

Em todo caso, a noção de superfície parametrizada é por vezes útil e deve ser incluída aqui.

DEFINIÇÃO 2. *Uma* superfície parametrizada $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *é uma aplicação diferenciável* $\mathbf{x}$ *de um conjunto aberto* $U \subset \mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}^3$. *O conjunto* $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ *é chamado o* traço *de* $\mathbf{x}$. $\mathbf{x}$ *é* regular *se a diferencial* $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *é injetiva para todo* $q \in U$ *(i.e. os vetores* $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ *são linearmente independentes para todo* $q \in U$*). Um ponto* $p \in U$ *onde* $d\mathbf{x}_p$ *não é injetiva é chamado um* ponto singular *de* $\mathbf{x}$.

Observe que uma superfície parametrizada, mesmo quando é regular, pode ter um traço com auto-interseções.

Exemplo 5. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular. Defina

$$\mathbf{x}(t,v) = \alpha(t) + v\alpha'(t), \qquad (t,v) \in I \times \mathbb{R}.$$

$\mathbf{x}$ é uma superfície parametrizada chamada *superfície tangente* de α (Fig. 2.19).

Suponha agora que a curvatura $k(t)$, $t \in I$, de α não se anula para todo $t \in I$, e restrinja o domínio de $\mathbf{x}$ a $U = \{(t,v) \in I \times \mathbb{R};\ v \neq 0\}$. Então

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \alpha'(t) + v\alpha''(t), \qquad , \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \alpha'(t),$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = v\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \neq 0, \qquad (t,v) \in U,$$

pois, para todo t, a curvatura (cf. Exercício 12 da seção 1.5)

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}$$

não se anula. Segue que a restrição $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada regular, cujo traço consiste em duas componentes conexas, tendo como fronteira comum o conjunto $\alpha(I)$.

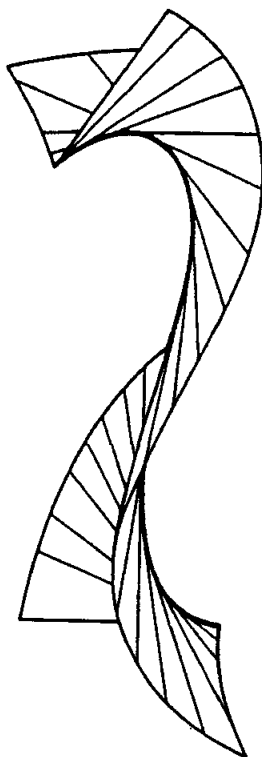



Figura 2-19. *A superfície tangente.*

A proposição seguinte mostra que podemos estender os conceitos e propriedades locais da geometria diferencial a superfícies parametrizadas regulares.

Proposição 2. *Seja* $\mathbf{x}: U \to \mathbb{R}^3$ *uma superfície regular parametrizada e seja* $q \in U$. *Então existe uma vizinhança* V *de* q *em* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $\mathbf{x}(V) \subset \mathbb{R}^3$ *é uma superfície regular.*

Demonstração. Isso é novamente uma consequência do teorema da função inversa. Escreva

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Pela regularidade, podemos supor que $(\partial(x,y)/\partial(u,v))(q) \neq 0$. Defina a aplicação $F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ por

$$F(u,v,t) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)+t), \qquad (u,v) \in U,\ t \in R.$$

Então

$$\det(dF_q) = (\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})(q) \neq 0.$$

Pelo teorema da função inversa, existem vizinhanças W_1 de q e W_2 de $F(q)$ tais que $F : W_1 \to W_2$ é um difeomorfismo. Seja $V = W_1 \cap U$ e observe que a restrição $F|V = \mathrm{x}|V$. Assim, $\mathrm{x}(V)$ é difeomorfo a V e, portanto, uma superfície regular.

Q.E.D.

Exercícios*

*1. Seja $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ a esfera unitária e seja $A : S^2 \to S^2$ a aplicação antípoda $A(x,y,z) = (-x,-y,-z)$. Mostre que A é um difeomorfismo.

2. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\pi : S \to \mathbb{R}^2$ a aplicação que leva cada $p \in S$ em sua projeção ortogonal sobre $\mathbb{R}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$. A aplicação π é diferenciável?

3. Mostre que o parabolóide $z = x^2 + y^2$ é difeomorfo a um plano.

4. Construa um difeomorfismo entre o elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

*5. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, e seja $d : S \to \mathbb{R}$ dada por $d(p) = |p - p_0|$, onde $p \in S$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $p_0 \notin S$; isto é, d é a distância de p a um ponto fixo p_0 que não está em S. Prove que d é diferenciável.

6. Prove que a definição de aplicação diferenciável entre superfícies não depende da escolha de parametrizações.

7. Prove que a relação " S_1 é difeomorfa a S_2" é uma relação de equivalência no conjunto de superfícies regulares.

* Os leitores que tenham omitido as demonstrações dessa seção devem também omitir os exercícios 13-16.

*8. Sejam $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=1\}$ e $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2-z^2=1\}$. Denote por $N=(0,0,1)$ e $S=(0,0,-1)$, respectivamente, os pólos norte e sul, e considere $F: S^2 - \{N\} \cup \{S\} \to H$ definida da seguinte maneira: Para cada $p \in S^2 - \{N\} \cup \{S\}$, seja q o ponto de interseção entre a perpendicular ao eixo Oz que passa por p, e o eixo Oz. Considere a semi-reta l começando em q e contendo p. Então $\{F(p)\} = l \cap H$ (Fig.2.20). Prove que F é diferenciável.

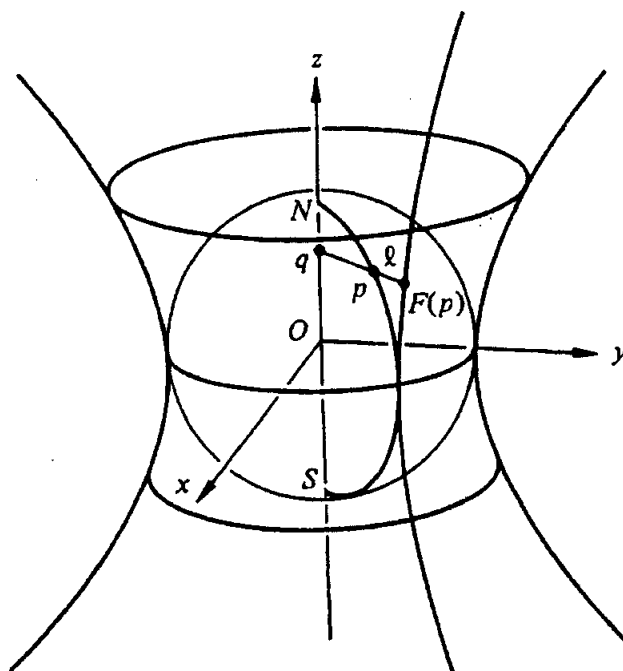



Figura 2-20

9. a. Defina a noção de função diferenciável em uma curva regular. O que é preciso provar para que a definição faça sentido? Não prove agora. Você será convidado a fazê-lo no Exercício 15, caso não tenha omitido as provas desta seção.

b. Mostre que a aplicação $E : \mathbb{R} \to S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$ dada por

$$E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \qquad t \in R,$$

é diferenciável (geometricamente, E "enrola" $\mathbb{R}$ em torno de S^1).

10. Seja C uma curva regular plana situada em um dos semi-planos (fechados) definidos por uma reta r, e que encontra r nos pontos p e q (Fig. 2.21). Quais as condições que devem ser satisfeitas por C para garantir que a rotação de C em torno de r gere uma superfície (regular) de revolução estendida?

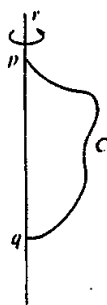



Figura 2-21

11. Prove que as rotações de uma superfície de revolução S em torno de seu eixo são difeomorfismos de S.

12. Superfícies parametrizadas fornecem uma maneira conveniente para descrever conjuntos Σ que são superfícies regulares exceto para um número finito de pontos e um número finito de retas. Por exemplo, seja C o traço de uma curva parametrizada regular $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ que não passa pela origem $O = (0, 0, 0)$. Seja Σ o conjunto gerado pelo deslocamento de uma reta l passando por um ponto móvel $p \in C$ e o ponto fixo O (um cone com vértice em O; ver Fig. 2.22).

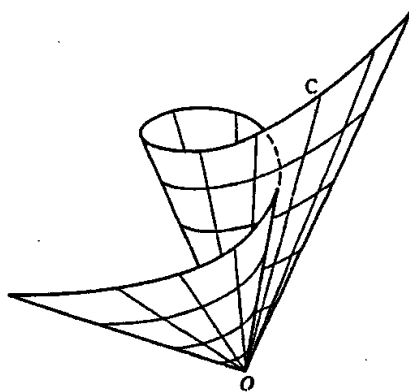



Figura 2-22

a. Encontre uma superfície parametrizada x cujo traço seja Σ.

b. Encontre os pontos onde x não é regular.

c. O que deve ser removido de Σ de forma que o conjunto restante seja uma superfície regular?

***13.** Mostre que a definição, dada no texto (Def. 1), de diferenciabilidade de uma função $f : V \subset S \to \mathbb{R}$ é equivalente ao seguinte: f é diferenciável em $p \in V$ se é a restrição a V de uma função diferenciável definida em um conjunto aberto de $\mathbb{R}^3$ contendo p. (Se tivessemos começado com essa definição de diferenciabilidade, poderíamos ter definido uma superfície regular como um conjunto que é localmente difeomorfo ao $\mathbb{R}^2$; ver Observação 3.)

14. Seja $A \subset S$ um subconjunto de uma superfície regular S. Prove que A é uma superfície regular se e somente se A é aberto em S; isto é, $A = U \cap S$, onde U é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^3$.

15. Seja C uma curva regular e sejam $\alpha : I \subset R \to C$, $\beta : J \subset R \to C$ duas parametrizações de C em uma vizinhança de $p \in \alpha(I) \cap \beta(J) = W$. Seja

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : \beta^{-1}(W) \to \alpha^{-1}(W)$$

uma mudança de parâmetros. Prove que

a. h é um difeomorfismo.

b. O valor absoluto do comprimento de arco de C em W não depende da parametrização escolhida para definí-lo, isto é,

$$\left| \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\, dt \right| = \left| \int_{\tau_0}^{\tau} |\beta'(\tau)|\, d\tau \right|, \qquad t = h(\tau),\ t \in I,\ \tau \in J.$$

***16.** Considere a identificação entre $\mathbb{R}^2 \simeq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = -1\}$ e o plano complexo $\mathbb{C}$, colocando $(x, y, -1) = x + iy = \zeta \in \mathbb{C}$. seja $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o polinômio complexo

$$P(\zeta) = a_0\zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad a_0 \neq 0,\ a_i \in \mathbb{C},\ i = 0, ..., n.$$

Denote por π_N a projeção estereográfica de $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ do pólo norte $N = (0,0,1)$ sobre $\mathbb{R}^2$. Prove que a aplicação $F: S^2 \to S^2$ dada por

$$\begin{aligned} F(p) &= \pi_N^{-1} \circ P \circ \pi_N(p), \qquad se\ p \in S^2 - \{N\}, \\ F(N) &= N \end{aligned}$$

é diferenciável.

2.4 Plano Tangente; Diferencial de uma Aplicação

Nesta seção, mostraremos que a condição 3 na definição de uma superfície regular S garante que, para cada $p \in S$, o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de S, passando por p, constituem um plano.

Entendemos por *vetor tangente* a S, em um ponto $p \in S$, o vetor tangente $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, com $\alpha(0) = p$.

Proposição 1. *Seja* $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ *uma parametrização de uma superfície regular* S *e seja* $q \in U$. *O subespaço vetorial de dimensão 2,*

$$d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

coincide com o conjunto de vetores tangentes a S *em* $\mathbf{x}(q)$.

Demonstração. Seja w um vetor tangente em $\mathbf{x}(q)$, isto é, seja $w = \alpha'(0)$, onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{x}(U) \subset S$ é diferenciável e $\alpha(0) = \mathbf{x}(q)$. Pelo Exemplo 2 da seção 2.3, a curva $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ é diferenciável. Pela definição de diferencial (Apêndice ao Capítulo 2, Def. 1), temos $d\mathbf{x}_q(\beta'(0)) = w$. Portanto, $w \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ (Fig. 2.23).

Por outro lado, seja $w = d\mathbf{x}_q(v)$, onde $v \in \mathbb{R}^2$. É claro que v é o vetor velocidade da curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ dada por

$$\gamma(t) = tv + q, \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Pela definição de diferencial, $w = \alpha'(0)$, onde $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$. Isso mostra que w é um vetor tangente.

Q.E.D.

Pela proposição acima, o plano $dx_q(\mathbb{R}^2)$, que passa por $x(q) = p$, não depende da parametrização x. Este plano será chamado de *plano tangente* a S em p, e será denotado por T_pS. A escolha de uma parametrização x determina uma base $\{\partial x/\partial u(q), \partial x/\partial v(q)\}$ de T_pS, chamada *base associada* a x. Convém, às vezes, escrever $\partial x/\partial u = x_u$ e $\partial x/\partial v = x_v$.

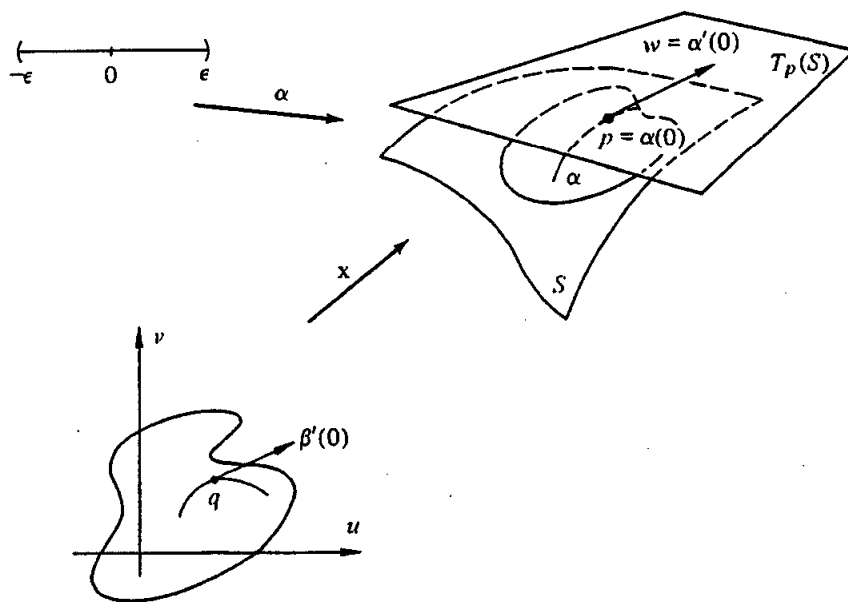



Figura 2-23

As coordenadas de um vetor $w \in T_pS$ na base associada a uma parametriza ção x são determinadas do seguinte modo: w é o vetor velocidade $\alpha'(0)$ de uma curva $\alpha = x \circ \beta$, onde $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ é dada por $\beta(t) = (u(t), v(t))$, com $\beta(0) = q = x^{-1}(p)$. Então,

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(x \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}x(u(t), v(t))(0) \\ &= x_u(q)u'(0) + x_v(q)v'(0) = w. \end{aligned}$$

Assim, na base $\{x_u(q), x_v(q)\}$, w tem coordenadas $(u'(0), v'(0))$, onde $(u(t), v(t))$ é a expressão, na parametrização x, de uma curva cujo vetor velocidade em $t = 0$ é w.

Munidos da noção de plano tangente, podemos falar na diferencial de uma aplicação (diferenciável) entre superfícies. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies regulares e seja $\varphi : V \subset S_1 \to S_2$ uma aplicação diferenciável de um conjunto aberto V de S_1 em S_2. Se $p \in V$, sabemos que todo vetor tangente $w \in T_pS_1$ é o vetor

velocidade $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ com $\alpha(0) = p$. A curva $\beta = \varphi \circ \alpha$ é tal que $\beta(0) = \varphi(p)$, e portanto $\beta'(0)$ é um vetor de $T_{\varphi(p)}S_2$ (Fig.2.24).

Proposição 2. *Na discussão acima, dado w, o vetor $\beta'(0)$ não depende da escolha de α. A aplicação $d\varphi_p : T_pS_1 \to T_{\varphi(p)}S_2$ definida por $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$ é linear.*

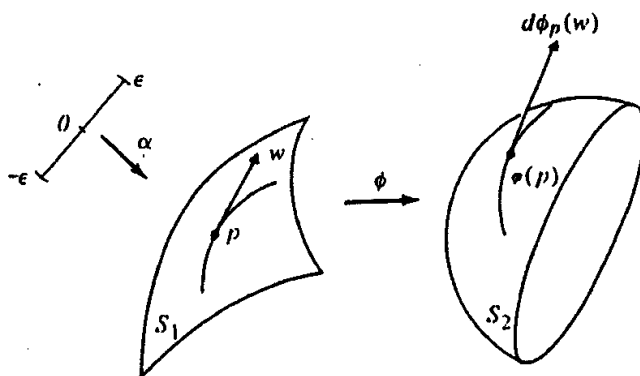



Figura 2-24

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração dada para espaços euclidianos (cf. Prop.7, apêndice ao Capítulo 2). Sejam $\mathbf{x}(u, v)$ e $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ parametrizações em vizinhanças de p e $\varphi(p)$, respectivamente. Suponha que φ seja expressa nestas coordenadas por

$$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$$

e que α seja expressa por

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)), \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Então $\beta(t) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)))$, e a expressão de $\beta'(0)$ na base $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$ é

$$\beta'(0) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}u'(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}v'(0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}u'(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}v'(0)\right).$$

A relação acima mostra que $\beta'(0)$ depende apenas da aplicação φ e das coordenadas $(u'(0), v'(0))$ de w na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. Assim, $\beta'(0)$ é independente

de α. Além disso, a mesma relação mostra que

$$\beta'(0) = d\varphi_p(w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix};$$

isto é, $d\varphi_p$ é uma aplicação linear de T_pS_1 em $T_{\varphi(p)}S_2$, cuja matriz nas bases $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de T_pS_1 e $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$ de $T_{\varphi(p)}S_2$ é justamente a matriz acima. **Q.E.D.**

A aplicação linear $d\varphi_p$ definida pela Prop. 2 é chamada a *diferencial* de φ em $p \in S_1$. De modo análogo, definimos a diferencial de uma função (diferenciável) $f : U \subset S \to \mathbb{R}$ em $p \in U$ como a aplicação linear $df_p : T_pS \to \mathbb{R}$. Deixamos os detalhes a cargo do leitor.

Exemplo 1. Seja $v \in \mathbb{R}^3$ um vetor unitário e seja $h : S \to \mathbb{R}$, $h(p) = v \cdot p$, $p \in S$ a função altura definida no Exemplo 1 da seção 2.3. Para calcular $dh_p(w)$, $w \in T_pS$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Como $h(\alpha(\mathrm{t})) = \alpha(t) \cdot v$, obtemos

$$dh_p(w) = \frac{d}{dt} h(\alpha(t))\,|_{t=0} = \alpha'(0) \cdot v = w \cdot v.$$

Exemplo 2. Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

e seja $R_{z,\theta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a rotação de um ângulo θ em torno do eixo Oz. Então $R_{z,\theta}$ restrita a S^2 é uma aplicação diferenciável de S^2 (cf. Exemplo 3 da seção 2.3). Nós vamos calcular $(dR_{z,\theta})_p(w)$, $p \in S^2$, $w \in T_pS^2$. Seja $\alpha :(-\varepsilon, \varepsilon) \to S^2$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Então, como $R_{z,\theta}$ é linear,

$$(dR_{z,\theta})_p(w) = \frac{d}{dt}(R_{z,\theta} \circ \alpha(t))\,|_{t=0} = R_{z,\theta}(\alpha'(0)) = R_{z,\theta}(w).$$

Observe que $R_{z,\theta}$ deixa o pólo norte $N = (0, 0, 1)$ fixo, e que $(dR_{z,\theta})_N : T_NS^2 \to T_NS^2$ é justamente a rotação de ângulo θ no plano T_NS^2.

Em retrospecto, o que viemos fazendo até agora é estender as noções do cálculo diferencial em $\mathbb{R}^2$ para as superfícies regulares. Como o Cálculo é

essencialmente uma teoria local, definimos uma entidade (superfície regular) que é, localmente, a menos de um difeomorfismo, um plano; com o que esta extensão se tornou natural. Portanto, é de se esperar que o teorema da função inversa, um teorema fundamental, se estenda às aplicações diferenciáveis entre superfícies.

Diremos que uma aplicação $\varphi : U \subset S_1 \to S_2$ é um *difeomorfismo local* em $p \in U$ se existe uma vizinhança $V \subset U$ de p tal que φ restrita a V seja um difeomorfismo sobre um conjunto aberto $\varphi(V) \subset S_2$. Nestes termos, a versão do teorema da função inversa para superfícies é expressa da seguinte maneira.

PROPOSIÇÃO 3. *Se S_1 e S_2 são superfícies regulares e $\varphi : U \subset S_1 \to S_2$ é uma aplicação diferenciável de um conjunto aberto $U \subset S_1$ tal que a diferencial, $d\varphi_p$, de φ em $p \in U$ é um isomorfismo, então φ é um difeomorfismo local em p.*

A demonstração é uma aplicação imediata do teorema da função inversa em $\mathbb{R}^2$, e será deixada como exercício.

É claro que outros conceitos do Cálculo tais como pontos críticos, valores regulares, etc., se estendem naturalmente para aplicações definidas em superfícies regulares.

O plano tangente também nos permite falar do ângulo entre duas superfícies que se intersectam, em um ponto da interseção.

Dado um ponto p em uma superfície regular S, existem dois vetores unitários em $\mathbb{R}^3$ que são normais ao plano tangente T_pS; cada um deles é chamado de *vetor normal unitário* em p. A reta que passa por p e tem a direção dada por um vetor normal unitário em p, é chamada *reta normal* em p. O *ângulo* entre duas superfícies que se intersectam em um ponto p é o ângulo entre os respectivos planos tangentes (ou entre as retas normais) em p (Fig. 2.25).

Uma vez fixada uma parametrização, $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ em $p \in S$, podemos definir a escolha de um vetor normal unitário em cada ponto $q \in \mathbf{x}(U)$, pela seguinte regra

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(q).$$

Assim, obtemos uma aplicação diferenciável $N : \mathbf{x}(U) \to \mathbb{R}^3$. Veremos adiante (seções 2.6 e 3.1) que nem sempre é possível estender essa aplicação, de maneira diferenciável, à superfície S.

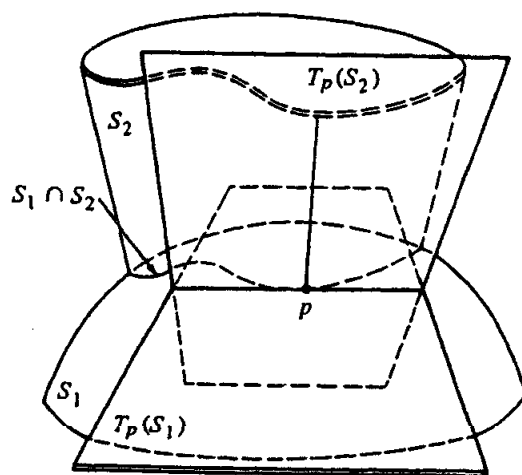



Figura 2-25

Antes de encerrarmos esta seção, faremos algumas observações sobre questões envolvendo a diferenciabilidade.

A definição dada para superfície regular exige que as parametrizações sejam de classe C^∞, isto é, que possuam derivadas parciais contínuas de *todas* as ordens. Para questões em geometria diferencial, em geral, precisamos da existência e continuidade de derivadas parciais até uma certa ordem, que varia com a natureza do problema (raramente precisamos mais do que quatro ordens de derivação).

Por exemplo, a existência e continuidade do plano tangente depende apenas da existência e continuidade das derivadas parciais de primeira ordem. Pode acontecer, portanto, que o gráfico de uma função $z = f(x, y)$ admita um plano tangente em todos os pontos, mas que não seja suficientemente diferenciável para satisfazer a definição de superfície regular. Isto ocorre no exemplo seguinte.

Exemplo 3. Considere o gráfico da função $z = \sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}$, gerado pela rotação da curva $z = x^{4/3}$ em torno do eixo Oz. Como a curva é simétrica em relação ao eixo Oz e tem derivada contínua que se anula na origem, é claro que o gráfico de $z = \sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}$ admite o plano xy como plano tangente na origem. No entanto, a derivada parcial z_{xx} não existe na origem, e o gráfico considerado não é uma superfície regular (ver Prop. 3 da seção 2.2).

Não pretendemos abordar esse tipo de questão. A hipótese C^∞, isto é, de possuir derivadas parciais contínuas de todas as ordens, na definição foi adota-

da precisamente para evitarmos o estudo das condições mínimas de diferenciabilidade, em cada caso particular. Essas nuanças têm o seu lugar, mas podem eventualmente obscurecer a natureza geométrica dos problemas aqui tratados.

Exercícios

***1.** Mostre que a equação do plano tangente em (x_0, y_0, z_0) a uma superfície regular dada por $f(x, y, z) = 0$, onde 0 é um valor regular de f, é

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

2. Determine os planos tangentes a $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ nos pontos $(x, y, 0)$ e mostre que eles são todos paralelos ao eixo Oz.

3. Mostre que a equação do plano tangente a uma superfície que é o gráfico de uma função diferenciável $z = f(x, y)$, em um ponto $p = (x_0, y_0)$, é dada por

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Lembre-se da definição de diferencial df de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, e mostre que o plano tangente é o gráfico da diferencial df_p.

***4.** Mostre que os planos tangentes a uma superfície dada por $z = xf(y/x)$, $x \neq 0$, onde f é uma função diferenciável, passam todos pela origem $(0, 0, 0)$.

5. Se uma vizinhança coordenada de uma superfície regular pode ser parametrizada na forma

$$\mathbf{x}(u, v) = \alpha_1(u) + \alpha_2(v),$$

onde α_1 e α_2 são curvas parametrizadas regulares, mostre que os planos tangentes ao longo de uma curva coordenada fixa desta vizinhança são todos paralelos a uma reta.

6. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular com curvatura diferente de zero em todos os pontos. Considere a superfície tangente a α (Exemplo 5 da seção 2.3)

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t), \qquad t \in I, \ v \neq 0.$$

Mostre que os planos tangentes ao longo da curva $\mathbf{x}(t, const.)$ são todos iguais.

7. Seja $f : S \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = |p - p_0|^2$, onde $p \in S$ e p_0 é um ponto fixo de $\mathbb{R}^3$ (ver Exemplo 1 da seção 2. 3). Mostre que $df_p(w) = 2w \cdot (p - p_0)$, $w \in T_pS$.

8. Prove que se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear e $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular invariante por L, i.e., $L(S) \subset S$, então a restrição $L|S$ é uma aplicação diferenciável e

$$dL_p(w) = L(w), \qquad p \in S, \ w \in T_pS.$$

9. Mostre que a superfície parametrizada

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, au), \qquad a \neq 0,$$

é regular. Calcule o seu vetor normal $N(u, v)$ e mostre que, ao longo da reta coordenada $u = u_0$, o plano tangente de $\mathbf{x}$ gira em torno desta reta de tal modo que a tangente de seu ângulo com o eixo Oz é proporcional ao inverso da distância $v(= \sqrt{x^2 + y^2})$ do ponto $\mathbf{x}(u_0, v)$ ao eixo Oz.

10. (*Superfícies Tubulares*) Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular com curvatura diferente de zero em todos os pontos e parametrizada pelo comprimento de arco. Seja

$$\mathbf{x}(s, v) = \alpha(s) + r(n(s) \cos v + b(s) \operatorname{sen} v),$$
$$r = \text{const.} \neq 0, \ s \in I, \ v \in (0, 2\pi)$$

uma superfície parametrizada (o *tubo* de raio r em torno de α), onde n é o vetor normal e b é o vetor binormal de α. Mostre que, quando $\mathbf{x}$ é regular, o seu vetor normal unitário é dado por

$$N(s, v) = -(n(s) \cos v + b(s) \operatorname{sen} v).$$

11. Mostre que as normais a uma superfície parametrizada dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u)), \qquad f(u) \neq 0, \ g' \neq 0,$$

passam todas pelo eixo Oz.

***12.** Mostre que cada uma das equações $(a, b, c \neq 0)$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= ax, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= by, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= cz \end{aligned}$$

define uma superfície regular e que elas se intersectam ortogonalmente.

13. Um *ponto crítico* de uma função diferenciável $f : S \to \mathbb{R}$ definida em uma superfície regular S é um ponto $p \in S$ tal que $df_p = 0$.

***a.** Seja $f : S \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = |p - p_0|$, $p \in S$, $p_0 \notin S$ (cf. Exercício 5, seção 2.3). Mostre que $p \in S$ é um ponto crítico de f se e somente se a reta ligando p a p_0 é normal a S em p.

b. Seja $h : S \to \mathbb{R}$ dada por $h(p) = p \cdot v$, onde $v \in \mathbb{R}^3$ é um vetor unitário (cf. Exemplo 1, seção 2.3). Mostre que $p \in S$ é um ponto crítico de h se e somente se v é um vetor normal a S em p.

14. Seja Q a união dos três planos coordenados, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Seja $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - Q$.

a. Mostre que a equação em t,

$$\frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} + \frac{z^2}{c-t} \equiv f(t) = 1, \qquad a > b > c > 0,$$

tem três raízes reais distintas: t_1, t_2, t_3.

b. Mostre que para cada $p \in \mathbb{R}^3 - Q$, os conjuntos dados por $f(t_1) - 1 = 0$, $f(t_2) - 1 = 0$ e $f(t_3) - 1 = 0$ são superfícies regulares passando por p, duas a duas ortogonais.

15. Mostre que se todas as normais a uma superfície conexa passam por um ponto fixo, a superfície está contida em uma esfera.

16. Seja w um vetor tangente a uma superfície regular S em um ponto $p \in S$, e sejam $\mathbf{x}(u, v)$ e $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ duas parametrizações em p. Suponha que a expressão de w, nas bases associadas a $\mathbf{x}(u, v)$ e $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$, sejam, respectivamente

$$w = \alpha_1 \mathbf{x}_u + \alpha_2 \mathbf{x}_v$$

e

$$w = \beta_1 \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} + \beta_2 \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}.$$

Mostre que as coordenadas de w estão relacionadas por

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \beta_2 &= \alpha_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial v}, \end{aligned}$$

onde $\bar{u} = \bar{u}(u,v)$ e $\bar{v} = \bar{v}(u,v)$ são as expressões da mudança de coordenadas.

***17.** Duas superfícies regulares S_1 e S_2 intersectam-se *transversalmente* se sempre que $p \in S_1 \cap S_2$ então $T_pS_1 \neq T_pS_2$. Prove que se S_1 e S_2 intersectam-se transversalmente, então $S_1 \cap S_2$ é uma curva regular.

18. Prove que se uma superfície regular S encontra um plano p em um único ponto, então este plano coincide com o plano tangente a S em p.

19. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $P \subset \mathbb{R}^3$ um plano. Se todos os pontos de S estão em um mesmo semi-espaço (fechado) definido por P, prove que P é tangente a S em todos os pontos de $P \cap S$.

***20.** Mostre que as projeções ortogonais do centro $(0,0,0)$ do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sobre os seus planos tangentes constitui uma superfície regular dada por

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2\} - \{0,0,0)\}.$$

***21.** Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em uma superfície regular conexa S. Suponha que $df_p = 0$ para todo $p \in S$. Prove que f é constante em S.

22. Prove que se todas as retas normais a uma superfíce regular conexa S encontram uma reta fixa, então S é (um pedaço de) uma superfície de revolução.

23. Prove que a aplicação $F: S^2 \to S^2$ definida no exercício 16 da seção 2.3 tem apenas um número finito de pontos críticos (ver Exercício 13).

24. (*Regra da Cadeia.*) Mostre que se $\varphi: S_1 \to S_2$ e $\psi: S_2 \to S_3$ são aplicações diferenciáveis, definidas em superfícies regulares, e $p \in S_1$, então

$$d(\psi \circ \varphi)_p = d\psi_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p.$$

25. Prove que se duas curvas regulares C_1 e C_2 de uma superfície regular S são tangentes em um ponto $p \in S$, e se $\varphi: S \to S$ é um difeomorfismo, então $\varphi(C_1)$ e $\varphi(C_2)$ são curvas regulares que são tangentes em $\varphi(p)$.

26. Mostre que se p é um ponto de uma superfície regular S, é possível, com uma escolha conveniente de coordenadas (x, y, z), representar uma vizinhança de p em S na forma $z = f(x, y)$ de modo que $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$. (Isto é equivalente a tomarmos o plano tangente a S em p como o plano xy.)

27. (*Teoria de Contacto.*) Diremos que duas superfícies regulares, S e $\bar{S}$, em $\mathbb{R}^3$, com um ponto p em comum, tem um *contacto de ordem* ≥ 1 em p, se existem parametrizações em p, $\mathbf{x}(u, v)$ de S e $\bar{\mathbf{x}}(u, v)$ de $\bar{S}$, com o mesmo domínio, tais que $\mathbf{x}_u = \bar{\mathbf{x}}_u$ $\mathbf{x}_v = \bar{\mathbf{x}}_v$ em p. Se, além disso, alguma das derivadas de segunda ordem (de $\mathbf{x}$ e $\bar{\mathbf{x}}$) em p são diferentes, diremos que o *contacto tem ordem exatamente igual a 1.* Prove que

a. O plano tangente T_pS de uma superfície regular S em um ponto p tem contacto de ordem ≥ 1 com a superfíce em p.

b. Se um plano tem contacto de ordem ≥ 1 com uma superfície S em p, então esse plano coincide com o plano tangente a S em p.

c. Duas superfícies regulares têm contacto de ordem ≥ 1 se e somente se elas têm um plano tangente em comum em p; i.e., elas são tangentes em p.

d. Se duas superfícies regulares S e $\bar{S}$ de $\mathbb{R}^3$ têm contacto de ordem ≥ 1 em p e se $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$, então as imagens $F(S)$ e $F(\bar{S})$ são superfícies regulares que têm contacto de ordem ≥ 1 em $F(p)$ (isto é, a noção de contacto de ordem ≥ 1 é invariante por difeomorfismos).

e. Se duas superfícies regulares têm contacto de ordem ≥ 1 em p, então $\lim_{t\to 0}(d/r) = 0$, onde d é o comprimento do segmento que é determinado pelas interseções com as superfícies de uma paralela à normal comum, a uma distância r desta normal.

28. **a.** Defina valor regular para uma função diferenciável $f : S \to \mathbb{R}$ em uma superfície regular S.

b. Mostre que a imagem inversa de um valor regular de uma função diferenciável em uma superfície regular S é uma curva regular em S.

2.5 Primeira forma Fundamental; Área

Até aqui, tratamos as superfícies sob o ponto de vista da diferenciabilidade. Nesta seção, começaremos o estudo de outras estruturas geométricas associadas a uma superfície. Talvez a mais importante delas seja a primeira forma fundamental, que passamos a descrever agora.

O produto interno natural do $\mathbb{R}^3 \supset S$, induz em cada plano tangente T_pS de uma superfície regular S um produto interno, que indicaremos por $\langle \ , \ \rangle_p$: Se $w_1, w_2 \in T_pS \subset \mathbb{R}^3$, ent ão $\langle w_1, w_2\rangle_p$ é igual ao produto interno de w_1 e w_2, como vetores em $\mathbb{R}^3$. A esse produto interno, que é uma forma bilinear e simétrica (i.e., $\langle w_1, w_2\rangle_p = \langle w_2, w_1\rangle_p$ e $\langle w_1, w_2\rangle_p$ é linear em w_1 e w_2), corresponde uma forma quadrática $I_p : T_pS \to \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w\rangle_p = |w|^2 \geq 0. \tag{1}$$

DEFINIÇÃO 1. *A forma quadrática I_p em T_pS definida por (1), é chamada a* primeira forma fundamental *da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.*

Portanto, a primeira forma fundamental é meramente a expressão de como a superfície S herda o produto interno natural do $\mathbb{R}^3$. Geometricamente, como veremos em breve, a primeira forma fundamental nos possibilita fazer medidas sobre a superfície (comprimentos de curvas, ângulos de vetores tangentes, áreas de regiões), sem fazer menção ao espaço ambiente $\mathbb{R}^3$, onde está a superfície.

Vamos agora expressar a primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ associada a uma parametrização $\mathbf{x}(u,v)$ em p. Como um vetor tangente

$w \in T_pS$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u'v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

onde os valores das funções envolvidas são calculados em $t = 0$, e

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p, \\ F(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p, \\ G(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p \end{aligned}$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de T_pS. Fazendo p variar na vizinhança coordenada correspondente a $\mathbf{x}(u, v)$, obtemos funções $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$, que são diferenciáveis nessa vizinhança.

De agora em diante, omitiremos o índice p na indicação do produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ ou da forma quadrática I_p, quando for claro pelo contexto a que ponto nos referimos. Convém também denotar o produto interno de $\mathbb{R}^3$ por $\langle\ ,\ \rangle$, em vez do ponto $\cdot$ adotado anteriormente.

Exemplo 1. Um sistema de coordenadas para um plano $P \subset \mathbb{R}^3$ passando por $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e contendo os vetores ortonormais $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$ é dado por:

$$\mathbf{x}(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Para calcular a primeira forma fundamental para um ponto arbitrário de P, observamos que $\mathbf{x}_u = w_1$, $\mathbf{x}_v = w_2$; como w_1 e w_2 são vetores unitários ortogonais, as funçõ es E, F, G são constantes, e dadas por

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = 1.$$

Neste caso trivial, a primeira forma fundamental é essencialmente o teorema de Pitágoras em P; i.e., o quadrado do comprimento de um vetor w, com coordenadas a, b na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, é igual a $a^2 + b^2$.

Exemplo 2. O cilindro reto sobre o círculo $x^2+y^2=1$ admite a parametrização $\mathrm{x}: U \to \mathbb{R}^3$, onde (Fig. 2. 26)

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(u,v) &= (\cos u, \operatorname{sen} u, v), \\ U &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty\}. \end{aligned}$$

Para calular a primeira forma fundamental, notamos que

$$\mathrm{x}_u = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \qquad \mathrm{x}_v = (0,0,1),$$

e portanto

$$E = \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1, \qquad F = 0, \qquad G = 1.$$

Observamos que, embora o cilindro e o plano sejam superfícies distintas, os resultados obtidos nos dois casos são os mesmos. Voltaremos a esse assunto mais adiante (seção 4.2).

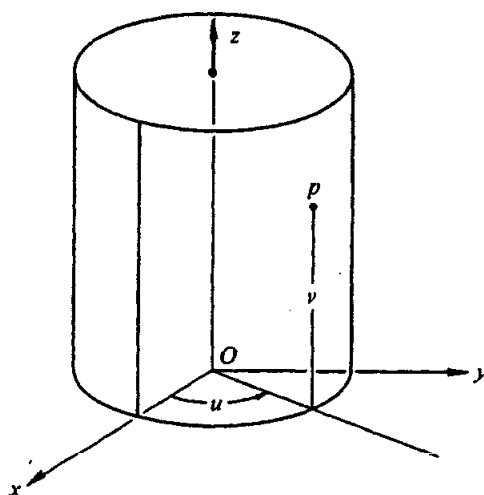



Figura 2-26

Exemplo 3. Considere a hélice que é dada por (ver Exemplo 1, seção 1.2) $(\cos u, \; sen\, u, au)$. Por cada ponto da hélice, trace uma reta paralela ao plano xy e que intersecta o eixo Oz. A superfície gerada por essas retas é chamada um *helicóide.* Uma parametrização do helicóide é dada por:

$$\mathrm{x}(u,v) = (v\cos u, v \operatorname{sen} u, au), \qquad 0 < u < 2\pi, \qquad -\infty < v < \infty.$$

x aplica uma faixa aberta de largura 2π do plano uv sobre a parte do helicóide que corresponde a uma rotação de 2π ao longo da hélice (Fig. 2.27).

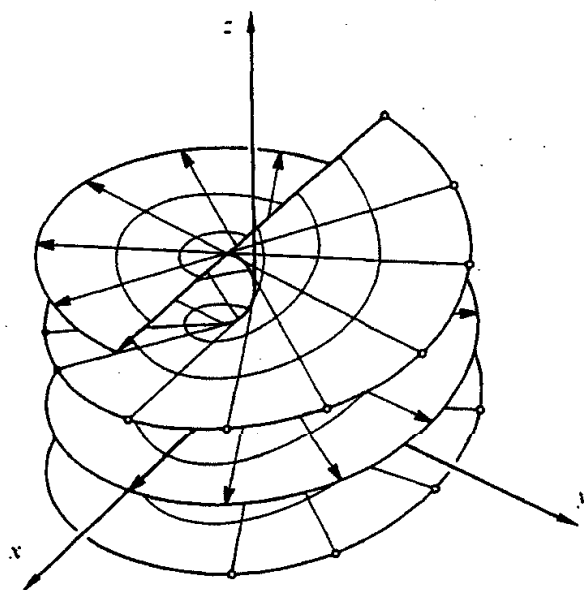



Figura 2-27. *O helicóide.*

A verificação de que o helicóide é uma superfície regular é imediata e fica aos cuidados do leitor.

O cálculo dos coeficientes da primeira forma fundamental nesta parametrização nos dá

$$E(u,v) = v^2 + a^2, \qquad F(u,v) = 0, \qquad G(u,v) = 1.$$

Como mencionamos anteriormente, a importância da primeira forma fundamental I vem do fato de que, conhecendo I, podemos tratar questões métricas sobre uma superfície regular, sem fazer referência ao espaço ambiente $\mathbb{R}^3$. Assim, o comprimento de arco s de uma curva parametrizada $\alpha : I \to S$ é dado por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)|\, dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))}dt.$$

Em particular, se $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ está contida em uma vizinhança coordenada correspondente à parametrização $\mathbf{x}(u,v)$, podemos calcular o comprimento de arco de α entre, digamos, 0 e t por

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}dt. \tag{2}$$

O ângulo θ de duas curvas parametrizadas regulares $\alpha : I \to S$, $\beta : I \to S$ que se intersectam em $t = t_0$ é dado por

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0)\rangle}{|\alpha'(t_0)|\,|\beta'(t_0)|}.$$

Em particular, o ângulo φ das curvas coordenadas de uma parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ é

$$\cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle}{|\mathbf{x}_u|\,|\mathbf{x}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}};$$

decorre daí que *as curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais* se e somente se $F(u, v) = 0$, para todo (u, v). Uma tal parametrização é chamada uma *parametrização ortogonal.*

Observação. Por causa da Eq.(2), muitos matemáticos utilizam o termo "elemento" de comprimento de arco ds de S e escrevem

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2;$$

significando o seguinte: se $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ é uma curva em S e $s = s(t)$ o seu comprimento de arco, então

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Exemplo 4. Vamos calcular a primeira forma fundamental de uma esfera em um ponto da vizinhança coordenada dada pela parametrização (cf. Exemplo 1, seção 2.2)

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta).$$

Primeiro, observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\theta(\theta, \varphi) &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\operatorname{sen}\varphi, -\operatorname{sen}\theta), \\ \mathbf{x}_\varphi(\theta, \varphi) &= (-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(\theta,\varphi) &= \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\theta\rangle = 1\\ F(\theta,\varphi) &= \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\varphi\rangle = 0\\ E(\theta,\varphi) &= \langle \mathbf{x}_\varphi, \mathbf{x}_\varphi\rangle = \operatorname{sen}^2\theta. \end{aligned}$$

Portanto, se w é um vetor tangente à esfera em um ponto $\mathbf{x}(\theta,\varphi)$, dado na base associada a $\mathbf{x}(\theta,\varphi)$ por

$$w = a\mathbf{x}_\theta + b\mathbf{x}_\varphi,$$

então o quadrado do módulo de w é dado por

$$|w|^2 = I(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2 = a^2 + b^2\operatorname{sen}^2\theta.$$

Como aplicação, vamos determinar as curvas nesta vizinhança coordenada da esfera que fazem um ângulo constante β com os meridianos $\varphi = const.$. Estas curvas são chamadas *loxodrômicas* (curvas de rumo) da esfera.

Podemos supor que a curva procurada $\alpha(t)$ é a imagem por $\mathbf{x}$ de uma curva $(\theta(t),\varphi(t))$ do plano $\theta\varphi$. Em um ponto $\mathbf{x}(\theta,\varphi)$ onde a curva encontra o meridiano $\varphi = const.$, temos

$$\cos\beta = \frac{\langle \mathbf{x}_\theta, \alpha'(t)\rangle}{|\mathbf{x}_\theta|\,|\alpha'(t)|} = \frac{\theta'}{\sqrt{(\theta')^2 + (\varphi')^2\operatorname{sen}^2\theta}},$$

pois na base $\{\mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\varphi\}$ o vetor $\alpha'(t)$ tem coordenadas (θ',φ') e o vetor $\mathbf{x}_\theta$ tem coordenadas $(1,0)$. A partir da equação anterior, segue-se que

$$(\theta')^2\tan^2\beta - (\varphi')^2\operatorname{sen}^2\theta = 0$$

ou

$$\frac{\theta'}{\operatorname{sen}\theta} = \pm\frac{\varphi'}{\operatorname{tg}\beta},$$

daí, por integração, obtemos a equação das loxodrômicas

$$\log\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm(\varphi + c)\operatorname{cotg}\varphi,$$

onde a constante de integração c é determinada dando-se um ponto $\mathbf{x}(\theta_0,\varphi_0)$ pelo qual passa a curva.

Uma outra questão métrica que pode ser tratada com a primeira forma fundamental é o cálculo (ou definição) da área de uma região limitada de uma superfície regular S. Um *domínio* (regular) de S é um subconjunto aberto e conexo de S, cuja fronteira é a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável que é regular (isto é, a sua diferencial não se anula) exceto em um número finito de pontos. Uma *região* de S é a união de um domínio com a sua fronteira (Fig. 2. 28). Uma região de $S \subset \mathbb{R}^3$ é *limitada* se está contida em alguma bola de $\mathbb{R}^3$.

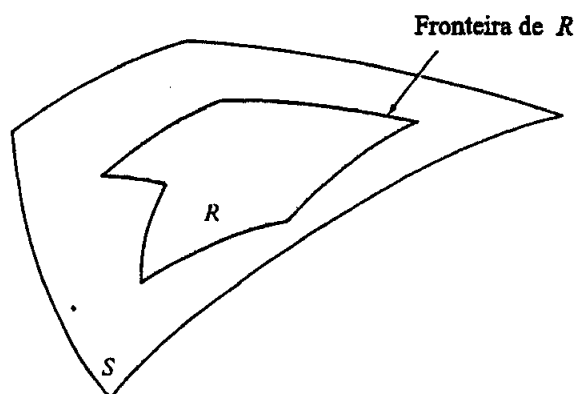



Figura 2-28

Vamos considerar regiões limitadas R que estão contidas em uma vizinhança coordenada $\mathbf{x}(U)$ de uma parametrização $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$. Em outras palavras, R é a imagem por $\mathbf{x}$ de uma região limitada $Q \subset U$.

A função $|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|$, definida em U, representa a área do paralelogramo gerado pelos vetores $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$. Mostraremos primeiro que a integral

$$\iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, du \, dv$$

não depende da parametrização $\mathbf{x}$.

Com efeito, seja $\bar{\mathbf{x}}: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ uma outra parametrização com $R \subset \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$ e defina $\bar{Q} = \bar{\mathbf{x}}^{-1}(R)$. Seja $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}$ o Jacobiano da mudança de coordenadas $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}$. Então

$$\iint_{\bar{Q}} |\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}| \, d\bar{u} \, d\bar{v} = \iint_{\bar{Q}} |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \right| d\bar{u} \, d\bar{v} = \iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, du \, dv,$$

onde a última igualdade vem do teorema de mudança de variáveis para integrais múltiplas. A independência afirmada está portanto provada, e podemos estabelecer a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2. *Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$. O número positivo*

$$\iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, du \, dv = A(R) \qquad Q = \mathbf{x}^{-1}(R),$$

é chamado área *de R.*

Várias justificativas geométricas para uma tal definição podem ser dadas, e uma delas será apresentada na seção 2.8.

Convém notar que

$$|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|^2 + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2 = |\mathbf{x}_u|^2 \, |\mathbf{x}_v|^2,$$

o que mostra que o integrando de $A(R)$ pode ser escrito como

$$|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Também devemos observar que, na maioria dos exemplos, a restrição da região R estar contida em alguma vizinhança coordenada não é muito grave, pois existem vizinhanças coordenadas que cobrem a superfície inteira, exceto por algumas curvas, que não contribuem para a área.

Exemplo 5. Vamos calcular a área do toro do Exemplo 6, seção 2.2. Para isto, consideramos a vizinhança coordenada correspondente à parametrização

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\,\text{sen}\, v, r\,\text{sen}\, u),$$

onde $0 < u < 2\pi$ e $0 < v < 2\pi$, que cobre o toro, exceto por um meridiano e um paralelo. Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = r^2, \qquad F = 0, \qquad G = (r\cos u + a)^2;$$

logo

$$\sqrt{EG - F^2} = r(r\cos u + a).$$

Considere agora a região R_ε, dada pela imagem por x da região Q_ε (Fig. 2.29) dada por ($\varepsilon > 0$ e pequeno),

$$Q_\varepsilon = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; 0+\varepsilon \leq u \leq 2\pi - \varepsilon,\ 0+\varepsilon \leq v \leq 2\pi - \varepsilon\}.$$

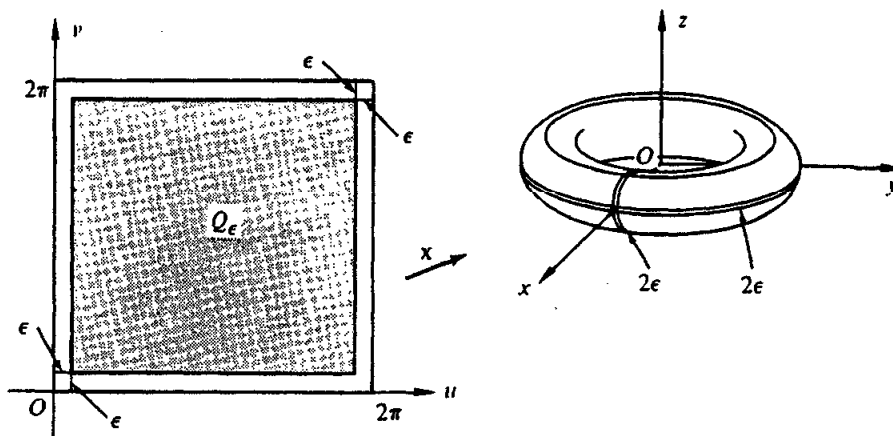



Figura 2-29

Utilizando a Def. 2, obtemos

$$\begin{aligned} A(R_\varepsilon) &= \iint_{Q_\varepsilon} r(r\cos u + a)\, du\, dv \\ &= \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (r^2 \cos u + ra)\, du \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} dv \\ &= r^2(2\pi - 2\varepsilon)(\operatorname{sen}(2\pi-\varepsilon) - \operatorname{sen}\varepsilon) + ra(2\pi - 2\varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ na expressão acima, obtemos

$$A(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} A(R_\varepsilon) = 4\pi^2 ra.$$

O valor acima é o mesmo obtido a partir do Cálculo elementar, digamos, utilizando o teorema de Pappus para a área das superfícies de revolução (cf. Exercício 11).

Exercícios

1. Calcule, para os pontos regulares, a primeira forma fundamental das seguintes superfícies parametrizadas:

a. $\mathbf{x}(u,v) = (a \operatorname{sen} u \cos v, b \operatorname{sen} u \ \operatorname{sen} v, c \cos u)$; elipsóide.
b. $\mathbf{x}(u,v) = (au \cos v, bu \operatorname{sen} v, u^2)$; parabolóide elíptico.
c. $\mathbf{x}(u,v) = (au \cosh v, bu \operatorname{senh} v, u^2)$; parabolóide hiperbólico.
d. $\mathbf{x}(u,v) = (a \operatorname{senh} u \cos v, b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, c \cosh u)$; hiperbolóide de duas folhas.

2. Seja $\mathbf{x}(\varphi,\theta) = (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$ uma parametrização da esfera unitária S^2. Seja P o plano $x = z \operatorname{cotg}\alpha$, $0 < \alpha < \pi$, e β o ângulo agudo que a curva $P \cap S^2$ faz com o semi-meridiano $\varphi = \varphi_0$. Calcule $\cos\beta$.

3. Obtenha a primeira forma fundamental da esfera na parametrização dada pela projeção estereográfica (cf. Exercício 16, seção 2.2).

4. Dada a superfície parametrizada

$$\mathbf{x}(u,v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, \log \cos v + u), \qquad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2},$$

mostre que as duas curvas $\mathbf{x}(u_1, v)$ e $\mathbf{x}(u_2, v)$ determinam segmentos com comprimentos iguais sobre todas as curvas $\mathbf{x}(u, const)$.

5. Mostre que a área A de uma região limitada R da superfície $z = f(x,y)$ é

$$A = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy,$$

onde Q é a projeção ortogonal de R sobre o plano xy.

6. Mostre que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u,v) &= (u \operatorname{sen}\alpha \cos v, u \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} v, u \cos\alpha), \\ 0 &< u < \infty, \qquad 0 < v < 2\pi, \ \alpha = const., \end{aligned}$$

é uma parametrização do cone tendo 2α como ângulo do vértice. Na vizinhança coordenada correspondente, prove que a curva

$$\mathbf{x}(c \exp(v \operatorname{sen}\alpha \operatorname{cotg}\beta), v), \qquad c = const., \ \beta = const.,$$

intersecta as geratrizes do cone ($v = const.$) sob o ângulo constante β.

7. As curvas coordenadas de uma parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ constituem uma *rede de Tchebyshef* se os comprimentos dos lados opostos de qualquer quadrilátero formado por elas são iguais. Mostre que uma condição necessária e suficiente para que isso aconteça é

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

***8.** Prove que sempre que as curvas coordenadas constituem uma rede de Tchebyshef (ver Exercício 7) é possível reparametrizar a vizinhança coordenada de tal maneira que os novos coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = 1, \qquad F = \cos\theta, \qquad G = 1,$$

onde θ é o ângulo formado pelas curvas coordenadas.

***9.** Mostre que uma superfície de revolução sempre pode ser parametrizada de modo que

$$E = E(v), \qquad F = 0, \qquad G = 1.$$

10. Seja $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$ o plano xy e seja $\mathbf{x} : U \to P$ uma parametrização de P dada por

$$\mathbf{x}(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

onde

$$U = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2;\ \rho > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Calcule os coeficientes da primeira forma fundamental de P nesta parametrização.

11. Seja S uma superfície de revolução e C a sua curva geratriz (cf. Exemplo 4, seção 2.3). Seja s o comprimento de arco de C e denote por $\rho = \rho(s)$ a distância do ponto correspondente a s em C ao eixo de rotação.

a. (*Teorema de Pappus.*) Mostre que a área de S é

$$2\rho \int_0^l \pi(s)ds,$$

onde l é o comprimento de C.

b. Aplique a parte **a** para calcular a área de um toro de revolução.

12. Mostre que a área de um tubo de raio r em torno de uma curva α (cf. Exercício 10, seção 2.4) é $2\pi r$ multiplicado pelo comprimento de α.

13. (*Helicóides Generalizados.*) Uma generalização natural, tanto de superfícies de revolução como de helicóides, é obtida da seguinte maneira. Suponha que uma curva plana regular C, que não intersecta uma reta E no plano de C, seja deslocada por um movimento rígido helicoidal em torno de E; isto é, de forma que cada ponto de C descreva uma hélice (ou círculo) tendo E como eixo. O conjunto S gerado pelo deslocamento de C é chamado um *helicóide generalizado com eixo* E *e geratriz* C. Se o movimento helicoidal é uma rotação pura em torno de E, S é uma superfície de revolução; se C é uma reta perpendicular a E, S é um (pedaço do) helicóide canônico (cf. Exemplo 3). Escolha os eixos coordenados de modo que E seja o eixo Oz e C esteja contida no plano yz. Prove que

a. Se $(f(s), g(s))$ é uma parametrização de C pelo comprimento de arco s, $a < s < b$, $f(s) > 0$, então $\mathbf{x} : U \to S$, onde

$$U = \{(s, u) \in \mathbb{R}^2;\ a < s < b, \qquad 0 < u < 2\pi\}$$

e

$$\mathbf{x}(s, u) = (f(s)\cos u, f(s)\operatorname{sen} u, g(s) + cu), \qquad c = const.,$$

é uma parametrização de S. Conclua que S é uma superfície regular.

b. As curvas coordenadas da parametrização acima são ortogonais (i.e. $F = 0$) se e somente se $\mathbf{x}(U)$ é uma superfície de revolução ou um (pedaço do) helicóide canônico.

14. (*Gradiente em Superfícies.*) O *gradiente* de uma função diferenciável $f : S \to \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável $\operatorname{grad} f : S \to \mathbb{R}^3$ que associa a cada ponto $p \in S$ um vetor $\operatorname{grad} f(p) \in T_pS \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$\langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle_p = df_p(v) \qquad \text{para todo } v \in T_pS.$$

Mostre que

a. Se E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental em uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, então $\operatorname{grad} f(p)$ em $\mathbf{x}(U)$ é dado por

$$\operatorname{grad} f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2}\mathbf{x}_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2}\mathbf{x}_v.$$

Em particular, se $S = \mathbb{R}^2$ com coordenadas x, y,

$$\operatorname{grad} f = f_x e_1 + f_y e_2,$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ (*assim, a definição dada coincide com a definição usual do gradiente no plano*).

b. Fixando $p \in S$ e deixando v variar no círculo unitário $|v| = 1$ em T_pS, então $df_p(v)$ é máximo se e somente se $v = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$ (*assim,* $\operatorname{grad} f(p)$ *fornece a direção de variação máxima de* f *em* p).

c. Se $\operatorname{grad} f \neq 0$ em todos os pontos da *curva de nível* $C = \{q \in S;\ f(q) = \textit{const.}\}$, então C é uma curva regular em S e $\operatorname{grad} f$ é normal a C em todos os pontos de C.

15. (*Famílias de Curvas Ortogonais*)

a. Sejam E, F, G os coeficientes da primeira forma fundamental de uma superfície regular S na parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$. Sejam $\varphi(u, v) = \textit{const.}$ e $\psi(u, v) = \textit{const.}$ duas famílias de curvas regulares em $\mathbf{x}(U) \subset S$ (cf. Exercício 28, seção 2.4). Prove que essas duas famílias são ortogonais (i.e., sempre que duas curvas de famílias distintas se intersectam, as suas retas tangentes são ortogonais) se e somente se

$$E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_u = 0.$$

b. Aplique a parte *a* para mostrar que na vizinhança coordenada $\mathbf{x}(U)$ do helicóide do Exemplo 3 as duas famílias de curvas regulares

$$\begin{aligned} v\cos u &= \textit{const.}, \qquad v \neq 0, \\ (v^2 + a^2)\operatorname{sen}^2 u &= \textit{const.}, \qquad v \neq 0, \qquad u \neq \pi, \end{aligned}$$

são ortogonais.

2.6 Orientação de Superfícies*

Nesta seção vamos discutir em que sentido, e quando, é possível orientar uma superfície. Intuitivamente, como cada ponto p de uma superfície regular S tem um plano tangente T_pS, a escolha de uma orientação de T_pS induz uma orientação em uma vizinhança de p, isto é, a noção de movimento positivo ao longo de curvas fechadas suficientemente pequenas em torno de cada ponto da vizinhança (Fig. 2.30). Caso seja possível fazer essa escolha para cada $p \in S$ de forma que na interseção de quaisquer duas vizinhanças as orientações coincidam, então dizemos que S é orientável. Caso contrário, dizemos que S é não-orientável.

Vamos agora precisar essas idéias. Fixada uma parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ de uma vizinhança de um ponto p de uma superfície regular S, determinamos uma orientação do plano tangente T_pS, a saber, a orientação associada à base ordenada $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. Se p pertence a uma vizinhança coordenada de uma outra parametrização $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$, a nova base $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$ é expressa em termos da primeira por

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} &= \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} &= \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \end{aligned}$$

onde $u = u(\bar{u}, \bar{v})$ e $v = v(\bar{u}, \bar{v})$ são as expressões da mudança de coordenadas. As bases $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ e $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$ determinam, portanto, a mesma orientação de T_pS se e somente se o Jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$$

da mudança de coordenadas é positivo.

DEFINIÇÃO 1. *Uma superfície regular S é* orientável *se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em p. A escolha de uma tal família é chamada uma* orientação *de S, e S, neste caso, diz-se* orientada. *Se uma tal escolha não é possível, a superfície é* não-orientável. *Se S é orientada, uma*

* Esta seção pode ser omitida em uma primeira leitura

parametrização (local) x *é* compatível *com a orientação de S se, juntando* x *à família de parametrizações dada pela orientação, obtem-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de S.*

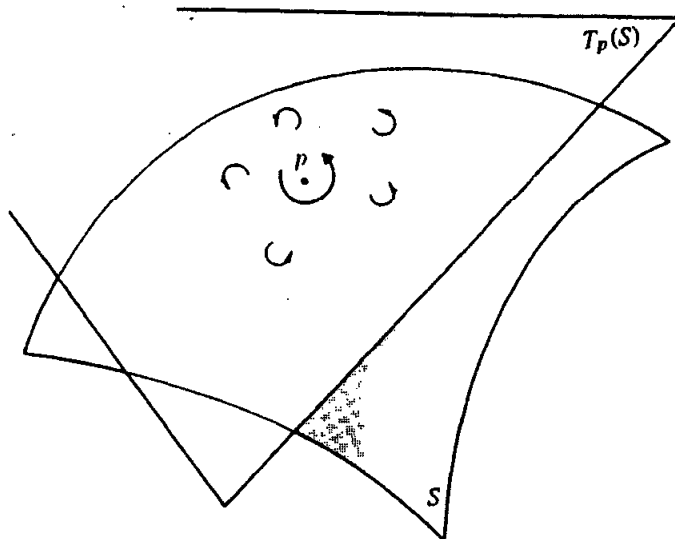



Figura 2-30

Exemplo 1. Uma superfície que é um gráfico de uma função diferenciável (cf. seção 2.2, Prop. 1) é uma superfície orientável. De fato, todas as superfícies que podem ser cobertas por uma única vizinhança coordenada são, trivialmente, orientáveis.

Exemplo 2. A esfera é uma superfície orientável. Em vez de proceder a um cálculo direto, vamos recorrer a um argumento geral. A esfera pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas (utilizando, por exemplo, a projeção estereográfica, ver Exercício 16 da seção 2.2), com parâmetros (u, v) e $(\bar{u}, \bar{v})$, de tal modo que a interseção W dessas vizinhanças (a esfera menos dois pontos) seja um conjunto conexo. Fixe um ponto $p \in W$. Se o Jacobiano da mudança de coordenadas em p for negativo, intercambiamos u e v no primeiro sistema, e assim teremos o Jacobiano positivo. Como o Jacobiano é diferente de zero em W e positivo em $p \in W$, segue-se pela conexão de W que o Jacobiano é positivo em todos os pontos de W. Existe, portanto, uma família de vizinhanças coordenadas satisfazendo a Def. 1, o que mostra que a esfera é orientável.

Pelo argumento que acabamos de usar, é claro que *se uma superfície regular pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas, cuja interseção é conexa, então a superfície é orientável.*

Antes de apresentarmos um exemplo de superfície não-orientável, daremos uma interpretação geométrica da idéia de orientabilidade de uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$

Como vimos na seção 2.4, dado um sistema de coordenadas $\mathbf{x}(u,v)$ em p, fica determinada a escolha de um vetor normal unitário N em p, a saber,

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(p). \tag{1}$$

Escolhendo um outro sistema de coordenadas locais $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u},\bar{v})$ em p, vemos que

$$\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} = (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}, \tag{2}$$

onde $\partial(u,v)/\partial(\bar{u},\bar{v})$ é o Jacobiano da mudança de coordenadas. Portanto, N se conserva ou muda de sinal, conforme $\partial(u,v)\partial(\bar{u},\bar{v})$ seja positivo ou negativo, respectivamente.

Convém chamar de *campo diferenciável de vetores normais* em um aberto $U \subset S$ a uma aplicação diferenciável $N : U \to \mathbb{R}^3$ que associa a cada $q \in U$ um vetor normal unitário $N(q) \in \mathbb{R}^3$ a S em q.

Proposição 1. *Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se e somente se existe um campo diferenciável $N : S \to \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S.*

Demonstração. Se S é orientável, é possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas de tal modo que, na interseção de duas quaisquer delas, a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo. Nos pontos $p = \mathbf{x}(u,v)$ de cada vizinhança coordenada, definimos $N(p) = N(u,v)$ pela Eq. (1). $N(p)$ está bem definido, pois se p pertence a duas vizinhanças coordenadas, com parâmetros (u,v) e $(\bar{u},\bar{v})$, os vetores normais $N(u,v)$ e $N(\bar{u},\bar{v})$ coincidem pela Eq. (2). Além disso, pela Eq. (1), as coordenadas de $N(u,v)$ em $\mathbb{R}^3$ são funções diferenciáveis de (u,v), e portanto, como desejado, a aplicação $N : S \to \mathbb{R}^3$ é diferenciável.

Por outro lado, seja $N : S \to \mathbb{R}^3$ um campo diferenciável de vetores normais em S, e considere uma família de vizinhanças coordenadas *conexas* cobrindo S. Para os pontos $p = \mathbf{x}(u,v)$ de cada vizinhança coordenada $\mathbf{x}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$, é possível, pela continuidade de N e, se necessário, intercambiando u e v, fazer com que

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}.$$

Com efeito, o produto interno

$$\left\langle N(p), \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} \right\rangle = f(p) = \pm 1$$

é uma função contínua em $\mathbf{x}(U)$. Como $\mathbf{x}(U)$ é conexo, o sinal de f é constante. Se $f = -1$, intercambiamos u e v na parametrização, obtendo o afirmado.

Procedendo desse modo com todas as vizinhanças coordenadas, teremos que na interseção de duas quaisquer delas, digamos, $\mathbf{x}(u, v)$ e $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$, o Jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$$

é certamente positivo; caso contrário, teríamos

$$\frac{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}}{|\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}|} = N(p) = -\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = -N(p),$$

o que é uma contradição. Conclui-se então, que a dada família de vizinhanças coordenadas, com eventuais intercâmbios de u e v, satisfaz às condições da Def. 1, o que mostra que S é orientável.

Q.E.D.

Observação. A demonstração anterior mostra que, para S ser orientável, precisamos supor apenas a existência de um campo de vetores unitários *contínuo* em S. Um tal campo de vetores será automaticamente diferenciável.

Exemplo 3. Descreveremos agora um exemplo de uma superfície não-orientável, a chamada *faixa de Möbius.* Essa superfíce é obtida (ver Fig. 2.31) considerando o círculo S^1 dado por $x^2 + y^2 = 4$ e o segmento aberto AB dado no plano yz por $y = 2$, $|z| < 1$. Deslocamos o centro c de AB ao longo de S^1, e giramos AB em torno de c, no plano formado por Oz e c, de tal modo que quando c descreve um ângulo u, AB tenha girado $u/2$. Quando c completa uma volta ao longo de S^1, AB retorna à sua posição inicial , com os pontos extremos invertidos.

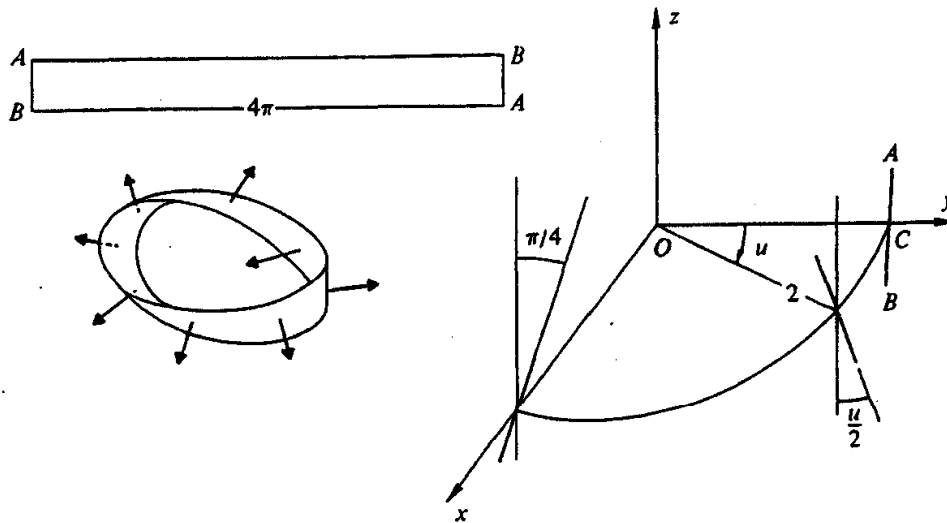



Figura 2-31

Do ponto de vista da diferenciabilidade, é como se tivessemos identificado os lados opostos (verticais) de um retângulo, dando uma torção no retângulo, de modo a identificar cada ponto do lado AB com o seu simétrico do lado correspondente Fig. 2.31).

É geometricamente evidente que a faixa de Möbius M é uma superfície regular não-orientável. Com efeito, se M fosse orientável, existiria um campo diferenciável $N : M \to \mathbb{R}^3$ de vetores normais unitários. Tomando esses vetores ao longo do círculo $x^2 + y^2 = 4$, veremos que, depois de uma volta completa, N voltaria à sua posição inicial como $-N$, o que é uma contradição.

Daremos agora uma demonstração analítica dos fatos mencionados acima.

Um sistema de coordenadas locais para a faixa de Möbius é dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left((2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}) \operatorname{sen} u, (2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}) \cos u, \cos \frac{u}{2}\right),$$

onde $0 < u < 2\pi$ e $-1 < v < 1$. A vizinhança coordenada correspondente omite os pontos do intervalo aberto $u = 0$. Tomando agora Ox como origem dos $u's$, obtemos uma outra parametrização $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ dada por

$$\begin{aligned}
x &= \left\{2 - \bar{v} \operatorname{sen} (\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2})\right\} \cos \bar{u}, \\
y &= \left\{2 - \bar{v} \operatorname{sen} (\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2})\right\} \operatorname{sen} \bar{u}, \\
z &= \bar{v} \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}),
\end{aligned}$$

cuja vizinhança coordenada omite o intervalo $u = \pi/2$. Essas duas vizinhanças coordenadas cobrem a faixa de Möbius, e mostram que ela é uma superfície regular.

Observe que a interseção das duas vizinhanças coordenadas nã o é conexa, mas constituida de duas compontentes conexas:

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \mathrm{x}(u,v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi \right\}, \\ W_2 &= \left\{ \mathrm{x}(u,v) : 0 < u < \frac{\pi}{2} \right\}. \end{aligned}$$

A mudança de coordenadas é dada por

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u} = u - \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} = v \end{array} \right\} \qquad \textit{em } W_1,$$

e

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u} = \frac{3\pi}{2} + u \\ \bar{v} = -v \end{array} \right\} \qquad \textit{em } W_2.$$

Decorre que

$$\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)} = 1 > 0 \qquad \textit{em } W_1,$$

e

$$\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)} = -1 < 0 \qquad \textit{em } W_2.$$

Para mostrar que a faixa de Möbius é não-orientável, vamos supor que seja possível definir um campo diferenciável de vetores normais $N : M \to \mathbb{R}^3$. Intercambiando u e v se necessário, podemos admitir que

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}$$

para todo p na vizinhança coordenada de $\mathrm{x}(u,v)$. Analogamente, podemos admitir que

$$N(p) = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}}{|\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}|}$$

para todos os pontos da vizinhança coordenada $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$. Entretanto, o Jacobiano da mudança de coordenadas deve ser -1 em W_1 ou em W_2 (dependendo das eventuais mudanças do tipo $u \to v$, $\bar{u} \to \bar{v}$ que tenham sido feitas). Se p é um ponto dessa componente da interseção, então $N(p) = -N(p)$, o que é uma contradição.

Já vimos que uma superfície que é um gráfico de uma função diferenciável é uma superfície orientável. Mostraremos agora que uma superfície que é a imagem inversa de um valor regular de uma função diferenciável também é orientável. Esta é uma das razões pela qual é relativamente difícil construir exemplos de superfícies regulares não-orientáveis em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 2. *Se uma superfície regular é dada por* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ f(x, y, z) = a\}$, *onde* $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *é diferenciável e* a *é um valor regular de* f, *então* S *é orientável.*

Demonstração. Dado um ponto $(x_0, y_0, z_0) = p \in S$, considere a curva parametrizada $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, em S passando por p para $t = t_0$. Como a curva está em S, temos

$$f(x(t), y(t), z(t)) = a,$$

para todo $t \in I$. Derivando ambos os membros desta expressão em relação a t, vemos que em $t = t_0$

$$f_x(p)\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + f_y(p)\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} + f_z(p)\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = 0.$$

Isto mostra que o vetor tangente à curva em $t = t_0$ é perpendicular ao vetor (f_x, f_y, f_z) em p. Como a curva e o ponto são arbitrários, conclui-se que

$$N(x, y, z) = \left(\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}\right)$$

é um campo diferenciável de vetores unitários em S. Junto com a Prop. 1, isto implica que S é orientável, como queríamos.

Q.E.D.

Uma observação final. Orientação certamente não é uma propriedade local de uma superfície regular. Localmente, toda superfície regular é difeomorfa

a um conjunto aberto do plano e, portanto, orientável. Orientação é uma propriedade global, no sentindo de envolver toda a superfície. Mais adiante neste livro (Capítulo 5), teremos mais a dizer sobre propriedades globais.

Exercícios

1. Seja S uma superfície regular coberta por vizinhanças coordenadas V_1 e V_2. Suponha que $V_1 \cap V_2$ tenha duas componentes conexas, W_1 e W_2, e que o Jacobiano da mudança de coordenadas é positivo em W_1 e negativo em W_2. Prove que S é não-orientável.

2. Seja S_2 uma superfície regular orientável e $\varphi : S_1 \to S_2$ uma aplicação diferenciável que é um difeomorfismo local para todo $p \in S_1$. Prove que S_1 é orientável.

3. É possível dar um sentido à noção de área para a faixa de Möbius? Caso seja, escreva uma integral para o cálculo da área.

4. Seja S uma superfície orientável e sejam $\{U_\alpha\}$ e $\{V_\beta\}$ duas famílias de vizinhanças coordenadas que cobrem S (isto é, $\cup U_\alpha = S = \cup V_\beta$) e satisfazem às condições da Def. 1 (isto é, em cada uma das famílias, as mudanças de coordenadas têm Jacobiano positivo). Dizemos que $\{U_\alpha\}$ e $\{V_\beta\}$ determinam a *mesma orientação* de S se a união das duas famílias ainda satisfaz às condições da Def. 1. Prove que uma superfície regular, conexa e orientável pode ter apenas duas orientações distintas.

5. Seja $\varphi : S_1 \to S_2$ um difeomorfismo.

   a. Mostre que S_1 é orientável se e somente se S_2 é orientável (*assim, orientabilidade é preservada por difeomorfismos*).

   b. Sejam S_1 e S_2 orientáveis e orientadas. Mostre que o difeomorfismo φ induz uma orientação em S_2. Use a aplicação antípoda da esfera (Exercício 1, seção 2.3) para mostrar que essa orientação pode ser distinta (cf. Exercício 4) da inicial (*assim, a orientação pode não ser preservada por difeomorfismos; note, no entanto, que se S_1 e S_2 são conexas, um difeomorfismo preserva ou "reverte" a orientação*).

6. Defina a noção de orientação para uma curva regular $C \subset \mathbb{R}^3$, e mostre que se C é conexa, então existem no máximo duas orientações distintas, no sentido do Exercício 4 (*em verdade, existem exatamente duas, isto é, C é sempre orientável, mas isto é mais difícil de provar*).

7. Mostre que se uma superfície regular S contém um conjunto aberto difeomorfo a uma faixa de Möbius, então S é não-orientável.

2.7 Uma Caracterização das Superfícies Compactas Orientáveis*

A recíproca da Prop. 2 da seção 2.6, a saber, que *uma superfície orientável em $\mathbb{R}^3$ é a imagem inversa de um valor regular de alguma função diferenciável,* é verdadeira e a prova é não-trivial. Mesmo para o caso particular das superfícies compactas (definidas nesta seção), a prova é instrutiva e oferece um exemplo interessante de um teorema global em geometria diferencial. Esta seção é dedicada inteiramente à demonstração da recíproca anunciada acima.

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável. O ponto crucial da demonstração consiste em mostrar que é possível escolher, sobre a reta normal passando por $p \in S$, um intervalo aberto I_p em torno de p e de comprimento, digamos, $2\varepsilon_p$ (ε_p varia com p) de tal modo que se $p \neq q \in S$, então $I_p \cap I_q = \emptyset$. Assim, a união $\cup I_p$, $p \in S$, constitui um conjunto aberto V de $\mathbb{R}^3$, que contém S e tem a propriedade de que por cada ponto de V passa uma única reta normal a S; V é então chamado uma *vizinhança tubular* de S (Fig. 2.32).

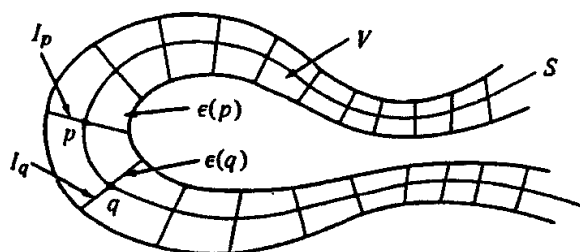



Figura 2-32. *Uma vizinhança tubular.*

* Esta seção pode ser omitida em uma primeira leitura

Vamos supor, por um momento, a existência de uma vizinhança tubular V de uma superfície orientável S. Podemos então definir uma função $g : V \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira. Fixe uma orientação para S; observe que nenhum par de segmentos I_p e I_q, $p \neq q$, da vizinhança tubular V se intersectam. Assim, por cada ponto $P \in V$ passa uma única reta normal a S que encontra S em um ponto p; por definição, $g(P)$ é a distância de p a P, com um sinal dado pela direção do vetor normal unitário em p. Se pudermos provar que g é diferenciável e que 0 é um valor regular de g, teremos que $S = g^{-1}(0)$, que é o que se quer demonstrar.

Começaremos agora a demonstração da existência de uma vizinhança tubular de uma superfície orientável. Vamos provar primeiro uma versão local desse fato; isto é, mostraremos que para cada ponto p de uma superfície regular existe uma vizinhança de p que tem uma vizinhança tubular.

Proposição 1. *Seja S uma superfície regular e $\mathbf{x} : U \to S$ uma parametrização de uma vizinhança de um ponto $p = \mathbf{x}(u_0, v_0) \in S$. Então existe uma vizinhança $W \subset \mathbf{x}(U)$ de p em S e um número $\varepsilon > 0$ tal que os segmentos das retas normais passando pelos pontos $q \in W$, com centro em q e comprimento 2ε, são disjuntos (isto é, W tem uma vizinhança tubular).*

Demonstração. Considere a aplicação $F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(u,v,t) = \mathbf{x}(u,v) + tN(u,v), \qquad (u,v) \in U, \qquad t \in \mathbb{R},$$

onde $N(u,v) = (N_x, N_y, N_z)$ é o vetor normal unitário em

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Geometricamente, F aplica o ponto $(u,v,1)$ do "cilindro" $U \times \mathbb{R}$ no ponto da reta normal a S a uma distância t de $\mathbf{x}(u,v)$. É claro que F é diferenciável e seu Jacobiano em $t = 0$ é dado por

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} = |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \neq 0.$$

Pelo teorema da função inversa, existe um paralelepípedo em $U \times \mathbb{R}$, digamos,

$$u_0 - \delta < u < u_0 + \delta, \qquad v_0 - \delta < v < v_0 + \delta, \qquad -\varepsilon < t < \varepsilon,$$

tal que F restrita a ele é injetiva. Mas isto significa que na imagem W por F do retângulo

$$u_0 - \delta < u < u_0 + \delta, \qquad v_0 - \delta < v < v_0 + \delta,$$

os segmentos das retas normais centrados em $q \in W$ e com comprimento $< 2\varepsilon$ não se encontram.

Q.E.D.

Nesse ponto, convém observar o seguinte. O fato de que a função $g : V \to \mathbb{R}$, definida acima supondo a existência de uma vizinhança tubular V, é diferenciável e que 0 é um valor regular é um fato local e pode ser provado de imediato.

Proposição 2. *Suponha a existência de uma vizinhança tubular $V \subset \mathbb{R}^3$ de uma superfície orientável $S \subset \mathbb{R}^3$, e escolha uma orientação para S. Então a função $g : V \to \mathbb{R}$, definida como sendo a distância orientada de um ponto de V ao pé da perpendicular da única reta normal passando por esse ponto, é diferenciável em uma vizinhança de S e tem zero como um valor regular.*

Demonstração. Vamos olhar novamente para a aplicação $F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida na Prop. 1, supondo agora que a parametrização $\mathbf{x}$ seja compatível com a orientação escolhida. Denotando por x, y, z as coordenadas de $F(u, v, t) = \mathbf{x}(u, v) + tN(u, v)$, podemos escrever

$$F(u, v, t) = (x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t)).$$

Como o Jacobiano $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)}$ é diferente de zero em $t = 0$, podemos inverter F em algum paralelepípedo Q,

$$u_0 - \delta < u < u_0 + \delta, \qquad v_0 - \delta < v < v_0 + \delta, \qquad -\varepsilon < t < \varepsilon,$$

e obter uma aplicação diferenciável

$$F^{-1}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), t(x, y, z)),$$

onde $(x, y, z) \in F(Q) \subset V$. Mas a restrição a $F(Q)$ da função $g : V \to \mathbb{R}$ no enunciado da Prop.2 é justamente $t = t(x, y, z)$. Assim, g é diferenciável em uma vizinhança de S. Além disso, 0 é um valor regular de g; caso contrário,

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$$

para algum ponto onde $t = 0$; logo, a diferencial dF^{-1} seria singular para $t = 0$, o que é uma contradição.

Q.E.D.

Para passarmos do local ao global, isto é, para provar a existência de uma vizinhança tubular de uma superfície orientável inteira (e não apenas de uma vizinhança de um ponto desta superfície), precisaremos de alguns argumentos topológicos. Vamos nos restringir às superfícies compactas, que definimos agora.

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^3$ é um *ponto de acumulação de* A se toda vizinhança de p em $\mathbb{R}^3$ contém um ponto de A, distinto de p. Dizemos que o conjunto A é *fechado* se ele contém todos os seus pontos de acumulação. O conjunto A é *limitado* se está contido em alguma bola de $\mathbb{R}^3$. Se A é fechado e limitado, dizemos que é um *conjunto compacto*.

A esfera e o toro são superfícies compactas. O parabolóide de revolução $z = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é uma superfície fechada, mas, sendo ilimitada, não é uma superfície compacta. O disco $x^2 + y^2 < 1$ no plano e a faixa de Möbius são limitados mas não são fechados, e portanto não são compactos.

Precisaremos de algumas propriedades de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^3$, que enunciaremos agora. A distância entre dois pontos $p, q \in \mathbb{R}^3$ será indicada por $d(p, q)$.

PROPRIEDADE 1 (Bolzano-Weierstrass). *Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto compacto. Então todo subconjunto infinito de A tem pelo menos um ponto de acumulação em A.*

PROPRIEDADE 2 (Heine-Borel). *Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto compacto e $\{U_\alpha\}$ uma família de conjuntos abertos de A tal que $\cup_\alpha U_\alpha = A$. Então é possível escolher um número finito $U_{k_1}, U_{k_2}, ..., U_{k_n}$ de elementos de $\{U_\alpha\}$, tais que $\cup U_{k_i} = A$, $i = 1, ..., n$.*

PROPRIEDADE 3 (Lebesgue). *Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto compacto e $\{U_\alpha\}$ uma família de abertos de A tal que $\cup U_\alpha = A$. Então existe um número $\delta > 0$ (o número de Lebesgue da família $\{U_\alpha\}$) tal que, sempre que dois pontos $p, q \in A$ estão a uma distância $d(p, q) < \delta$, então p e q pertencem a algum U_α.*

As Propriedades 1 e 2 normalmente são provadas em um curso de Análise. Por completitude, provaremos agora a Propriedade 3. Mais adiante neste

livro (apêndice ao capítulo 5), trataremos dos conjuntos compactos em $\mathbb{R}^n$ de maneira mais sistemática e apresentaremos demonstrações das Propriedades 1 e 2.

Demonstração da Propriedade 3. Vamos supor que não existe $\delta > 0$ satisfazendo às condições do enunciado; isto é, dado $1/n$ existem pontos p_n e q_n tais que $d(p_n, q_n) < 1/n$ mas p_n e q_n não pertencem a um mesmo conjunto aberto da família $\{U_\alpha\}$. Considerando $n = 1, 2, ...$, obtemos dois conjuntos infinitos de pontos $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ que, pela Propriedade 1, têm pontos de acumulação p e q, respectivamente. Como $d(p_n, q_n) < 1/n$, podemos escolher esses pontos de acumulação de tal modo que $p = q$. Mas $p \in U_\alpha$ para algum α, pois $p \in A = \cup U_\alpha$, e como U_α é um conjunto aberto, existe uma bola aberta $B_\varepsilon(p)$, centrada em p, tal que $B_\varepsilon(p) \subset U_\alpha$. Como p é um ponto de acumulação de $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$, existem, para n suficientemente grande, pontos p_n e q_n em $B_\varepsilon(p) \subset U_\alpha$; isto é, p_n e q_n pertencem ao mesmo U_α, o que é uma contradição.

Q.E.D.

Usando as Propriedades 2 e 3, provaremos a existência de uma vizinhança tubular de uma superfície compacta orientável.

Proposição 3. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta e orientável. Então existe um número $\varepsilon > 0$ tal que sempre que $p, q \in S$, os segmentos das retas normais de comprimento 2ε , centrados em p e q, são disjuntos (isto é, S tem uma vizinhança tubular).*

Demonstração. Pela Prop. 1, para cada $p \in S$ existe uma vizinhança W_p e um número $\varepsilon_p > 0$ tais que a proposição vale para pontos de W_p com $\varepsilon = \varepsilon_p$. Considerando todos os pontos $p \in S$, obtemos uma família$\{W_p\}$ com $\cup_{p\in S} W_p = S$. Por compacidade (Propriedade 2), é possível escolher um número finito de elementos de $\{W_p\}$, digamos, $W_1, ..., W_k$ (correspondendo a $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k$) tais que $\cup W_i = S$, $i = 1, ..., k$. Mostraremos agora que o ε que buscamos é dado por

$$\varepsilon < \min\left(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k, \frac{\delta}{2}\right),$$

onde δ é o número de Lebesgue da família $\{W_i\}$ (Propriedade 3).

Com efeito, sejam dois pontos $p, q \in S$. Se ambos pertencem a algum W_i, $i = 1, ..., k$, os segmentos das retas normais centrados em p e q com comprimento 2ε não se intersectam, pois $\varepsilon < \varepsilon_p$. Se p e q não pertencem a um mesmo

W_i, então $d(p,q) \geq \delta$; caso os segmentos das retas normais, centrados em p e q e com comprimento 2ε, se encontrassem em um ponto $Q \in \mathbb{R}^3$, teríamos

$$2\varepsilon \geq d(p,Q) + d(Q,p) \geq d(p,q) \geq \delta,$$

contradizendo a definição de ε.

Q.E.D.

Juntando as Proposições 1, 2 e 3, obtemos o seguinte teorema, que é o objetivo principal desta seção.

Teorema. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta e orientável. Então existe uma função diferenciável $g : V \to \mathbb{R}$, definida em um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, com $V \supset S$ (uma vizinhança tubular de S), que tem zero como um valor regular e é tal que $S = g^{-1}(0)$.*

Observação 1. É possível provar a existência de uma vizinhança tubular para uma superfíce orientável, mesmo se a superfície não é compacta; o teorema é válido, portanto, sem a restrição de compacidade. No entanto, a demonstração é mais técnica. No caso geral, o $\varepsilon(p) > 0$ não é uma constante como no caso compacto, e pode variar com p.

Observação 2. É possível mostrar que uma superfície regular compacta em $\mathbb{R}^3$ é orientável; a hipótese de orientabilidade no teorema (no caso compacto) é, portanto, desnecessária. Uma prova deste fato pode ser encontrada em H. Samelson, "Orientability of Hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$", *Proc. A.M.S.* 22 (1969), 301-302.

Observação 3. Demonstrações simples dos fatos enunciados nas Observações 1 e 2 podem ser encontradas em Elon Lima, "Duas novas demonstrações do teorema de Jordan-Brower no caso diferenciável", *Matemática Universitária, N* 4, *Sociedade Brasileira de Matemática*, 1986, 89-105.

2.8 Uma Definição Geométrica de Área*

Nesta seção daremos uma justificativa geométrica para a definição de área na seção 2.5. Mais precisamente, daremos uma definição geométrica de área,

---

* Esta seção pode ser omitida em uma primeira leitura.

e provaremos que, no caso de uma região limitada de uma superfície regular, esta definição conduz à expressão dada para a área na seção 2.5.

Para definir a área de uma região $R \subset S$, começaremos com uma partição $\mathcal{P}$ de R em um número finito de regiões R_i, isto é, escreveremos $R = \cup_i R_i$, onde a interseção de duas regiões R_i ou é vazia ou é constituída de pontos da fronteira de ambas (Fig. 2.33). O *diâmetro* de R_i é o supremo das distâncias (em $\mathbb{R}^3$) de dois pontos quaisquer de R_i; o maior dos diâmetros dos R_i de uma partição chama-se *norma* μ dessa partição. Considerando agora uma partição de cada R_i, obtemos uma segunda partição de R, que dizemos *refinar* $\mathcal{P}$.

Dada a partição

$$R = \cup_i R_i$$

de R, escolhemos arbitrariamente pontos $p_i \in R_i$ e projetamos R_i sobre o plano tangente em p_i na direção da reta normal em p_i; a projeção de R_i é denotada por $\bar{R}_i$, e a sua área por $A(\bar{R}_i)$. A soma $\sum_i A(\bar{R}_i)$ é uma aproximação do que se entende intuitivamente por área de R.

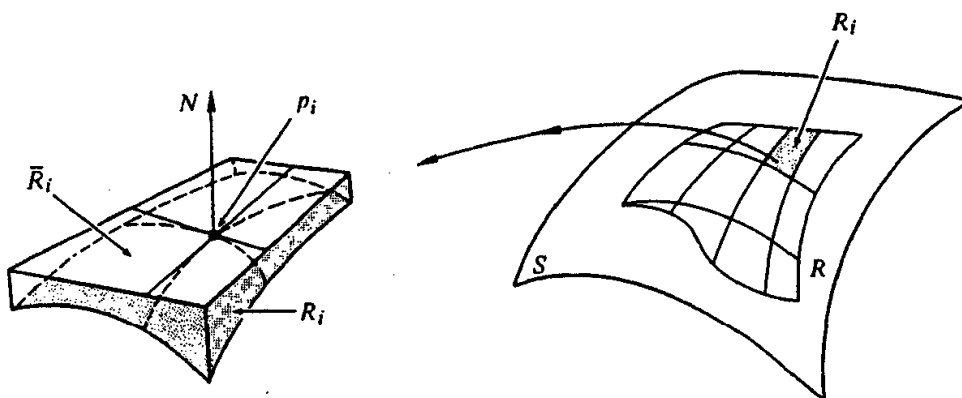



Figura 2-33

Se, escolhendo partições $\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_n, ...$ cada vez mais refinadas e tais que a norma μ_n de $\mathcal{P}_n$ tende a zero, existir o limite de $\sum_i A(\bar{R}_i)$ e esse limite for independente das escolhas feitas, então diz-se que R tem uma área $A(R)$ dada por

$$A(R) = \lim_{\mu_n \to 0} \sum_i A(\bar{R}_i).$$

Uma discussão instrutiva dessa definição de área encontra-se em R.Courant, *Differential and Integral Calculus*, Vol. II, Wiley-Interscience, New York, 1936, p. 311.

Mostraremos agora que toda região limitada de uma superfície regular possui de fato uma área. Vamos nos restringir a regiões contidas em uma vizinhança coordenada, e obteremos uma expressão para a área em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental do sistema de coordenadas correspondente.

Proposição. *Seja* $\mathbf{x}: U \to S$ *um sistema de coordenadas em uma superfície regular* S *e seja* $R = \mathbf{x}(Q)$ *uma região limitada de* S *contida em* $\mathbf{x}(U)$. *Então* R *tem uma área dada por*

$$A(R) = \iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, du \, dv.$$

Demonstração. Considere uma partição, $R = \cup_i R_i$ de R. Como R é limitada e fechada (portanto, compacta), podemos supor que a partição é suficientemente refinada para que as normais à superfície em dois pontos quaisquer de R_i não sejam ortogonais. Com efeito, como a direção normal varia continuamente, para cada ponto $p \in R$ existe uma vizinhança de p em S onde as normais nunca são ortogonais; essas vizinhanças constituem uma família de abertos cobrindo R, e tomando uma partição de R cuja norma seja menor que o número de Lebesgue da cobertura (seção 2.7, Propriedade 3 dos conjuntos compactos), teremos que a condição requerida é satisfeita.

Fixe uma região R_i da partição e escolha um ponto $p_i \in R_i = \mathbf{x}(Q_i)$. Vamos calcular a área da projeção ortogonal $\bar{R}_i$ de R_i sobre o plano tangente em p_i. Para isso, considere um novo sistema de eixos $p_i\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ em $\mathbb{R}^3$, obtido de $Oxyz$ por uma translação Op_i, seguida de uma rotação que leva Oz na normal à superfície em p_i, de modo que ambos os sistemas tenham a mesma orientação (Fig. 2.34). Nos novos eixos, a parametrização pode ser escrita como

$$\bar{\mathbf{x}}(u,v) = (\bar{x}(u,v), \bar{y}(u,v), \bar{z}(u,v)),$$

onde a expressão explícita de $\bar{\mathbf{x}}(u,v)$ não nos interessa; basta saber que o vetor $\bar{\mathbf{x}}(u,v)$ é obtido do vetor $\mathbf{x}(u,v)$ por uma translação composta com uma transformação linear ortogonal.

Observamos que $\partial(\bar{x},\bar{y})/\partial(x,y) \neq 0$ em Q_i; caso contrário, a componente $\bar{z}$ de algum vetor normal em R_i seria zero, e haveria duas normais ortogonais em R_i, contradizendo a hipótese sobre a direção das normais em R_i.

A expressão de $A(\bar{R}_i)$ é dada por

$$A(\bar{R}_i) = \iint_{\bar{R}_i} d\bar{x}\, d\bar{y}.$$

Como $\partial(\bar{x}, \bar{y})/\partial(x, y) \neq 0$, podemos considerar a mudança de coordenadas $\bar{x} = \bar{x}(u, v)$, $\bar{y} = \bar{y}(u, v)$ e transformar a expressão acima em

$$A(\bar{R}_i) = \iint_{Q_i} \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)}\, du\, dv.$$

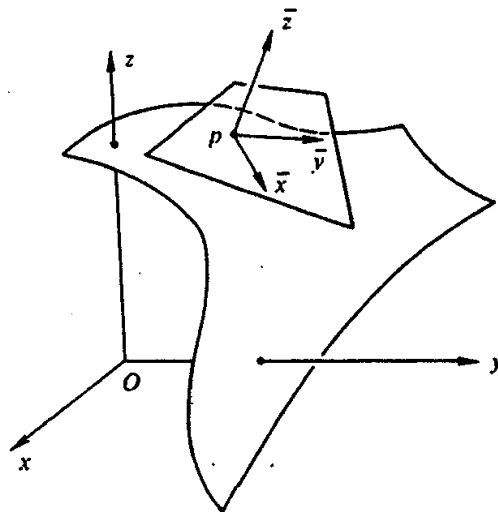



Figura 2-34

Observamos agora que, em p_i, os vetores $\bar{\mathbf{x}}_u$ e $\bar{\mathbf{x}}_v$ pertencem ao plano $\bar{x}\bar{y}$; portanto,

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} = 0 \qquad \text{em } p_i;$$

logo,

$$\left|\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u, v)}\right| = \left|\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}\right| \qquad \text{em } p_i.$$

Segue-se que

$$\left|\frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(u,v)}\right| - \left|\frac{\partial \bar{\mathrm{x}}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{\mathrm{x}}}{\partial v}\right| = \varepsilon_i(u,v), \qquad (u,v) \in Q_i,$$

onde $\varepsilon_i(u,v)$ é uma função contínua em Q_i com $\varepsilon_i(\mathrm{x}^{-1}(p_i)) = 0$. Como o comprimento de um vetor é preservado por translações e transformações lineares ortogonais, obtemos

$$\left|\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial v}\right| = \left|\frac{\partial \bar{\mathrm{x}}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{\mathrm{x}}}{\partial v}\right| = \left|\frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(u,v)}\right| - \varepsilon_i(u,v).$$

Sejam agora M_i e m_i o máximo e o mínimo da função contínua $\varepsilon_i(u,v)$ na região compacta Q_i; então

$$m_i \leq \left|\frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(u,v)}\right| - \left|\frac{\partial \bar{\mathrm{x}}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{\mathrm{x}}}{\partial v}\right| \leq M_i;$$

donde,

$$m_i \iint_{Q_i} du\,dv \leq A(\bar{R}_i) - \iint_{Q_i} \left|\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial v}\right| du\,dv \leq M_i \iint_{Q_i} du\,dv.$$

Procedendo da mesma maneira para todos os R_i, obtemos

$$\sum_i m_i A(Q_i) \leq \sum_i A(\bar{R}_i) - \iint_{Q} \left|\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial v}\right| du\,dv \leq \sum_i M_i A(Q_i).$$

Agora, refine mais e mais a dada partição de tal modo que a norma $\mu \to 0$. Então $M_i \to m_i$. Portanto, existe o limite de $\sum_i A(\bar{R}_i)$, que é dado por

$$A(R) = \iint_{Q} \left|\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial v}\right| du\,dv,$$

e que é evidentemente independente da escolha das partições e do ponto p_i em cada partição.

Q.E.D.

Apêndice: Uma Breve Revisão de Continuidade e Diferenciabilidade

Denotaremos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de n-plas $(x_1, ..., x_n)$ de números reais. Iremos utilizar apenas os casos $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Contudo, a definição mais geral de $\mathbb{R}^n$ unifica as definições sem adicionar dificuldades; o leitor, caso deseje, pode pensar em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Nesses casos particulares, usaremos a seguinte notação clássica: x ou t para $\mathbb{R}$, (x, y) ou (u, v) para $\mathbb{R}^2$, e (x, y, z) para $\mathbb{R}^3$.

A. Continuidade em $\mathbb{R}^n$

Começaremos tornando precisa a noção de um ponto estar ε−próximo a um dado ponto $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Uma *bola* (ou *bola aberta*) em $\mathbb{R}^n$ com centro $p_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ e raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto

$$B_\varepsilon(p_0) = \left\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n;\ (x_1 - x_1^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2 < \varepsilon^2\right\}.$$

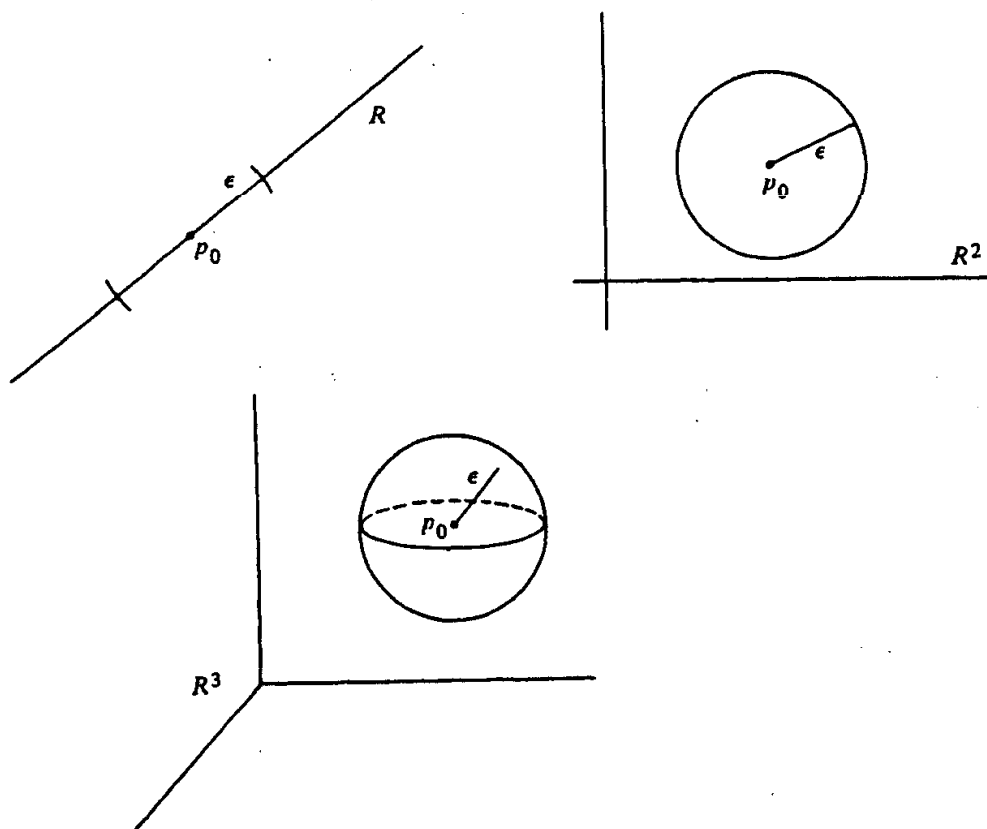



Figura A2-1

Assim, em R, $B_\varepsilon(p_0)$ é um intervalo aberto com centro p_0 e comprimento 2ε; em $\mathbb{R}^2$, $B_\varepsilon(p_0)$ é o interior de um disco com centro p_0 e raio ε; em $\mathbb{R}^3$, $B_\varepsilon(p_0)$ é o interior de uma região limitada por uma esfera de centro p_0 e raio ε (Fig. A2.1).

Um conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é um *conjunto aberto* se para cada $p \in U$ existe uma bola $B_\varepsilon(p) \subset U$. Intuitivamente, isto significa que os pontos de U estão completamente cercados por pontos de U, ou que pontos suficientemente próximos a pontos de U ainda pertencem a U.

Por exemplo, verifica-se facilmente que o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a < x < b,\ c < y < d\}$$

é aberto em $\mathbb{R}^2$. No entanto, se uma das desigualdades estritas, digamos $x < b$, é substituida por $x \leq b$, o conjunto deixa de ser aberto; nenhuma bola com centro $(b, (c+d)/2)$, que pertence ao conjunto, está contida no conjunto (Fig. A2.2).

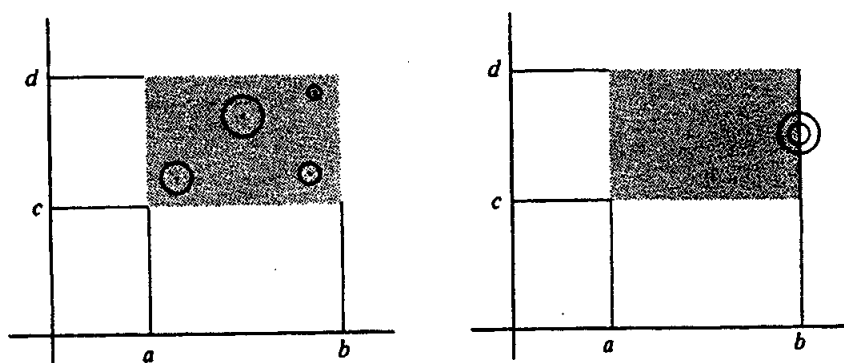



Figura A2-2

Convém dizer que um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ contendo um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é uma *vizinhança* de p.

De agora em diante, $U \subset \mathbb{R}^n$ denotará um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Lembramos que uma função real $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de uma variável real é contínua em $x_0 \in U$ se, dado um $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $|x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Analogamente, uma função real $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de duas variaveis reais é contínua em $(x_0, y_0) \in U$ se, dado um $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$, então $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$. A noção de bola unifica essas definições como casos particulares do seguinte conceito geral:

Uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é *contínua* em $p \in U$ se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p)).$$

Em outras palavras, F é contínua em p se pontos arbitrariamente próximos a $F(p)$ são imagens de pontos suficientemente próximos a p. Vê-se facilmente que nos casos particulares $n = 1, 2$ e $m = 1$, esta definição coincide com as dadas anteriormente. Diz-se que F é *contínua* em U se F é contínua para todo $p \in U$ (Fig. A2.3).

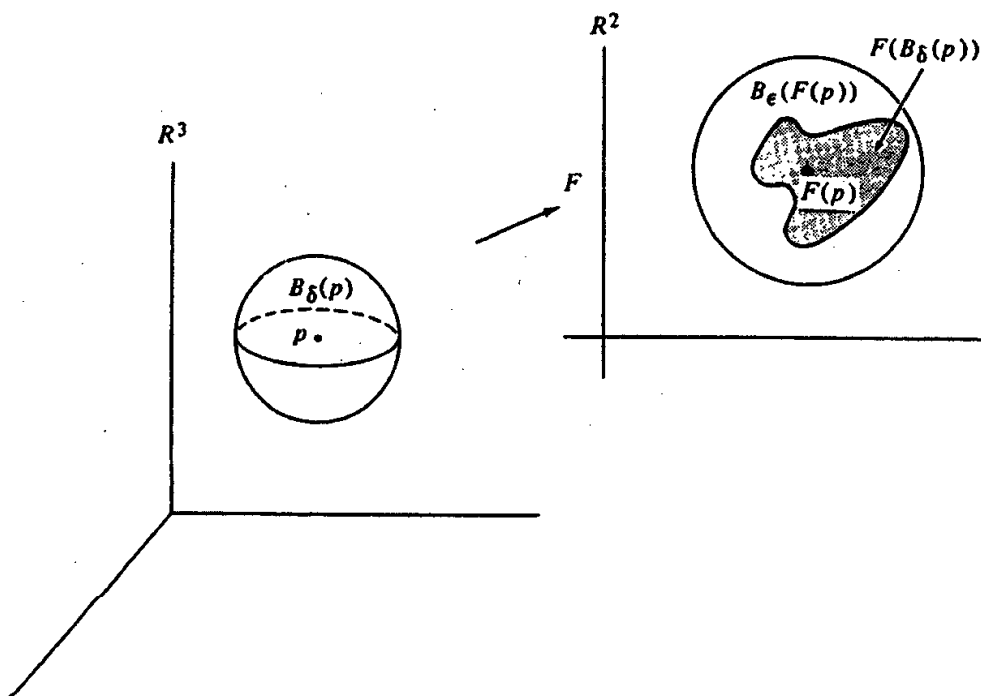



Figura A2-3

Dada uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, podemos determinar m funções de n variáveis da seguinte maneira. Seja $p = (x_1, ..., x_n) \in U$ e $f(p) = (y_1, ..., y_m)$. Então podemos escrever

$$y_1 = f_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m = f_m(x_1, ..., x_n).$$

As funções $f_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$ são as *funções componentes* de F.

Exemplo 1 (*Simetria*). Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação que associa a cada $p \in \mathbb{R}^3$ o ponto que é simétrico a p em relação à origem $O \in \mathbb{R}^3$. Então

$F(p) = -p$, ou

$$F(x, y, z) = (-x, -y, -z),$$

e as funções componentes de F são

$$f_1(x, y, z) = -x, \qquad f_2(x, y, z) = -y, \qquad f_3(x, y, z) = -z.$$

Exemplo 2 (*Inversão*). Seja $F : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definida da seguinte maneira. Denote por $|p|$ a distância de um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ à origem $(0,0) = O$. Por definição, $F(p)$, $p \neq 0$, pertence à semi-reta Op e é tal que $|F(p)|\,|p| = 1$. Assim, $F(p) = p/|p|^2$, ou

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right), \qquad (x, y) \neq (0,0),$$

e as funções componentes de F são

$$f_1(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad f_2(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Exemplo 3. (*Projeção*). Seja $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a projeção $\pi(x, y, z) = (x, y)$. então $f_1(x, y, z) = x$, $f_2(x, y, z) = y$.

A proposição seguinte mostra que a continuidade da aplicação F é equivalente à continuidade das suas funções componentes.

Proposição 1. $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é contínua se e somente se cada função componente* $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$, *é contínua.*

Demonstração. Suponha que F é contínua em $p \in U$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p))$. Assim, se $q \in B_\delta(p)$, então

$$F(q) \subset B_\varepsilon(F(p)),$$

isto é,

$$(f_1(q) - f_1(p))^2 + ... + (f_m(q) - f_m(p))^2 < \varepsilon^2,$$

e isso implica que, para cada $i = 1, ..., m$, $|f_i(q) - f_i(p)| < \varepsilon$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $q \in B_\delta(p)$, então $|f_i(q) - f_i(p)| < \varepsilon$. Daí, cada f_i é contínua em p.

Reciprocamente, sejam f_i, $i = 1, ..., m$, contínuas em p. Então dado $\varepsilon > 0$ existem $\delta_i > 0$ tais que se $q \in B_{\delta_i}(p)$, então $|f_i(q) - f_i(p)| < \varepsilon/\sqrt{m}$. Tome $\delta = \min \delta_i$ e seja $q \in B_\delta(p)$. Então

$$(f_1(q) - f_1(p))^2 + ... + (f_m(q) - f_m(p))^2 < \varepsilon^2,$$

e daí a continuidade de F em p.

Q.E.D.

Segue-se que as aplicações nos Exemplos 1, 2 e 3 são contínuas.

Exemplo 4. Seja $F : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Então,

$$F(t) = (x_1(t), ..., x_m(t)), \qquad t \in U.$$

Uma tal aplicação é geralmente chamada uma *função vetorial,* e as funções componentes de F são as componentes do vetor $F(t) \in \mathbb{R}^m$. Quando F é contínua, ou, de modo equivalente, as funções $x_i(t)$, $i = 1, ..., m$, são contínuas, dizemos que F é uma *curva contínua* em $\mathbb{R}^m$.

Na maioria das aplicações, convém expressar a continuidade em termos de vizinhanças ao invés de bolas.

Proposição 2. *Uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $p \in U$ se e somente se, dada uma vizinhança V de $F(p)$ em $\mathbb{R}^m$ existe uma vizinhança W de p em $\mathbb{R}^n$ tal que $F(W) \subset V$.*

Demonstração. Suponha que F é contínua em p. Como V é um conjunto aberto contendo $F(p)$, V contém uma bola $B_\varepsilon(F(p))$, para algum $\varepsilon > 0$. Pela continuidade, existe uma bola $B_\delta(p) = W$ tal que

$$F(W) = F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p)) \subset V,$$

o que prova que a condição é necessária.

Reciprocamente, suponha que vale a condição. Considere $\varepsilon > 0$ dado e seja $V = B_\varepsilon(F(p))$. Pela hipótese, existe uma vizinhança W de p em $\mathbb{R}^n$ tal que $F(W) \subset V$. Como W é aberto, existe uma bola $B_\delta(p) \subset W$. Assim,

$$F(B_\delta(p)) \subset F(W) \subset V = B_\varepsilon(F(p)),$$

e daí conclui-se a continuidade de F em p.

Q.E.D.

A composição de aplicações contínuas fornece uma aplicação contínua. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 3. *Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $G : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ aplicações contínuas, onde U e V são conjuntos abertos tais que $F(U) \subset V$. Então $G \circ F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é uma aplicação contínua.*

Demonstração. Sejam $p \in U$ e W uma vizinhança de $G \circ F(p)$ em $\mathbb{R}^k$. Pela continuidade de G, existe uma vizinhança Q de $F(p)$ em $\mathbb{R}^m$ tal que $G(Q) \subset W$. Pela continuidade de F, existe uma vizinhança R de p em $\mathbb{R}^n$ tal que $F(R) \subset Q$. Assim,

$$G \circ F(R) \subset G(Q) \subset W,$$

e daí a continuidade de $G \circ F$.

Q.E.D.

Muitas vezes precisamos lidar com aplicações definidas em conjuntos arbitrários (não necessariamente abertos) de $\mathbb{R}^n$. Para estender as idéias anteriores a esta situação, vamos proceder da seguinte maneira.

Seja $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação, onde A é um conjunto arbitrário de $\mathbb{R}^n$. Diremos que F é *contínua em A* se dada uma vizinhança V de $F(p)$ em $\mathbb{R}^m$, $p \in A$, existe uma vizinhança W de p em $\mathbb{R}^n$ tal que $F(W \cap A) \subset V$. Por essa razão, convém chamar o conjunto $W \cap A$ uma *vizinhança de p em A* (Fig.A2.4).

Exemplo 5. Seja

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

um elipsóide, e seja $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a projeção do exemplo 3. Então, a restrição de π a E é uma aplicação contínua de E em $\mathbb{R}^2$.

Dizemos que uma aplicação contínua $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um *homeomorfismo* sobre $F(A)$ se F é injetiva e a inversa $F^{-1} : F(A) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua. Nesse caso, A e $F(A)$ são *conjuntos homeomorfos*.

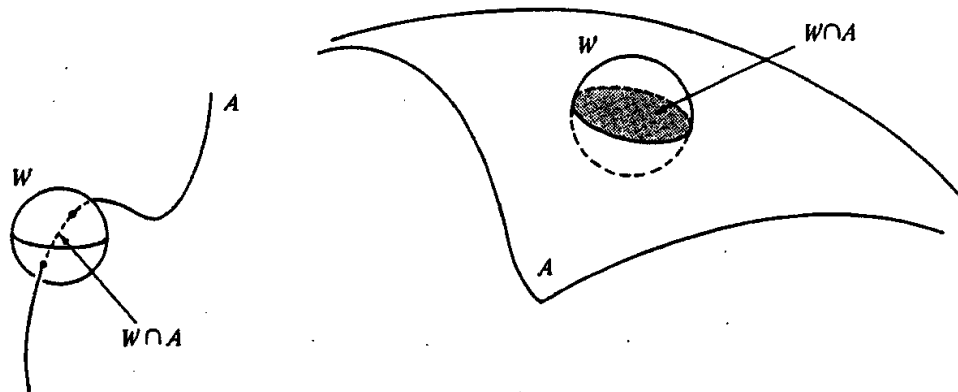



Figura A2-4

Exemplo 6. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(x, y, z) = (xa, yb, zc).$$

É claro que F é contínua, e a restrição de F à esfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma aplicação contínua $\tilde{F} : S^2 \to \mathbb{R}^3$. Observe que $\tilde{F}(S^2) = E$, onde E é o elipsóide do exemplo 5. Também é claro que F é injetiva e que

$$F^{-1}(x, y, z) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}).$$

Assim, $\tilde{F}^{-1} = F^{-1}\,|E$ é contínua. Portanto, $\tilde{F}$ é um homeomorfismo da esfera S^2 sobre o elipsóide E.

Finalmente, gostaríamos de descrever duas propriedades das funções reais contínuas definidas em um intervalo fechado $[a, b]$,

$$[a, b] = \{x \in R;\ a \leq x \leq b\}$$

(Props. 4 e 5 abaixo), e uma propriedade importante do próprio intervalo fechado $[a, b]$. Elas serão utilizadas com freqüência nesse livro.

Proposição 4 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua definida em um intervalo fechado* $[a, b]$. *Suponha que*

$f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais opostos; isto é, $f(a)f(b) < 0$. Então existe um ponto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

Proposição 5. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a,b]$. Então f atinge seus valores máximo e mínimo em $[a,b]$; isto é, existem pontos x_1, $x_2 \in [a,b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a,b]$.*

Proposição 6 (Heine-Borel) *Seja $[a,b]$ um intervalo fechado e seja I_α, $\alpha \in A$, uma coleção de intervalos abertos em $[a,b]$ tais que $\cup_\alpha I_\alpha = [a,b]$. Então é possível escolher um número finito de abertos $I_{k_1}, I_{k_2}, ..., I_{k_n}$ da coleção I_α tais que $\cup I_{k_i} = I$, $i = 1, ..., n$.*

Essas proposições são teoremas clássicos de um curso de Análise; não as demonstraremos aqui. Entretanto, apresentaremos as demonstrações no apêndice ao capítulo 5 (Props. 6, 13 e 11, respectivamente).

B. Diferenciabilidade em R^n

Seja $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A *derivada* $f'(x_0)$ de f em $x_0 \in U$ é o limite (quando existe)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \qquad x_0 + h \in U.$$

Quando f possui derivada em todos os pontos de uma vizinhança V de x_0, podemos considerar a derivada de $f' : V \to \mathbb{R}$ em x_0, que é chamada a derivada segunda $f''(x_0)$ de f em x_0, e assim por diante. f é *diferenciável* em x_0 se possui derivadas contínuas de todas as ordens em x_0. f é *diferenciável* em U se é diferenciável em todos os pontos de U.

Observação. Usamos a palavra diferenciável para o que às vezes é chamado infinitamente diferenciável (ou de classe C^∞). O nosso uso não deve ser confundido com o do Cálculo elementar, onde uma função é diferenciável se existe a derivada primeira.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. A *derivada parcial de f com relação a x em* $(x_0, y_0) \in U$, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, é (quando existe) a derivada em x_0

da função de uma variável: $x \to f(x, y_0)$. Analogamente, a derivada parcial em relação a y em (x_0, y_0), $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, é definida como a derivada em y_0 de $y \to f(x_0, y)$. Quando f possui derivadas parciais em todos os pontos de uma vizinhança V de (x_0, y_0), podemos considerar as derivadas parciais de segunda ordem em (x_0, y_0) :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

e assim por diante. f é *diferenciável* em (x_0, y_0) se tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em (x_0, y_0). f é *diferenciável em* U se é diferenciável em todos os pontos de U. Algumas vezes, denotamos derivadas parciais por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Um fato importante é que, quando f é diferenciável, as derivadas parciais de f são independentes da ordem em que elas são tomadas; isto é,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \qquad etc.$$

As definições de derivadas parciais e diferenciabilidade estendem-se facilmente a funções $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Por exemplo, $\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ é a derivada da função de uma variável

$$x_3 \to f(x_1^0, x_2^0, x_3, x_4^0 ..., x_n^0).$$

Um outro fato importante é que as derivadas parciais obedecem à chamada *regra da cadeia*. Por exemplo, se $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ são funções diferenciáveis reais em $U \subset \mathbb{R}^2$ e $f(x, y, z)$ é uma função diferenciável real em $\mathbb{R}^3$, então a composição $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é uma função diferenciável em U, e as derivadas parciais de f com relação a, digamos, u é dada

por

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Estamos agora interessados em estender a noção de diferenciabilidade para aplicações $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dizemos que F é *diferenciável* em $p \in U$ se as suas funções componentes são diferenciáveis em p; isto é, escrevendo

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = (f_1(x_1, x_2, ..., x_n), ...f_m(x_1, x_2, ..., x_n)),$$

as funções f_i, $i = 1, ..., m$, têm derivadadas parciais contínuas de todas as ordens em p. F é *diferenciável em* U se é diferenciável em todos os pontos de U.

Para o caso $m = 1$, isto repete a definição dada anteriormente. Para o caso $n = 1$, obtemos a noção de uma curva (parametrizada) diferenciável em $\mathbb{R}^m$. No capítulo 1, já encontramos este objeto em $\mathbb{R}^3$. Para os nossos propósitos, precisamos estender a definição de vetor tangente do capítulo 1 à presente situação. Um vetor tangente a uma aplicação $\alpha : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ em $t_0 \in U$ é o vetor em $\mathbb{R}^m$

$$\alpha'(t_0) = (x_1'(t_0), ..., x_m'(t_0)).$$

Exemplo 7. Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \cos^2 v), \qquad (u, v) \in U.$$

As funções componentes de F, a saber,

$$f_1(u, v) = \cos u \cos v, \qquad f_2(u, v) = \cos u \operatorname{sen} v, \qquad f_3(u, v) = \cos^2 v$$

têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U. Assim, F é diferenciável em U.

Exemplo 8. Seja $\alpha : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\alpha(t) = (t^4, t^3, t^2, t), \qquad t \in U.$$

Então, α é uma curva diferenciável em $\mathbb{R}^4$, e o vetor tangente a α em t é $\alpha'(t) = (4t^3, 3t^2, 2t, 1)$.

Exemplo 9. Dado um vetor $w \in \mathbb{R}^m$ e um ponto $p_0 \in U \subset \mathbb{R}^m$, podemos sempre encontrar uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ com $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha'(0) = w$. Basta definir $\alpha(t) = p_0 + tw$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Escrevendo $p_0 = (x_1^0, ..., x_m^0)$ e $w = (w_1, ..., w_m)$, as funções coordenadas de α são $x_i(t) = x_i^0 + tw_i$, $i = 1, ..., m$. Assim, α é diferenciável, $\alpha(0) = p_0$ e

$$\alpha'(0) = (x_1'(0), ..., x_m'(0)) = (w_1, ..., w_m) = w.$$

Introduzimos agora o conceito de diferencial de uma aplicação diferenciável. Ele desempenhará um papel importante neste livro.

DEFINIÇÃO 1. *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Associamos a cada $p \in U$ uma aplicação linear $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que é chamada a* diferencial *de F em p, e é definida da seguinte maneira. Sejam $w \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Pela regra da cadeia, a curva $\beta = F \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$ também é diferenciável. Então* (Fig. A2.5)

$$dF_p(w) = \beta'(0).$$

Proposição 7. *A definição dada acima para dF_p não depende da escolha da curva que passa por p com vetor tangente w, e dF_p é, de fato, uma aplicação linear.*

Demonstração. Para simplificar a notação, trabalharemos com o caso $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sejam (u, v) as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e (x, y, z) as coordenadas em $\mathbb{R}^3$. Sejam $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Então, podemos escrever $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$\alpha'(0) = w = u'(0)e_1 + v'(0)e_2,$$

$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, e

$$\beta(t) = F \circ \alpha(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

Assim, usando a regra da cadeia e considerando derivadas em $t = 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\beta'(0) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right) f_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right) f_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right) f_3 \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} \end{pmatrix} = dF_p(w).
\end{aligned}
$$

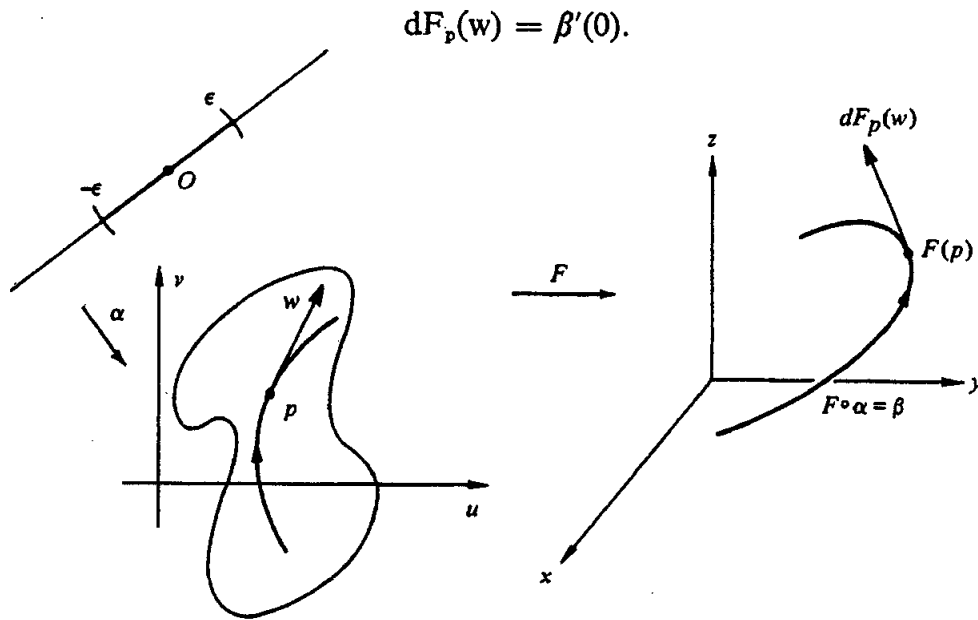



Figura A2-5

Isto mostra que dF_p é representada, nas bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, por uma matriz que depende apenas das derivadas parciais em p das funções coordenadas x, y, z de F. Portanto, dF_p é uma aplicação linear, e evidentemente dF_p não depende da escolha de α.

O leitor não terá problemas em estender este argumento para o caso geral.

Q. E. D.

A matriz de $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nas bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, isto é, a matriz $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, é chamada a *matriz Jacobiana* de

F em p. Quando $n = m$, ela é uma matriz quadrada e o seu determinante é chamado o *determinante Jacobiano;* é comum denotá-lo por

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Observação. Não há consenso na literatura sobre a notação para a diferencial. Também é comum chamar dF_p de derivada de F em p e denotá-la por $F'(p)$.

Exemplo 10. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vê-se facilmente que F é diferenciável, e que a sua diferencial dF_p em $p = (x, y)$ é

$$dF_p = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, $dF_{(1,1)}(2, 3) = (-2, 10)$.

Uma das vantagens da noção de diferencial de uma aplicação é que ela nos permite expressar muitos fatos do Cálculo em uma linguagem geométrica. Considere, por exemplo, a seguinte situação: sejam $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $G : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplicações diferenciáveis, onde U e V são conjuntos abertos tais que $F(U) \subset V$. Fixemos o seguinte conjunto de coordenadas

$$U \subset \underset{(u,v)}{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{F} V \subset \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{G} \underset{(\xi,\eta)}{\mathbb{R}^2}$$

e escrevamos

$$\begin{aligned} F(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \\ G(x, y, z) &= (\xi(x, y, z), \eta(x, y, z)). \end{aligned}$$

Então

$$G \circ F(u, v) = (\xi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \eta(x(u, v), y(u, v), z(u, v))),$$

e, pela regra da cadeia, podemos dizer que $G \circ F$ é diferenciável e calcular as derivadas parciais das funções componentes. Por exemplo,

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Uma maneira simples de expressar a situação acima consiste em utilizar o seguinte fato geral.

Proposição 8 (Regra da Cadeia para Aplicações). *Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $G : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ aplicações diferenciáveis, onde U e V são conjuntos abertos tais que $F(U) \subset V$. Então $G \circ F : U \to \mathbb{R}^k$ é uma aplicação diferenciável, e*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p, \qquad p \in U.$$

Demonstração. O fato de $G \circ F$ ser diferenciável é uma consequência da regra da cadeia para funções. Seja agora $w_1 \in \mathbb{R}^n$ e considere a curva $\alpha : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \to U$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w_1$. Defina $dF_p(w_1) = w_2$ e observe que $dG_{F(p)}(w_2) = \frac{d}{dt}(G \circ F \circ \alpha)\big|_{t=0}$. Então,

$$d(G \circ F)_p(w_1) = \frac{d}{dt}(G \circ F \circ \alpha)_{t=0} = dG_{F(p)}(w_2) = dG_{F(p)} \circ dF_p(w_1).$$

Q.E.D.

Note que, para a situação particular que consideramos previamente, a relação $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$ é equivalente ao seguinte produto de matrizes Jacobianas,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix},$$

que contém as expressões de todas as derivadas parciais $\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial v}$. Portanto, a expressão simples da regra da cadeia para aplicações incorpora

uma grande quantidade de informação sobre as derivadas parciais das funções coordenadas.

Uma propriedade importante de uma função diferenciável $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo aberto (a, b) é que se $f'(x) \equiv 0$ em (a, b), então f é constante em (a, b). Isso se generaliza da seguinte maneira para funções diferenciáveis de várias variáveis.

Dizemos que um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é *conexo* se dados dois pontos $p, q \in U$ existe uma aplicação contínua $\alpha : [a, b] \to U$ tal que $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$. Isso significa que dois pontos de U podem ser ligados por uma curva contínua em U ou que U é constituído de apenas um "pedaço".

Proposição 9. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to R$ uma função diferenciável definida em um conjunto aberto e conexo U de $\mathbb{R}^n$. Suponha que $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é zero para todo $p \in U$. Então f é constante em U.*

Demonstração. Seja $p \in U$ e seja $B_\delta(p) \subset U$ uma bola aberta em torno de p e contida em U. Qualquer ponto $q \in B_\delta(p)$ pode ser ligado a p pelo segmento "radial" $\beta : [0, 1] \to U$, onde $\beta(t) = tq + (1 - t)p$, $t \in [0, 1]$ (Fig. A2-6). Como U é aberto, podemos estender β a $(0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Assim, $f \circ \beta : (0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ é uma função definida em um intervalo aberto, e

$$d(f \circ \beta)_t = (df \circ d\beta)_t = 0,$$

visto que $df \equiv 0$. Portanto,

$$\frac{d}{dt}(f \circ \beta) = 0$$

para todo $t \in (0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, e daí $(f \circ \beta) = const.$. Isso significa que $f(\beta(0)) = f(p) = f(\beta(1)) = f(q)$; ou seja, f é constante em $B_\delta(p)$.

Portanto, a proposição está demonstrada localmente; isto é, cada ponto de U tem uma vizinhança tal que f é constante nessa vizinhança. Note que até agora não utilizamos a conexidade de U. Precisaremos dela agora para mostrar que essas constantes são todas iguais.

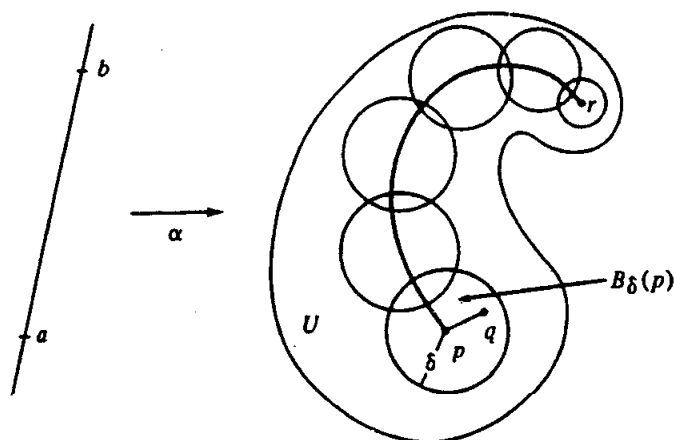



Figura A2-6

Seja r um ponto arbitrário de U. Como U é conexo, existe uma curva contínua $\alpha : [a, b] \to U$, com $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = r$. A função $f \circ \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$. Pela primeira parte da demonstração, para cada $t \in [a, b]$, existe um intervalo I_t, aberto em $[a, b]$, tal que $f \circ \alpha$ é constante em I_t. Como $\cup_t I_t = [a, b]$, podemos aplicar o teorema de Heine-Borel (Prop. 6). Portanto, podemos escolher um número finito $I_1, ..., I_k$ dos intervalos I_t tais que $\cup_i I_i = [a, b]$, $i = 1, ..., k$. Podemos supor, renumerando os intervalos se necessário, que dois intervalos consecutivos se intersectam. Então, $f \circ \alpha$ é constante na união de dois intervalos consecutivos. Segue-se que $f \circ \alpha$ é constante em $[a, b]$; isto é

$$f(\alpha(a) = f(p) = f(\alpha(b) = f(r).$$

Como r é arbitrário, f é constante em U.

Q.E.D.

Um dos teoremas mais importantes do Cálculo Diferencial é o chamado teorema da função inversa, que, na notação aqui utilizada, diz o seguinte. (Lembre-se que uma aplicação linear A é um isomorfismo se a matriz de A é invertível.)

Teorema da Função Inversa. *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável e suponha que em $p \in U$ a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Então existe uma vizinhança V de p em U e uma vizinhança W de $F(p)$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $F : V \to W$ tem inversa diferenciável $F^{-1} : W \to V$.*

Uma aplicação diferenciável $F : V \subset \mathbb{R}^n \to W \subset \mathbb{R}^n$ de V sobre W, onde V e W são conjuntos abertos, é chamada um *difeomorfismo* de V sobre W se F tem uma inversa diferenciável. O teorema da função inversa afirma que se em um ponto $p \in U$ a diferencial dF_p é um isomorfismo, então F é um difeomorfismo em uma vizinhança de p. Em outras palavras, uma afirmação sobre a diferencial de F em um ponto implica uma afirmação similar sobre o comportamento de F em uma vizinhança do ponto. Uma demonstração deste fato é dada em geral em um curso de Análise. Veja, por exemplo, Lima, E. *Análise Real, volume* 2, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004, Capítulo 6.

Exemplo 11. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

As funções coordenadas, a saber, $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, têm derivadas contínuas de todas as ordens. Portanto, F é diferenciável.

É instrutivo ver, geometricamente, como F transforma curvas do plano xy. Por exemplo, a reta vertical $x = x_0$ é levada no círculo $u = e^{x_0} \cos y$, $v = e^{x_0} \operatorname{sen} y$ de raio e^{x_0}, e a reta horizontal $y = y_0$ é levada na semi-reta $u = e^x \cos y_0$, $v = e^x \operatorname{sen} y_0$ com inclinação $\operatorname{tg} y_0$. Segue-se então que (Fig. A2.7)

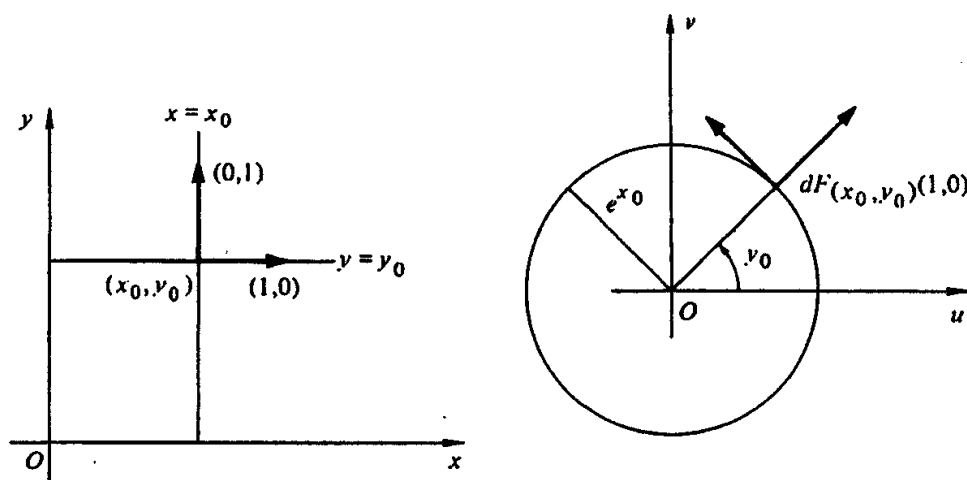



Figura A2-7

$$
\begin{aligned}
dF_{(x_0,y_0)}(1,0) &= \frac{d}{dx}(e^x \cos y_0, e^x \operatorname{sen} y_0)\bigg|_{x=x_0} \\
&= (e^{x_0} \cos y_0, e^{x_0} \operatorname{sen} y_0), \\
dF_{(x_0,y_0)}(0,1) &= \frac{d}{dy}(e^{x_0} \cos y, e^{x_0} \operatorname{sen} y)\bigg|_{y=y_0} \\
&= (-e^{x_0} \operatorname{sen} y_0, e^{x_0} \cos y_0).
\end{aligned}
$$

Isto pode ser verificado facilmente calculando-se a matriz Jacobiana de F,

$$
dF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{pmatrix},
$$

e aplicando-a aos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ em (x_0, y_0).

Notamos que o determinante Jacobiano $\det(dF_{(x,y)}) = e^x \neq 0$, e então dF_p é não-singular para todo $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (isto também é claro pelas considerações geométricas anteriores). Portanto, podemos aplicar o teorema da função inversa e concluir que F é localmente um difeomorfismo.

Observe que $F(x,y) = F(x, y + 2\pi)$. Assim, F não é injetiva e não tem uma inversa global. Para cada $p \in \mathbb{R}^2$, o teorema da função inversa fornece vizinhanças V de p e W de $F(p)$ tais que a restrição $F : V \to W$ é um difeomorfismo. Em nosso caso, V pode ser tomada como a faixa $\{-\infty < x < \infty, 0 < y < 2\pi\}$ e W como $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Entretanto, como mostra o exemplo, mesmo quando as condições do teorema são satisfeitas em todos os pontos e o domínio de F é bastante simples, uma inversa global de F pode não existir.

3

A Geometria da Aplicação de Gauss

3.1 Introdução

Como vimos no Capítulo 1, considerações sobre a taxa de variação da reta tangente a uma curva C nos levam a uma entidade geométrica importante, a saber, a curvatura de C. Neste capítulo, estenderemos essa idéia para superfícies regulares; isto é, tentaremos medir o quão rapidamente uma superfície S se afasta do plano tangente T_pS, em uma vizinhança de $p \in S$. Isto é equivalente a medir a taxa de variação em p de um campo vetorial normal unitário N em uma vizinhança de p. Como veremos em breve, esta taxa de variação é dada por uma aplicação linear em T_pS, que é auto-adjunta (ver apêndice ao capítulo 3). Um número surpreendente de propriedades locais de S em p pode ser obtido a partir do estudo desta aplicação linear.

Na seção 3.2, introduzimos as definições relevantes (aplicação de Gauss, curvaturas principais e direções principais, curvatura de Gauss e curvatura média, etc.) sem utilizar coordenadas locais. Dessa maneira, fica evidente o conteúdo geométrico das definições. Contudo, tanto para efetuar cálculos como por motivos teóricos, é importante expressar todos os conceitos em coordenadas locais. Isso é feito na seção 3.3.

As seções 3.2 e 3.3 contêm a maior parte do material a ser usado no restante deste livro. As poucas exceções serão apontadas explicitamente. Por completitude, no apêndice ao capítulo 3 demonstramos as propriedades fundamentais das aplicações lineares auto-adjuntas. Além disso, para aqueles que tenham omitido a seção 2.6, incluímos, no início da seção 3.2, uma breve revisão sobre a orientação de superfícies.

A seção 3.4 contém uma demonstração do fato de que em cada ponto de uma superfície regular existe uma parametrização ortogonal, isto é, uma parametrização tal que suas curvas coordenadas se intersectam ortogonal-

mente. As técnicas usadas aqui são interessantes por si mesmas, e fornecem outros resultados. Contudo, para um curso breve, pode ser conveniente admitir estes resultados e omitir a seção.

Na seção 3.5 trataremos de duas classes interessantes de superfícies, a saber, as superfícies regradas e as superfícies mínimas. Elas são tratadas de maneira independente, de forma que uma delas (ou ambas) possam ser omitidas em uma primeira leitura.

3.2 A Definição da Aplicação de Gauss e as suas Propriedades Fundamentais

Começaremos com uma breve revisão da noção de orientação para superfícies.

Como vimos na seção 2.4, dada uma parametrização $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ de uma superfície regular S em um ponto $p \in S$, podemos escolher, para cada ponto de $\mathbf{x}(U)$, um vetor normal unitário pela regra

$$N(q) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(q), \qquad q \in \mathbf{x}(U).$$

Assim, temos uma aplicação diferenciável $N : \mathbf{x}(U) \to \mathbb{R}^3$ que associa a cada $q \in \mathbf{x}(U)$ um vetor normal unitário $N(q)$.

De maneira geral, se $V \subset S$ é um conjunto aberto em S e $N : V \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável que associa a cada $q \in V$ um vetor normal unitário em q, dizemos que N é *um campo diferenciável de vetores normais unitários em* V.

É surpreendente o fato de que nem toda superfície admite um campo diferenciável de vetores unitários *definidos sobre toda a superfície.* Por exemplo, sobre a faixa de Möbius da Fig. 3.1 não se pode definir um tal campo. De maneira intuitiva, isto pode ser visto percorrendo uma vez o círculo médio da figura: depois de uma volta, o campo normal unitário N retornaria como $-N$, contradizendo a continuidade do campo. Intuitivamente, não se pode, sobre a faixa de Möbius, fazer uma escolha consistente do que seria um "lado"; movendo-se sobre a superfície, podemos passar de maneira contínua para o outro "lado" sem sair da superfície.

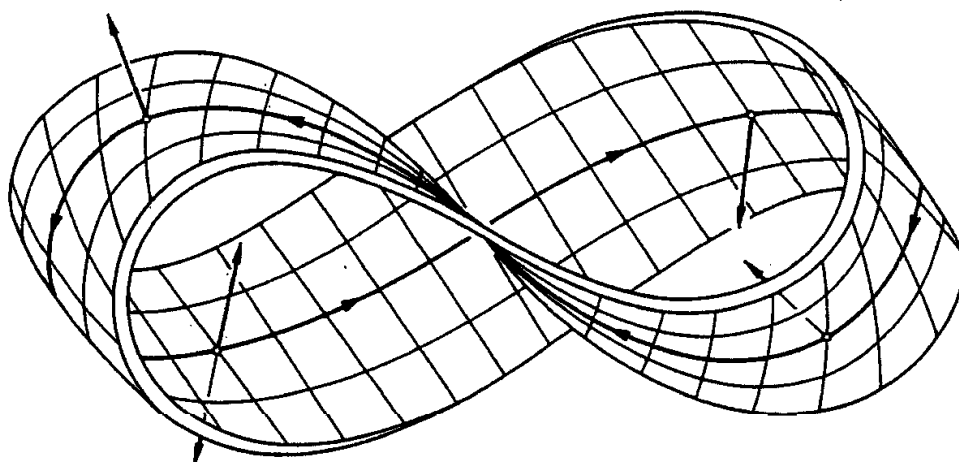



Figura 3-1. *A faixa de Möbius.*

Diremos que uma superfície regular é *orientável* se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda a superfície; a escolha de um tal campo N é chamada uma *orientação* de S.

Por exemplo, a faixa de Möbius considerada acima não é uma superfície orientável. É claro que toda superfície coberta por um único sistema de coordenadas (por exemplo, superfícies representadas por gráficos de funções diferenciáveis) é trivialmente orientável. Assim, toda superfície é localmente orientável, e orientação é, sem dúvida, uma propriedade global, no sentido de que envolve toda a superfície.

Uma orientação N em S induz uma orientação em cada plano tangente T_pS, $p \in S$, da seguinte maneira. Defina a base $\{v, w\} \subset T_pS$ como sendo *positiva* se $\langle v \wedge w, N \rangle$ é positivo. É fácil ver que o conjunto de todas as bases positivas de T_pS é uma orientação para T_pS (cf. seção 1.4).

Mais detalhes sobre a noção de orientação são dados na seção 2.6. No entanto, para os propósitos dos capítulos 3 e 4, a descrição apresentada acima será suficiente.

Ao longo deste capítulo, S denotará uma superfície regular orientável, onde foi escolhida uma orientação (i.e., um campo diferenciável de vetores normais unitários N); diremos simplesmente que S é uma superfície com uma orientação N.

DEFINIÇÃO 1. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N. A aplicação $N : S \to \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação $N : S \to S^2$, assim definida, é chamada a aplicação de Gauss *de S* (Fig. 3.2).

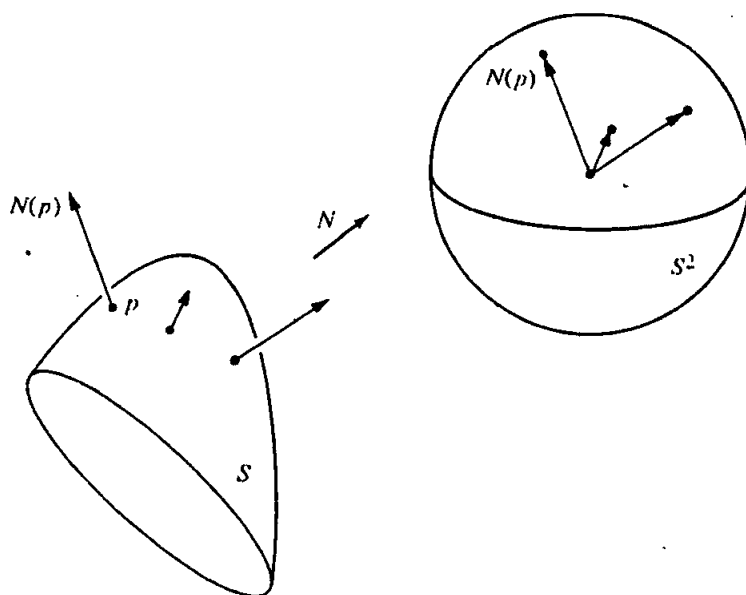



Figura 3-2. *A aplicação de Gauss.*

É imediato verificar que a aplicação de Gauss é diferenciável. A diferencial dN_p de N em $p \in S$ é uma aplicação linear de T_pS em $T_{N(p)}S^2$. Como T_pS e $T_{N(p)}S^2$ são os mesmos espaços vetoriais, dN_p pode ser olhada como uma aplicação linear em T_pS.

A aplicação linear $dN_p : T_pS \to T_{pS}$ opera da seguinte maneira. Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ em S, com $\alpha(0) = p$, consideramos a curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ na esfera S^2; isso equivale a restringir o vetor normal N à curva $\alpha(t)$. O vetor tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ é um vetor de T_pS (Fig. 3.3). Ele mede a taxa de variação do vetor normal N, restrito à curva $\alpha(t)$, em $t = 0$. Assim, dN_p mede quanto N se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p. No caso das curvas, esta medida é dada por um número, a curvatura. No caso das superfícies, esta medida é caracterizada por uma aplicação linear.

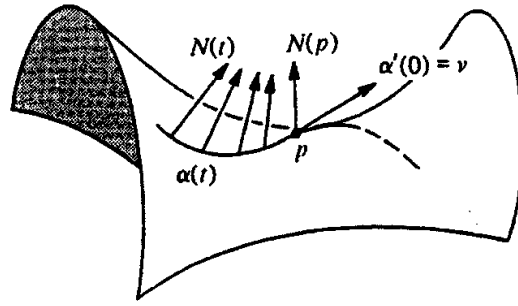



Figura 3-3

Exemplo 1. Para um plano P dado por $ax + by + cz + d = 0$, o vetor normal unitário $N = (a, b, c)/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ é constante, e portanto $dN \equiv 0$ (Fig. 3.4).

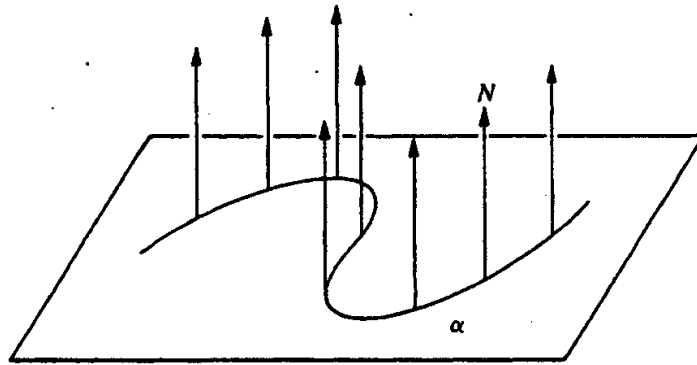



Figura 3-4. *Plano* $dN_p = 0$.

Exemplo 2. Considere a esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Se $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma curva parametrizada em S^2, então

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0,$$

mostrando que o vetor (x, y, z) é normal à esfera no ponto (x, y, z). Assim, $\bar{N} = (x, y, z)$ e $N = (-x, -y, -z)$ são campos de vetores normais unitários em S^2. Fixamos uma orientação para S^2 escolhendo $N = (-x, -y, -z)$ como um campo normal. Note que N aponta para o centro da esfera.

Restrito à curva $\alpha(t)$, o vetor normal

$$N(t) = (-x(t), -y(t), -z(t))$$

é uma função vetorial de t, e portanto

$$dN((x'(t), y'(t), z'(t))) = N'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t));$$

isto é, $dN_p(v) = -v$ para todo $p \in S^2$ e todo $v \in T_pS^2$. Observe que com a escolha de $\bar{N}$ como um campo normal (isto é, com a orientação oposta) teríamos obtido $d\bar{N}_p(v) = v$ (Fig. 3.5).

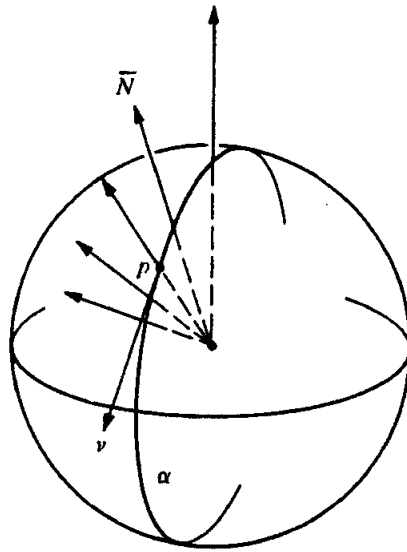



Figura 3-5. *Esfera unitária:* $d\bar{N}_p(v) = v$.

Exemplo 3. Considere o cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1\}$. Por um argumento análogo ao do exemplo anterior, vemos que $\bar{N} = (x, y, 0)$ e $N = (-x, -y, 0)$ são vetores normais unitários em (x, y, z). Fixe uma orientação escolhendo $N(x, y, z) = (-x, -y, 0)$ como o campo de vetores normais.

Considerando a curva $(x(t), y(t), z(t))$ contida no cilindro, isto é, $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$, podemos ver que, ao longo dessa curva, $N(t) = (-x(t), -y(t), 0)$ e portanto

$$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = (-x'(t), -y'(t), 0).$$

Concluímos o seguinte: Se v é um vetor tangente ao cilindro e paralelo ao eixo $0z$, então

$$dN(v) = 0 = 0v;$$

se w é um vetor tangente ao cilindro e paralelo ao plano xy, então $dN(w) = -w$ (Fig. 3.6). Segue-se que os vetores v e w são auto-vetores de dN com auto-valores 0 e -1, respectivamente (ver apêndice ao capítulo 3).

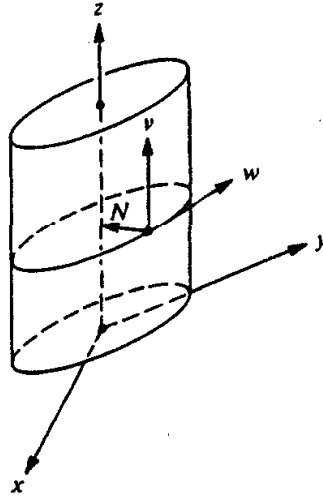



Figura 3-6

Exemplo 4. Vamos analisar o ponto $p = (0,0,0)$ do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$. Para isso, consideramos a parametrização $\mathbf{x}(u,v)$ dada por

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, v^2 - u^2),$$

e calculamos o vetor normal unitário $N(u,v)$. Obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (1,0,-2u), \\ \mathbf{x}_v &= (0,1,2v), \\ N &= \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+\frac{1}{4}}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2+\frac{1}{4}}}, \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2+\frac{1}{4}}} \right). \end{aligned}$$

Note que em $p = (0,0,0)$, $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ coincidem com os vetores unitários ao longo dos eixos $0x$ e $0y$, respectivamente. Portanto, o vetor tangente em p à curva $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, com $\alpha(0) = p$, tem, em $\mathbb{R}^3$, coordenadas $(u'(0), v'(0), 0)$ (Fig. 3.7). Restringindo $N(u,v)$ a essa curva e calculando $N'(0)$ obtemos

$$N'(0) = (2u'(0), -2v'(0), 0),$$

e portanto, em p,

$$dN_p(u'(0), v'(0), 0) = (2u'(0), -2v'(0), 0).$$

Segue-se que os vetores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ são os auto-vetores de dN_p com auto-valores 2 e -2, respectivamente.

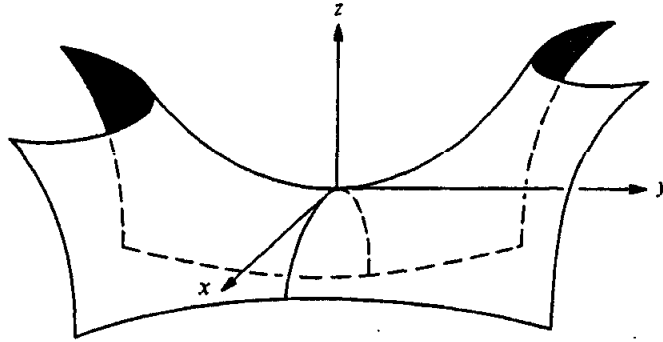



Figura 3-7

Exemplo 5. O método do exemplo anterior, aplicado ao ponto $p = (0, 0, 0)$ do parabolóide $z = x^2 + ky^2$, $k > 0$, mostra que os vetores unitários dos eixos $0x$ e $0y$ são auto-vetores de dN_p, com auto-valores 2 e $2k$, respectivamente, supondo que $N(p) = (0, 0, 1)$.

Um fato importante sobre dN_p está contido na proposição seguinte.

Proposição 1. *A diferencial* $dN_p : T_pS \to T_pS$ *da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta* (cf. apêndice ao capítulo 3).

Demonstração. Como dN_p é linear, basta verificar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$ para uma base $\{w_1, w_2\}$ de T_pS. Seja $\mathbf{x}(u, v)$ uma parametrização de S em p e $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ a base associada de T_pS. Se $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada em S, com $\alpha(0) = p$, temos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(\mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \bigg|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0); \end{aligned}$$

em particular, $dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u$ e $dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$. Portanto, para provar que dN_p é auto-adjunta, é suficiente mostrar que

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle.$$

Para ver isto, derivamos $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = 0$ e $\langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$, em relação a v e u, respectivamente, e obtemos

$$\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0,$$
$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 0.$$

Assim,

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle.$$

Q.E.D.

O fato de ser $dN_p : T_pS \to T_pS$ uma aplicação linear auto-adjunta nos permite associar a dN_p uma forma quadrática Q em T_pS, dada por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$, $v \in T_pS$ (cf. apêndice ao capítulo 3). Para obter uma interpretação geométrica desta forma quadrática, precisamos de algumas definições. Por motivos que se tornarão claros dentro em pouco, usaremos a forma quadrática $-Q$.

DEFINIÇÃO 2. *A forma quadrática II_p, definida em T_pS por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, é chamada a* segunda forma fundamental *de S em p.*

DEFINIÇÃO 3. *Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p, e $\cos\theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a S em p. O número $k_n = k\cos\theta$ é chamado a* curvatura normal *de $C \subset S$ em p.*

Em outras palavras, k_n é o comprimento da projeção do vetor kn sobre a normal à superfície em p, com um sinal dado pela orientação N de S em p (Fig. 3.8).

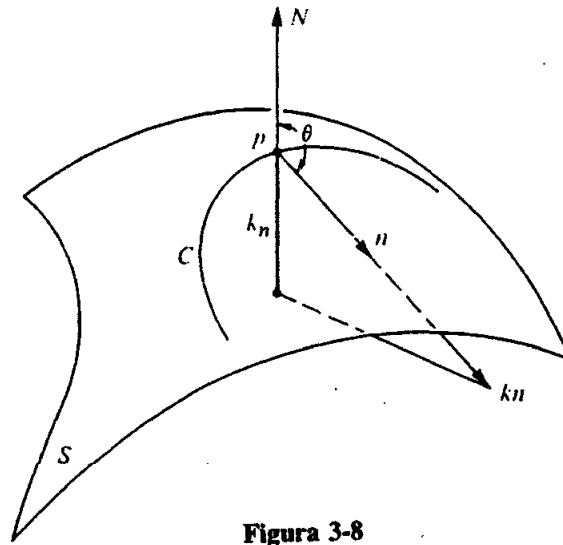



Figura 3-8

Observação. A curvatura normal de C não depende da orientação de C, mas troca de sinal com uma mudança de orientação da superfície.

Para dar uma interpretação da segunda forma fundamental II_p, considere uma curva regular $C \subset S$ parametrizada por $\alpha(s)$, onde s é o comprimento de arco de C, com $\alpha(0) = p$. Se indicarmos por $N(s)$ a restrição do vetor normal N à curva $\alpha(s)$, teremos $\langle N(s), \alpha'(s)\rangle = 0$, donde

$$\langle N(s), \alpha''(s), \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s)\rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0)\rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0)\rangle = \langle N(0), \alpha''(0)\rangle \\ &= \langle N, kn\rangle(p) = k_n(p). \end{aligned}$$

Em outras palavras, o valor da segunda forma fundamental II_p em um vetor unitário $v \in T_pS$ é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por p e tangente a v. Em particular, obtivemos o seguinte resultado.

Proposição 2 (Meusnier). *Todas as curvas de uma superfície S que têm, em um ponto $p \in S$, a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.*

A proposição acima nos permite falar em *curvatura normal ao longo de uma dada direção* em p. Convém utilizar a seguinte terminologia. Dado um vetor unitário $v \in T_pS$, a interseção de S com o plano contendo v e $N(p)$ é chamada a *seção normal* de S em p segundo v (Fig. 3.9). Em uma vizinhança de p, uma seção normal de S em p é uma curva regular plana em S, cujo vetor normal n em p é $\pm N(p)$ ou zero; a sua curvatura é, portanto, igual ao valor absoluto da curvatura normal segundo v em p. Com essa terminologia, a proposição acima afirma que o valor absoluto da curvatura normal em p de uma curva $\alpha(s)$ é igual à curvatura da seção normal de S em p, segundo $\alpha'(0)$.

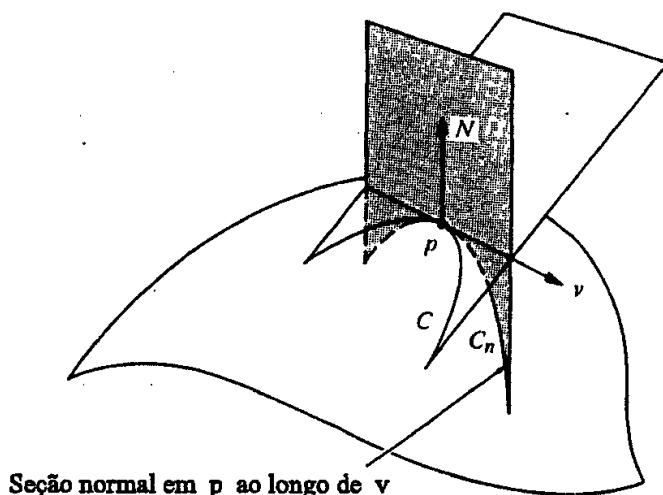



Figura 3-9. *O teorema de Meusnier: C e C_n têm a mesma curvatura normal em p ao longo de v.*

Exemplo 6. Considere a superfície de revolução obtida pela rotação da curva $z = y^4$ em torno do eixo $0z$ (Fig. 3.10). Mostraremos que em $p = (0,0,0)$ a diferencial $dN_p = 0$. Para isto, observamos que a curvatura da curva $z = y^4$ em p é igual a zero. Além disso, como o plano xy é o plano tangente à superfície em p, o vetor normal $N(p)$ é paralelo ao eixo $0z$. Portanto, qualquer seção normal em p é obtida a partir da curva $z = y^4$ por uma rotação; logo, tem curvatura zero. Segue-se que todas as curvaturas normais são nulas em p, e assim $dN_p = 0$.

Exemplo 7. No plano do Exemplo 1, todas as seções normais são retas; portanto, todas as curvaturas normais são nulas. Assim, a segunda forma fundamental é identicamente nula em todos os pontos. Isto está de acordo com o fato de termos $dN \equiv 0$.

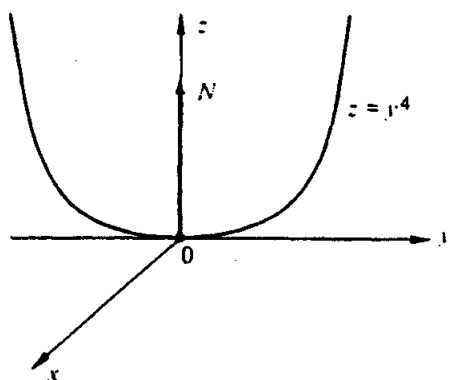



Figura 3-10

Na esfera do Exemplo 2, com $\bar{N}$ como orientação, as seções normais passando por um ponto $p \in S^2$ são círculos com raio 1 (Fig. 3.11). Assim, todas as curvaturas normais são iguais a 1, e a segunda forma fundamental é $II_p(v) = 1$ para todo $p \in S^2$ e todo $v \in T_pS^2$ com $|v| = 1$.

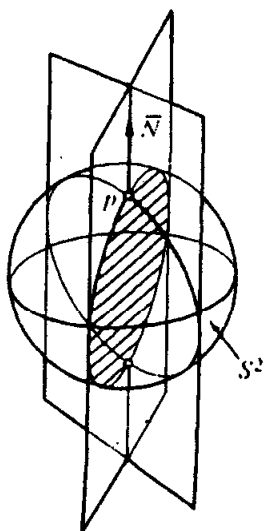



Figura 3-11. *Secções normais sobre uma esfera.*

No cilindro do Exemplo 3, as seções normais em um ponto p variam de um círculo perpendicular ao eixo do cilindro a uma reta paralela ao eixo do cilindro, passando por uma família de elipses (Fig. 3.12). Assim, as curvaturas normais variam de 1 a 0. Não é difícil ver geometricamente que 1 é o máximo e 0 o mínimo da curvatura normal em p. Uma prova simples disto é obtida como aplicação do teorema sobre formas quadráticas do apêndice ao capítulo 3. De fato, como vimos no Exemplo 3, os vetores v e w (correspondendo às direções

das curvaturas normais 1 e 0, respectivamente) são auto-vetores de dN_p com auto-valores -1 e 0, respectivamente. Assim, a segunda forma fundamental assume seus extremos nesses vetores, como havíamos afirmado. Note que desse modo podemos verificar que esses valores extremos são 1 e 0.

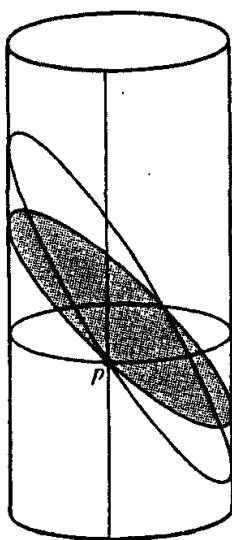



Figura 3-12. *Secções normais em um cilindro.*

Deixamos ao leitor a tarefa de analisar as seções normais no ponto $p = (0,0,0)$ do parabolóide hiperbólico do Exemplo 4.

Voltemos à aplicação linear dN_p. O teorema do apêndice ao capítulo 3 mostra que para cada $p \in S$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS tal que $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$, $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$. Além disso, k_1 e k_2 $(k_1 \geq k_2)$ são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental II_p restrita ao círculo unitário de T_pS; isto é, são os valores extremos da curvatura normal em p.

DEFINIÇÃO 4. *O máximo da curvatura normal k_1 e o mínimo da curvatura normal k_2, são chamados* curvaturas principais em p; *as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos auto-vetores e_1 e e_2 são chamadas* direções principais em p.

Por exemplo, no plano, todas as direções em todos os pontos são principais. O mesmo acontece com uma esfera. Em ambos os casos, isto vem do fato de que a segunda forma fundamental, em todos os pontos, restrita a vetores unitários,

é constante (cf. Exemplo 7). Assim, todas as direções são extremos para a curvatura normal.

No cilindro do Exemplo 3, os vetores v e w fornecem as direções principais em p, correspondendo às curvaturas principais 1 e 0, respectivamente. No parabolóide hiperbólico do Exemplo 4, os eixos $0x$ e $0y$ estão nas direções principais com curvaturas principais 2 e -2, respectivamente.

DEFINIÇÃO 5. *Se uma curva regular e conexa C em S é tal que para todo $p \in C$ a reta tangente a C é uma direção principal em p, então dizemos que C é uma* linha de curvatura *de S.*

Proposição 3 (Olinde Rodrigues). *Uma condição necessária e suficiente para que uma curva conexa e regular C em S seja uma linha de curvatura de S é que*

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t),$$

para qualquer parametrização $\alpha(t)$ de C, onde $N(t) = N \circ \alpha(t)$ e $\lambda(t)$ é uma função diferenciável de t. Nesse caso, $-\lambda(t)$ é a curvatura (principal) segundo $\alpha'(t)$.

Demonstração. Basta observar que se $\alpha'(t)$ está contido em uma direção principal, então $\alpha'(t)$ é um auto-vetor de dN e

$$dN(\alpha'(t)) = N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

A recíproca é imediata.

Q.E.D.

O conhecimento das curvaturas principais em p permite calcular facilmente a curvatura normal segundo uma direção dada de T_pS. Com efeito, se $v \in T_pS$ e $|v| = 1$, como e_1 e e_2 formam uma base ortonormal de T_pS, temos

$$v = e_1 \cos\theta + e_2 \operatorname{sen}\theta,$$

onde θ é o ângulo de e_1 a v na orientação de T_pS. A curvatura normal k_n na direção de v é dada por

$$\begin{aligned} k_n &= II_p(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle \\ &= -\langle dN_p(e_1\cos\theta + e_2 \operatorname{sen}\theta), e_1\cos\theta + e_2\operatorname{sen}\theta\rangle \\ &= \langle e_1k_1\cos\theta + e_2k_2\operatorname{sen}\theta, e_1\cos\theta + e_2\operatorname{sen}\theta\rangle \\ &= k_1\cos^2\theta + k_2\operatorname{sen}^2\theta. \end{aligned}$$

Esta última expressão é conhecida classicamente sob o nome de *fórmula de Euler*. Em verdade, ela é simplesmente a expressão da segunda forma fundamental na base $\{e_1, e_2\}$.

Dada uma aplicação linear $A : V \to V$ em um espaço vetorial de dimensão 2 e dada uma base $\{v_1, v_2\}$ de V, lembramos que

$$\text{determinante de } A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad \text{traço de } A = a_{11} + a_{22},$$

onde (a_{ij}) é a matriz de A na base $\{v_1, v_2\}$. Sabe-se que esses números não dependem da base escolhida, e são, portanto, associados à aplicação linear A.

Em nosso caso, o determinante de dN é o produto $(-k_1)(-k_2) = k_1k_2$ das curvaturas principais, e o traço de dN é o negativo $-(k_1 + k_2)$ da soma das curvaturas principais. Se mudamos a orientação da superfície, o determinante não muda (aqui é fundamental o fato da dimensão ser par); o traço, contudo, muda de sinal.

DEFINIÇÃO 6. *Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_pS \to T_pS$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado a* curvatura Gaussiana *K de S em p. O negativo da metade do traço de dN_p é chamado a* curvatura média *de S em p.*

Em termos das curvaturas principais k_1 e k_2, podemos escrever

$$K = k_1k_2, \qquad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

DEFINIÇÃO 7. *Um ponto de uma superfície S é chamado*

1. Elíptico, *se* $\det(dN_p) > 0$.
2. Hiperbólico *se* $\det(dN_p) < 0$.
3. Parabólico *se* $\det(dN_p) = 0$, *com* $dN_p \neq 0$.
4. Planar *se* $dN_p = 0$.

É claro que a classificação acima não depende da orientação escolhida para S.

Em um ponto elíptico, a curvatura Gaussiana é positiva. Ambas as curvaturas principais têm o mesmo sinal e, portanto, todas as curvas passando pelo ponto têm seus vetores normais apontando para um mesmo lado do plano

tangente. Os pontos de uma esfera são pontos elípticos. O ponto $(0,0,0)$ do parabolóide $z = x^2 + ky^2$, $k > 0$ (cf. Exemplo 5), é também um ponto elíptico.

Em um ponto hiperbólico, a curvatura Gaussiana é negativa. As curvaturas principais têm sinais contrários e, portanto, existem curvas passando pelo ponto p cujos vetores normais em p apontam para lados diferentes do plano tangente. O ponto $(0,0,0)$ do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ (cf. Exemplo 4) é um ponto hiperbólico.

Em um ponto parabólico, a curvatura Gaussiana é nula, mas uma das curvaturas principais é diferente de zero. Os pontos de um cilindro (cf. Exemplo 3) são pontos parabólicos.

Finalmente, em um ponto planar, todas as curvaturas principais são nulas. Os pontos de um plano satisfazem trivialmente a esta condição. Um exemplo não trivial de um ponto planar foi dado no Exemplo 6.

DEFINIÇÃO 8. *Se em $p \in S$, $k_1 = k_2$, então p é chamado um* ponto umbílico *de S; em particular, os pontos planares $(k_1 = k_2 = 0)$ são pontos umbílicos.*

Todos os pontos de uma esfera e de um plano são pontos umbílicos. Pelo que foi visto no Exemplo 5 o ponto $(0,0,0)$ do parabolóide $z = x^2 + y^2$ é um ponto umbílico (não-planar).

Mostraremos agora o fato interessante de que as únicas superfícies constituídas inteiramente de pontos umbílicos são essencialmente esferas e planos.

Proposição 4. *Se todos os pontos de uma superfície conexa são umbílicos, então S está contida em um plano ou em uma esfera.*

Demonstração. Seja $p \in S$ e seja $\mathbf{x}(u,v)$ uma parametrização de S em p tal que a vizinhança coordenada V é conexa.

Como cada $q \in V$ é um ponto umbílico temos, para qualquer vetor $w = a_1\mathbf{x}_u + a_2\mathbf{x}_v$ em T_qS,

$$dN(w) = \lambda(q)w,$$

onde $\lambda = \lambda(q)$ é uma função diferenciável real em V.

Mostraremos primeiro que $\lambda(q)$ é constante em V. Para isso, escrevemos a equação acima como

$$N_u a_1 + N_v a_2 = \lambda(\mathbf{x}_u a_1 + \mathbf{x}_v a_2);$$

logo, como w é arbitrário,

$$\begin{aligned} N_u &= \lambda \mathbf{x}_u, \\ N_v &= \lambda \mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Derivando a primeira equação em relação a v e a segunda em relação a u, e subtraindo os resultados, obtemos

$$\lambda_u \mathbf{x}_v - \lambda_v \mathbf{x}_u = 0.$$

Visto que $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ são linearmente independentes, concluímos que

$$\lambda_u = \lambda_v = 0,$$

para todo $q \in V$. Como V é conexo, λ é constante em V, como havíamos afirmado.

Se $\lambda \equiv 0$, $N_u = N_v = 0$ e portanto $N = N_0$ =constante em V. Assim,

$$\langle \mathbf{x}(u,v), N_0\rangle_u = \langle \mathbf{x}(u,v), N_0\rangle_v = 0;$$

logo,

$$\langle \mathbf{x}(u,v), N_0\rangle = const.,$$

e todos os pontos $\mathbf{x}(u,v)$ de V pertencem a um plano.

Se $\lambda \neq 0$, então o ponto $\mathbf{x}(u,v) - \frac{1}{\lambda}N(u,v) = \mathbf{y}(u,v)$ é fixo, pois

$$(\mathbf{x}(u,v) - \frac{1}{\lambda}N(u,v))_u = (\mathbf{x}(u,v) - \frac{1}{\lambda}N(u,v))_v = 0.$$

Como

$$|\mathbf{x}(u,v) - \mathbf{y}(u,v)| = \frac{1}{|\lambda|},$$

todos os pontos de V estão contidos em uma esfera centrada em $\mathbf{y}$ com raio $\frac{1}{|\lambda|}$.

Isto demonstra a proposição localmente, isto é, para uma vizinhança de um ponto $p \in S$. Para completar a prova, observamos que, como S é conexa, dado qualquer outro ponto $r \in S$, existe uma curva contínua $\alpha : [0,1] \to S$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = r$. Para cada ponto $\alpha(t) \in S$ desta curva existe uma

vizinhança V_t em S contida ou em uma esfera ou em um plano, e tal que $\alpha^{-1}(V_t)$ é um intervalo aberto de $[0,1]$. A união $\cup\alpha^{-1}(V_t)$, $t \in [0,1]$ cobre $[0,1]$ e, como $[0,1]$ é um intervalo fechado, é coberto por um número finito de elementos da família $\{\alpha^{-1}(V_t)\}$ (teorema de Heine-Borel, Prop. 6 do apêndice ao capítulo 2). Portanto, $\alpha([0,1])$ é coberto por um número finito de vizinhanças V_t.

Se os pontos de uma destas vizinhanças coordenadas estão em um plano, todas as outras estarão também no mesmo plano. Como r é arbitrário, todos os pontos de S pertencem a este plano.

Se os pontos de uma destas vizinhanças coordenadas estão em uma esfera, o mesmo argumento mostra que todos os pontos de S pertencem à esfera, e isso completa a demonstração.

Q.E.D.

DEFINIÇÃO 9. *Seja p um ponto em S. Uma* direção assintótica *de S em p é uma direção de T_pS para a qual a curvatura normal é zero. Uma* curva assintótica *de S é uma curva conexa e regular $C \subset S$ tal que para cada $p \in C$ a reta tangente a C em p é uma direção assintótica.*

Segue-se imediatamente da definição que em um ponto elíptico não existem direções assintóticas.

Uma interpretação geométrica útil para as direções assintóticas é dada através da indicatriz de Dupin, que descreveremos agora.

Seja p um ponto de S. A *indicatriz de Dupin* em p é o conjunto de vetores de T_pS tais que $II_p(w) = \pm 1$.

Para escrever as equações da indicatriz de Dupin de uma maneira conveniente, sejam (ξ, η) as coordenadas cartesianas de T_pS na base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, onde e_1, e_2 são autovetores de dN_p. Dado $w \in T_pS$, sejam ρ e θ as "coordenadas polares" definidas por $w = \rho v$, com $|v| = 1$ e $v = e_1 \cos\theta + e_2 \operatorname{sen}\theta$, se $\rho \neq 0$. Pela fórmula de Euler,

$$\begin{aligned} \pm 1 &= II_p(w) = \rho^2 II_p(v) \\ &= k_1\rho^2\cos^2\theta + k_2\rho^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= k_1\xi^2 + k_2\eta^2, \end{aligned}$$

onde $w = \xi e_1 + \eta e_2$. Assim, as coordenadas (ξ, η) de um ponto da indicatriz de Dupin satisfazem a equação

$$k_1\xi^2 + k_2\eta^2 = \pm 1; \tag{1}$$

logo, a indicatriz de Dupin é a união de cônicas em T_pS. Notamos que a curvatura normal ao longo da direção determinada por w é $k_n(v) = II_p(v) = \pm\frac{1}{\rho^2}$.

Para um ponto elíptico, a indicatriz de Dupin é uma elipse (k_1 e k_2 têm o mesmo sinal); esta elipse degenera em um círculo se o ponto é umbílico não planar ($k_1 = k_2 \neq 0$).

Para um ponto hiperbólico, k_1 e k_2 têm sinais opostos. A indicatriz de Dupin é então formada por duas hipérboles com um par comum de linhas assintóticas (Fig. 3.13). Ao longo das direções assintóticas, a curvatura normal é zero; elas são, portanto, direções assintóticas. Isso justifica a terminologia e mostra que um ponto hiperbólico tem *exatamente* duas direções assintóticas.

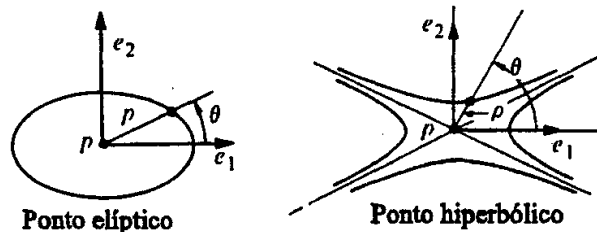



Figura 3-13. *A indicatriz de Dupin.*

Para um ponto parabólico, uma das curvatura principais é zero, e a indicatriz de Dupin degenera em um par de retas paralelas. A direção comum dessas retas é a única direção assintótica no ponto em questão.

No Exemplo 5 da seção 3.3, mostraremos uma propriedade interessante da indicatriz de Dupin.

Um conceito relacionado com o de direção assintótica é o de direções conjugadas, que definimos a seguir.

DEFINIÇÃO 10. *Seja p um ponto de uma superfície S. Dois vetores não nulos $w_1, w_2 \in T_pS$ são* conjugados *se $\langle dN_p(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, dN_p(w_2)\rangle = 0$. Duas direções r_1, r_2 em p são* conjugadas *se um par de vetores não nulos w_1, w_2, paralelos, respectivamente, a r_1 e r_2, são conjugados.*

É imediato verificar que a definição de direções conjugadas não depende da escolha dos vetores w_1 e w_2 em r_1 e r_2.

Segue-se da definição que as direções principais são conjugadas e que uma direção assintótica é conjugada a si mesma. Além disso, em um ponto umbílico

não-planar, todo par de direções ortogonais é um par de direções conjugadas; e em um ponto umbílico planar, toda direção é conjugada a qualquer outra direção.

Vamos supor que $p \in S$ não é um ponto umbílico, e seja $\{e_1, e_2\}$ a base ortonormal de T_pS determinada por $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$, $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$. Seja θ e φ os ângulos que um par de direções r_1 e r_2 fazem com e_1. Afirmamos que r_1 e r_2 são conjugadas se e somente se

$$k_1 \cos\theta \cos\varphi = -k_2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi. \tag{2}$$

Com efeito, r_1 e r_2 são conjugados se e somente se os vetores

$$w_1 = e_1 \cos\theta + e_2 \operatorname{sen}\theta \qquad w_2 = e_1 \cos\varphi + e_2 \operatorname{sen}\varphi$$

são conjugados. Assim,

$$0 = \langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = -k_1 \cos\theta \cos\varphi - k_2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi.$$

Portanto, vale a condição (2).

Quando k_1 e k_2 não são nulos (i.e., p é um ponto elíptico ou hiperbólico), a condição (2) nos leva a uma construção geométrica das direções conjugadas em termos da indicatriz de Dupin em p. Vamos descrever a situação em um ponto elíptico; a situação em um ponto hiperbólico é semelhante. Seja r uma reta passando pela origem de T_pS e considere os pontos de interseção q_1 e q_2 de r com a indicatriz de Dupin (Fig.3.14). As retas tangentes à indicatriz de Dupin em q_1 e q_2 são paralelas, e sua direção comum r' é conjugada a r. Deixaremos as provas destas afirmações para os Exercícios (Exercício 12).

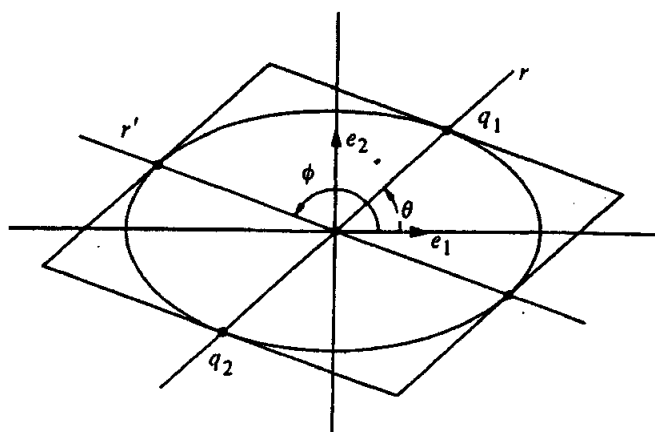



Figura 3-14. *Construção das direções conjugadas.*

Exercícios

1. Mostre que, em um ponto hiperbólico, as direções principais bissectam as direções assintóticas.

2. Mostre que, se uma superfície é tangente a um plano ao longo de uma curva, então os pontos dessa curva são parabólicos ou planares.

3. Seja $C \subset S$ uma curva regular sobre uma superfície S com curvatura Gaussiana $K > 0$. Mostre que a curvatura k de C em $p \in S$ satisfaz

$$|k| \geq \min(|k_1|, |k_2|),$$

onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais de S em p.

4. Suponha que uma superfície S tenha a propriedade $|k_1| \leq 1$, $|k_2| \leq 1$ em todos os pontos. É verdade que a curvatura k de uma curva em S também satisfaz $|k| \leq 1$?

5. Mostre que a curvatura média H em $p \in S$ é dada por

$$H = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} k_n(\theta)d\theta,$$

onde $k_n(\theta)$ é a curvatura normal em p na direção que faz um ângulo θ com uma direção fixa.

6. Mostre que a soma das curvaturas normais em um ponto $p \in S$, para qualquer par de direções ortogonais, é constante.

7. Mostre que se a curvatura média é zero em um ponto não-planar, então esse ponto tem duas direções assintóticas ortogonais.

8. Para as superfícies abaixo, descreva a região da esfera unitária coberta pela imagem da aplicação de Gauss:

   a. Parabolóide de revolução $z = x^2 + y^2$.
   b. Hyperbolóide de revolução $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
   c. Catenóide $x^2 + y^2 = \cosh^2 z$.

9. Prove que

a. A imagem $N \circ \alpha$ pela aplicação de Gauss $N : S \to S^2$ de uma curva regular parametrizada $\alpha : I \to S$ que não contém pontos planares ou parabólicos, é uma curva regular sobre a esfera S^2 (chamada *imagem esférica* de α).

b. Se $C = \alpha(I)$ é uma linha de curvatura, e k a sua curvatura em p, então

$$k = |k_n k_N|,$$

onde k_n é a curvatura normal em p ao longo da reta tangente a C e k_N é a curvatura da imagem esférica $N(C) \subset S^2$ em $N(p)$.

10. Suponha que o plano osculador de uma linha de curvatura $C \subset S$, que não é tangente a uma direção assintótica, faça um ângulo constante com o plano tangente a S ao longo de C. Prove que C é uma curva plana.

11. Seja p um ponto elíptico de uma superfície S, e sejam r e r' direções conjugadas em p. Considere r variando em T_pS e mostre que o valor mínimo para o ângulo de r com r' é atingido em um único par de direções em T_pS que são simétricas em relação às direções principais.

12. Seja p um ponto hiperbólico de uma superfície S, e seja r uma direção em T_pS. Descreva e justifique uma construção geométrica para encontrar a direção r', conjugada a r, em termos da indicatriz de Dupin (cf. construção no final da seção 3.2).

***13.** (*Teorema de Beltrami-Enneper.*) Mostre que o valor absoluto da torção τ em um ponto de uma curva assintótica, cuja curvatura não se anula, é dada por

$$|\tau| = \sqrt{-K},$$

onde K é a curvatura Gaussiana da superfície no ponto considerado.

***14.** Se uma superfície S_1 intersecta uma superfície S_2 ao longo de uma curva regular C, então a curvatura k de C em $p \in C$ é dada por

$$k^2 \operatorname{sen}^2 \theta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos\theta,$$

onde λ_1 e λ_2 são as curvaturas normais em p, ao longo da reta tangente a C, de S_1 e S_2, respectivamente, e θ é o ângulo formado pelos vetores normais a S_1 e S_2 em p.

15. (*Teorema de Joachimstahl.*) Suponha que S_1 e S_2 intersectam-se ao longo de uma curva regular C e fazem um ângulo $\theta(p)$, $p \in C$. Suponha que C é uma linha de curvatura de S_1. Prove que $\theta(p)$ é constante se e somente se C é uma linha de curvatura de S_2.

***16.** Mostre que os meridianos de um toro são linhas de curvatura.

17. Mostre que se $H \equiv 0$ em S, e S não tem pontos planares, então a aplicação de Gauss $N : S \to S^2$ tem a seguinte propriedade:

$$\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2)\rangle = -K(p)\langle w_1, w_2\rangle$$

para todo $p \in S$ e quaisquer $w_1, w_2 \in T_pS$. Mostre que a condição acima implica que o ângulo de duas curvas que se intersectam em S e o ângulo das suas imagens esféricas (cf. Exercício 9) são iguais a menos de sinal.

18. Sejam λ_1, λ_2, ..., λ_m as curvaturas normais em $p \in S$ ao longo de direções fazendo ângulos 0, $\frac{2\pi}{m}$, ..., $(m-1)\frac{2\pi}{m}$ com uma direção principal ($m > 2$). Prove que

$$\lambda_1 + ... + \lambda_m = mH,$$

onde H é a curvatura média em p.

***19.** Seja $C \subset S$ uma curva regular em S. Seja $p \in C$ e $\alpha(s)$ uma parametrização de C em p pelo comprimento de arco tal que $\alpha(0) = p$. Escolha em T_pS uma base positiva ortonormal $\{t, h\}$, onde $t = \alpha'(0)$. A *torção geodésica* τ_g de $C \subset S$ em p é definida por

$$\tau_g = \langle \frac{dN}{ds}(0), h\rangle.$$

Prove que

a. $\tau_g = (k_1 - k_2)\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi$, onde φ é o ângulo de e_1 a t.

b. Se τ é a torção de C, n o vetor normal (principal) de C e $\cos\theta = \langle N, n\rangle$, então

$$\frac{d\theta}{ds} = \tau - \tau_g.$$

c. As linhas de curvatura de S são caracterizadas por terem torção geodésica identicamente nula.

20. (*Teorema de Dupin*) Dizemos que três famílias de superfícies formam um *sistema triplamente ortogonal* em um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ se uma única superfície da cada uma dessas famílias passa por cada ponto de $p \in U$ e se as três superfícies que passam por p são, duas a duas, ortogonais. Use a parte c do Exercício 19 para provar o teorema de Dupin: *As superfícies de um sistema triplamente ortogonal se intersectam ao longo de linhas de curvatura.*

3.3 A Aplicação de Gauss em Coordenadas Locais

Na seção anterior, introduzimos alguns conceitos relacionados com o comportamento local da aplicação de Gauss. As definições foram dadas evitando o uso de coordenadas locais, a fim de dar ênfase à natureza geométrica dos entes introduzidos. Alguns exemplos simples puderam ser calculados diretamente das definições; esse método é, entretanto, ineficiente para lidar com situações mais gerais. Nesta seção, obteremos as expressões da segunda forma fundamental e da diferencial da aplicação de Gauss, em um sistema de coordenadas locais. Deste modo, teremos um método sistemático para o cálculo de exemplos específicos. Além disso, as expressões gerais obtidas são essenciais a uma investigação mais detalhada dos conceitos introduzidos.

Todas as parametrizações $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ consideradas nesta seção são compatíveis com a orientação N de S; isto é, em $\mathbf{x}(U)$,

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}.$$

Seja $\mathbf{x}(u, v)$ uma parametrização em um ponto $p \in S$ de uma superfície S, e seja $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S, com $\alpha(0) = p$. Para simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto p.

O vetor tangente a $\alpha(t)$ em p é $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$ e

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Como N_u e N_v pertencem a T_pS, podemos escrever

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \\ N_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \end{aligned} \tag{1}$$

e, portanto,

$$dN(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v;$$

isto é,

$$dN\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que, na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, dN é dada pela matriz (a_{ij}), $i, j = 1, 2$. Note que esta matriz não é necessariamente simétrica, a não ser que $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ seja uma base ortonormal.

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha'\rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'\rangle \\ &= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

onde, já que $\langle N, \mathbf{x}_u\rangle = \langle N, \mathbf{x}_v\rangle = 0$,

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u\rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu}\rangle, \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{x}_u\rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv}\rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu}\rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v\rangle, \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v\rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv}\rangle. \end{aligned}$$

Vamos agora obter os valores de a_{ij} em termos dos coeficientes e, f, g. A partir da Eq. (1), obtemos

$$\begin{aligned} -f = \langle N_u, \mathbf{x}_v\rangle &= a_{11}F + a_{21}G, \\ -f = \langle N_v, \mathbf{x}_u\rangle &= a_{12}E + a_{22}F, \\ -e = \langle N_u, \mathbf{x}_u\rangle &= a_{11}E + a_{21}F, \\ -g = \langle N_v, \mathbf{x}_v\rangle &= a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned} \tag{2}$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ (cf. seção 2.5). As relações (2) podem ser expressas em forma matricial por

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}; \tag{3}$$

donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

onde $(\ )^{-1}$ significa a matriz inversa de $(\ )$. Como pode-se verificar facilmente

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

e daí decorrem as seguintes expressões para os coeficientes (a_{ij}) da matriz de dN na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Convém mencionar que as equações (1), com os valores obtidos acima, são conhecidas como as *equações de Weingarten.*

A partir da Eq.(3), obtemos imediatamente

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \tag{4}$$

Para o cálculo da curvatura média, lembremos que $-k_1, -k_2$ são os autovalores de dN. Portanto, k_1 e k_2 satisfazem à equação

$$dN(v) = -kv = -kI(v) \qquad \text{para algum } v \in T_pS,\ v \neq 0,$$

onde I é a aplicação identidade. Decorre que a aplicação linear $dN + kI$ não é invertivel; logo, tem determinante nulo. Assim,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}+k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}+k \end{pmatrix} = 0$$

ou

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

Como k_1e k_2 são raízes da equação quadrática acima, concluímos que

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}; \tag{5}$$

donde

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

e portanto,

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K}. \tag{6}$$

A partir da relação acima, segue-se que, escolhendo $k_1(q) \geq k_2(q)$, $q \in S$, as funções k_1 e k_2 são contínuas em S. Além disso, k_1 e k_2 são diferenciáveis em S, com a possível exceção dos pontos umbílicos ($H^2 = K$) de S.

Nos cálculos deste capítulo, convém fazer a seguinte abreviação

$$\langle u \wedge v, w\rangle = (u, v, w) \qquad \text{para todo } u, v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Lembremos que isso é meramente o determinante de uma matriz 3×3 cujas colunas (ou linhas) são as componentes dos vetores u, v, w na base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 1. Vamos calcular a curvatura Gaussiana dos pontos do toro, cobertos pela parametrização (cf. Exemplo 6 da seção 2.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u,v) &= ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\,\text{sen}\ v, r\ \text{sen}\ u), \\ 0 &< u < 2\pi, \qquad 0 < v < 2\pi. \end{aligned}$$

Para o cálculo dos coeficientes e, f, g, necessitamos de N (portanto de $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$), $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$ e $\mathbf{x}_{vv}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u &= (-r\,\text{sen}\; u\cos v, -r\,\text{sen}\; u\,\text{sen}\; v, r\cos u),\\
\mathbf{x}_v &= (-(a+r\cos u)\,\text{sen}\; v, (a+r\cos u)\cos v, 0),\\
\mathbf{x}_{uu} &= (-r\cos u\cos v, -r\cos u\,\text{sen}\; v, -r\,\text{sen}\; u),\\
\mathbf{x}_{uv} &= (r\,\text{sen}\; u\,\text{sen}\; v, -r\,\text{sen}\; u\cos v, 0),\\
\mathbf{x}_{vv} &= (-(a+r\cos u)\cos v, -(a+r\cos u)\,\text{sen}\; v, 0).
\end{aligned}$$

Com os valores acima, obtemos

$$\begin{aligned}
E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle = r^2, \qquad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle = 0,\\
G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v\rangle = (a+r\cos u)^2.
\end{aligned}$$

Introduzindo os valores acima em $e = \langle N, \mathbf{x}_{uu}\rangle$, e lembrando que $|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG-F^2}$, temos

$$e = \langle \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}, \mathbf{x}_{uu}\rangle = \frac{(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{r^2(a+r\cos u)}{r(a+r\cos u)} = r.$$

Da mesma forma, obtemos

$$\begin{aligned}
f &= \frac{(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv})}{r(a+r\cos u)} = 0,\\
g &= \frac{(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv})}{r(a+r\cos u)} = \cos u(a+r\cos u).
\end{aligned}$$

Finalmente, como $K = (eg-f^2)/(EG-F^2)$, temos que

$$K = \frac{\cos u}{r(a+r\cos u)}\,.$$

Da expressão acima, decorre que $K = 0$ ao longo dos paralelos $u = \frac{\pi}{2}$ e $u = \frac{3\pi}{2}$; os pontos desses paralelos são, portanto, parabólicos. Na região do toro dada por $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$, K é negativa (note que $r > 0$ e $a > r$); os pontos dessa região são, portanto, hiperbólicos. Na região dada por $0 < u < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < u < 2\pi$, a curvatura é positiva e os pontos são elípticos. (Fig. 3.15).

Como aplicação da expressão para a segunda forma fundamental em coordenadas, vamos demonstrar uma proposição que informa sobre a posição de

uma superfície, em uma vizinhança de um ponto elíptico ou hiperbólico, em relação ao plano tangente neste ponto. Por exemplo, se olharmos para um ponto elíptico do toro do Exemplo 1, vemos que a superfície situa-se em um lado do plano tangente neste ponto (ver Fig. 3.15). Por outro lado, se p é um ponto hiperbólico do toro T e $V \subset T$ é uma vizinhança qualquer de p, podemos encontrar pontos de V nos dois lados de T_pT, por menor que seja V. Este exemplo retrata um fato local geral, que é descrito na seguinte proposição.

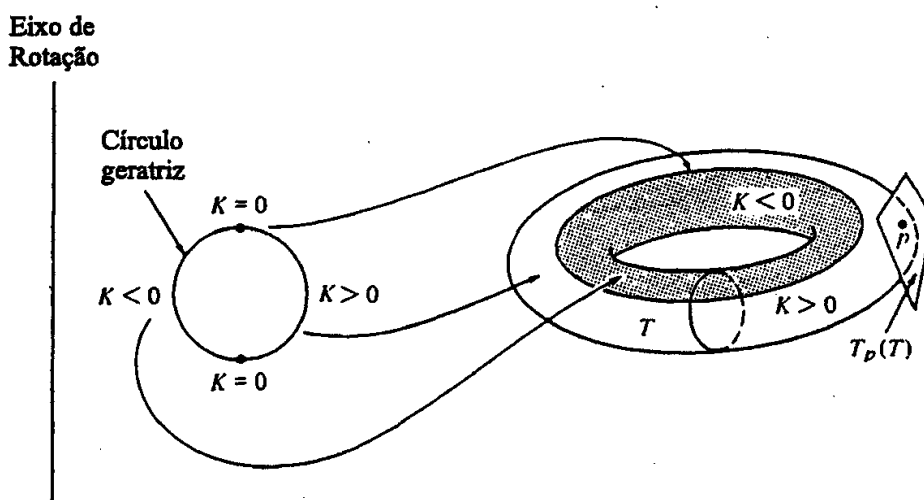



Figura 3-15

Proposição 1. *Seja $p \in S$ um ponto elíptico de uma superfície S. Então existe uma vizinhança V de p em S tal que todos os pontos de V estão do mesmo lado do plano tangente T_pS. Seja $p \in S$ um ponto hiperbólico. Então em cada vizinhança de p existem pontos de ambos os lados de T_pS.*

Demonstração. Seja $\mathbf{x}(u,v)$ uma parametrização em p, com $\mathbf{x}(0,0) = p$. A distância d, de um ponto $q = \mathbf{x}(u,v)$ ao plano tangente T_pS é dada por (Fig. 3.16)

$$d = \langle \mathbf{x}(u,v) - \mathbf{x}(0,0), N(p)\rangle.$$

Como $\mathbf{x}(u,v)$ é diferenciável, temos a fórmula de Taylor:

$$\mathbf{x}(u,v) = \mathbf{x}(0,0) + \mathbf{x}_u u + \mathbf{x}_v v + \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{uu}u^2 + 2\mathbf{x}_{uv}uv + \mathbf{x}_{vv}v^2) + \bar{R},$$

onde as derivadas são calculadas em $(0,0)$ e o resto $\bar{R}$ satisfaz a condição

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\bar{R}}{u^2+v^2} = 0.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} d &= \langle \mathbf{x}(u,v) - \mathbf{x}(0,0), N(p)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\{\langle \mathbf{x}_{uu}, N(p)\rangle u^2 + 2\langle \mathbf{x}_{uv}, N(p)\rangle uv + \langle \mathbf{x}_{vv}, N(p)\rangle v^2\} + R \\ &= \frac{1}{2}(eu^2 + 2fuv + gv^2) + R = \frac{1}{2}II_p(w) + R, \end{aligned}$$

onde $w = \mathbf{x}_u u + \mathbf{x}_v v$, $R = \langle \bar{R}, N(p)\rangle$, $\lim_{w\to 0}(R/|w|^2) = 0$.

Em um ponto elíptico p, $II_p(w)$ tem um sinal fixo. Portanto, para todo (u,v) suficientemente próximo a p, d tem o mesmo sinal que $II_p(w)$; isto é, todos os pontos (u,v) estão do mesmo lado de T_pS.

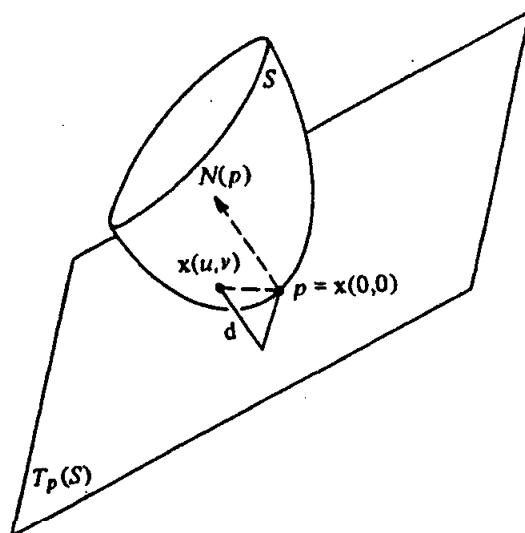



Figura 3-16

Para um ponto hiperbólico p, em cada vizinhança de p existem pontos (u,v) e $(\bar{u},\bar{v})$ tais que $II_p(w/|w|)$ e $II_p(\bar{w}/|\bar{w}|)$ têm sinais opostos (aqui $\bar{w} = \mathbf{x}_u\bar{u} + \mathbf{x}_v\bar{v}$); tais pontos pertencem, portanto, a lados distintos de T_pS.

Q.E.D.

Não se pode fazer uma afirmação análoga à Prop. 1 em uma vizinhança de um ponto parabólico ou planar. Nos exemplos de pontos parabólicos e planares já vistos (cf. Exemplos 3 e 6 da seção 3.2) a superfície está em um lado do plano tangente, e pode ter uma reta em comum com esse plano. Os exemplos seguintes mostram que uma situação totalmente diferente pode acontecer.

Exemplo 2. A "sela de macaco" (ver Fig. 3.17) é dada por

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = u^3 - 3v^2u.$$

Um cálculo direto mostra que em $(0,0)$ os coeficientes da segunda forma fundamental são $e = f = g = 0$; o ponto $(0,0)$ é, portanto, um ponto planar. Entretanto, em qualquer vizinhança desse ponto, existem pontos de ambos os lados do seu plano tangente.

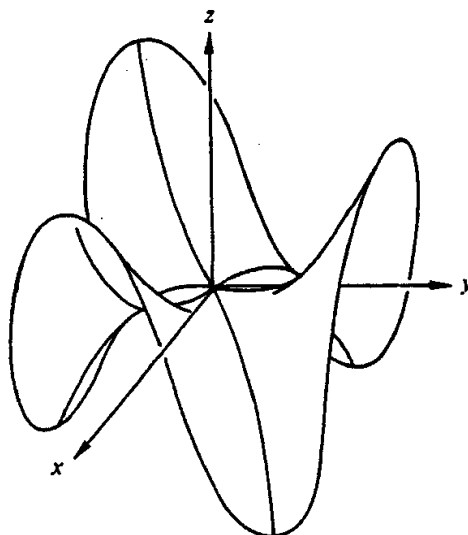



Figura 3-17

Exemplo 3. Considere a superfície obtida girando a curva $z = y^3$, $-1 < z < 1$, em torno da reta $z = 1$ (ver Fig. 3.18). Um cálculo simples mostra que os pontos gerados pela rotação da origem O são pontos parabólicos. Omitiremos esse cálculo, pois, em breve (Exemplo 4), demonstraremos que os paralelos e meridianos de uma superfície de revolução são linhas de curvatura; isso, junto com o fato de que, para os pontos em questão, os meridianos (curvas da forma $y = x^3$) têm curvatura zero e os paralelos são seções normais, implicam a afirmação acima. Note que em qualquer vizinhança de um tal ponto parabólico existem pontos de ambos os lados do plano tangente.

A expressão da segunda forma fundamental em coordenadas locais é particularmente útil para estudar as direções principais e direções assintóticas. Trataremos primeiro das direções assintóticas.

Seja $\mathbf{x}(u,v)$ uma parametrização de $p \in S$, com $\mathbf{x}(0,0) = p$, e sejam $e(u,v) = e$, $f(u,v) = f$, e $g(u,v) = g$ os coeficientes da segunda forma fundamental nesta parametrização.

Lembramos que (ver Def. 9 da seção 3.2) uma curva regular conexa C em uma vizinhança coordenada $\mathbf{x}$ é uma curva assintótica se e somente se,

para uma parametrização qualquer $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $t \in I$, de C temos $II_p(\alpha'(t)) = 0$, para todo $t \in I$; isto é, se e somente se

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0, \qquad t \in I. \tag{7}$$

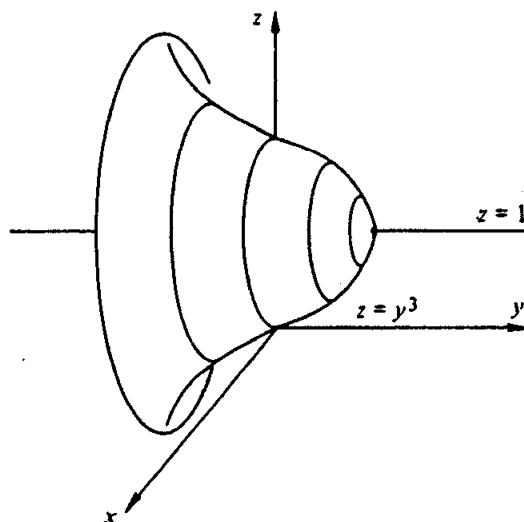



Figura 3-18

Por esta razão, a Eq. (7) é chamada de *equação diferencial das linhas assintóticas*. Na próxima seção, daremos um significado mais preciso a esta expressão. No momento, queremos apenas concluir de (7) a seguinte afirmação: *Uma condição necessária e suficiente para uma parametrização em uma vizinhança de um ponto hiperbólico* ($eg - f^2 < 0$) *ser tal que as curvas coordenadas da parametrização sejam curvas assintóticas é que* $e = g = 0$.

De fato, se ambas as curvas $u = const.$, $v = v(t)$ e $u = u(t)$, $v = const.$ satisfazem a Eq.(7), obtemos $e = g = 0$. Reciprocamente, se vale esta última condição e $f \neq 0$, a Eq.(7) se reduz a $fu'v' = 0$, que é evidentemente satisfeita pelas curvas coordenadas.

Passemos agora às direções principais, mantendo as notações já estabelecidas.

Uma curva regular conexa C em uma vizinhança coordenada de $\mathbf{x}$ é uma linha de curvatura se e somente se para uma parametrização qualquer $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $t \in I$, de C temos (cf. Prop. 3 da seção 3.2)

$$dN(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

Segue-se que as funções $u'(t)$ $v'(t)$ satisfazem o sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{gF - fG}{EG - F^2}v' &= \lambda u', \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2}u' + \frac{fF - gE}{EG - F^2}v' &= \lambda v'. \end{aligned}$$

Eliminando λ no sistema acima, obtemos a equação diferencial das linhas de curvatura,

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0,$$

que pode ser escrita, de maneira mais simétrica, como

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Utilizando o fato das direções principais serem ortogonais, decorre facilmente da Eq.(8) que *uma condição necessária e suficiente para que as curvas coordenadas de uma parametrização sejam linhas de curvatura é que* $F = f = 0$.

Exemplo 4 (*Superfícies de Revolução*). Considere a superfície de revolução parametrizada por (cf. Exemplo 4 da seção 2.3; substituímos f e g por φ e ψ, respectivamente)

$$\mathbf{x}(u, v) = (\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\operatorname{sen} u, \psi(v)),$$

$0 < u < 2\pi$, $a < v < b$, $\varphi(v) > 0$.

Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = \varphi^2, \qquad F = 0, \qquad G = (\varphi')^2 + (\psi')^2.$$

Convém supor que a curva geratriz é parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, que

$$(\varphi')^2 + (\psi')^2 = G = 1.$$

O cálculo dos coeficientes da segunda forma fundamental é simples e fornece

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} -\varphi \operatorname{sen} u & \varphi' \cos u & -\varphi \cos u \\ \varphi \cos u & \varphi' \operatorname{sen} \theta & -\varphi \operatorname{sen} u \\ 0 & \psi' & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\varphi\psi' \\
f &= 0, \\
g &= \psi'\varphi'' - \psi''\varphi'.
\end{aligned}
$$

Como $F = f = 0$, concluímos que os paralelos ($v = const.$) e os meridianos ($u = const.$) de uma superfície de revolução são linhas de curvatura (este fato foi usado no Exemplo 3).

Tendo em vista que

$$
K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{\psi'(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{\varphi}
$$

e que φ é positiva, segue-se que os pontos parabólicos são dados por $\psi' = 0$ (a reta tangente à curva geratriz é perpendicular ao eixo de revolução) ou $\psi'\varphi'' - \psi''\varphi' = 0$ (a curvatura da curva geratriz é zero). Um ponto que satisfaz às duas condições é um ponto planar, já que essas condições implicam que $e = f = g = 0$.

Convém exibir ainda uma outra expressão para a curvatura Gaussiana. Diferenciando $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$, obtemos $\varphi'\varphi'' = -\psi'\psi''$. Assim,

$$
K = -\frac{\psi'(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{\varphi} = -\frac{(\psi')^2\varphi'' + (\varphi')^2\varphi''}{\varphi} = -\frac{\varphi''}{\varphi}. \tag{9}
$$

A equação (9) é uma expressão conveniente para a curvatura Gaussiana de uma superfície de revolução. Ela pode ser usada, por exemplo, para determinar as superfícies de revolução com curvatura Gaussiana constante (cf. Exercício 7).

Para o cálculo das curvaturas principais, faremos primeiro uma observação geral: *se a parametrização de uma superfície regular é tal que* $F = f = 0$, *então as curvaturas principais são dadas por* $\frac{e}{E}$ *e* $\frac{g}{G}$. De fato, nesse caso, a curvatura Gaussiana e a curvatura média são dadas por (cf. Eqs. (4) e (5))

$$
K = \frac{eg}{EG}, \qquad H = \frac{1}{2}\frac{eG + gE}{EG}.
$$

A nossa afirmação decorre imediatamente do fato de K ser o produto e $2H$ a soma das curvaturas principais.

Assim, as curvaturas principais de uma superfície de revolução são dadas por

$$\frac{e}{E} = -\frac{\psi'\varphi}{\varphi^2} = -\frac{\psi'}{\varphi} \qquad \frac{g}{G} = \psi'\varphi'' - \psi''\varphi'; \tag{10}$$

daí, a curvatura média de uma tal superfície é

$$H = \frac{1}{2}\frac{-\psi' + \varphi(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{\varphi}. \tag{11}$$

Exemplo 5. Muitas vezes uma superfície é dada como o gráfico de uma função diferenciável (cf. Prop. 1, seção 2.2) $z = h(x,y)$, onde (x,y) pertence a um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. É, portanto, conveniente ter à mão as fórmulas para os conceitos relevantes neste caso. Para obtermos tais fórmulas, parametrizamos a superfície por

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, h(u,v)), \qquad (u,v) \in U,$$

onde $u = x$, $v = y$. Um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (1,0,h_u), \qquad \mathbf{x}_v = (0,1,h_y), \qquad \mathbf{x}_{uu} = (0,0,h_{uu}), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (0,0,h_{uv}), \qquad \mathbf{x}_{vv} = (0,0,h_{vv}). \end{aligned}$$

Assim,

$$N(x,y) = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

é um campo normal unitário sobre a superfície, e os coeficientes da segunda forma fundamental nessa orientação são dados por

$$\begin{aligned} e &= \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ f &= \frac{h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ g &= \frac{h_{yy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

A partir das expressões acima, qualquer fórmula pode ser facilmente calculada. Por exemplo, das Eqs. (4) e (5), obtemos a curvatura Gaussiana e a curvatura média:

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2}, \\
H &= \frac{1}{2}\frac{(1 + h_x^2)h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy} + (1 + h_y^2)h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Há ainda uma outra razão, talvez mais importante, para estudarmos superfícies dadas por $z = h(x, y)$. Ela vem do fato de que localmente toda superfície é o gráfico de uma função diferenciável (cf. Prop. 3, seção 2.2). Dado um ponto p de uma superfície S, podemos escolher os eixos coordenados de $\mathbb{R}^3$ de forma que a origem O das coordenadas seja p e que o eixo Oz de $\mathbb{R}^3$ esteja na direção da normal positiva de S em p (assim, o plano xy coincide com T_pS). Segue-se que uma vizinhança de p em S pode ser representada na forma $z = h(x, y)$, $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$, onde U é um conjunto aberto e h é uma função diferenciável (cf. Prop. 3, seção 2.2), com $h(0, 0) = 0$, $h_x(0, 0) = 0$, $h_y(0, 0) = 0$ (Fig. 3.19).

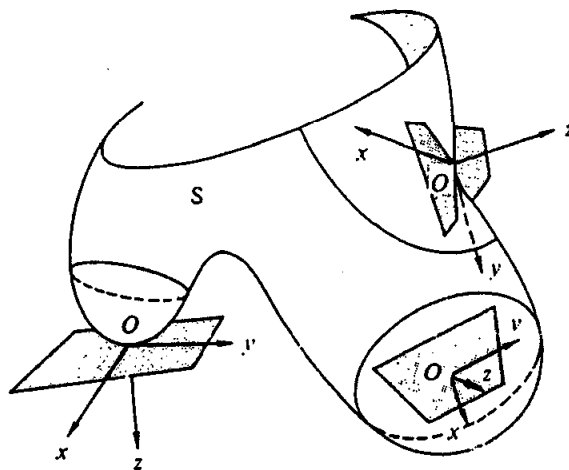



Figura 3-19. *Cada ponto de S possui uma vizinhança que pode representar-se como z = h(x,y).*

A segunda forma fundamental de S em p aplicada ao vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é, neste caso,

$$
h_{xx}(0, 0)x^2 + 2h_{xy}(0, 0)xy + h_{yy}(0, 0)y^2.
$$

No Cálculo elementar de duas variáveis, a forma quadrática acima é conhecida como a *Hessiana* de h em $(0,0)$. Assim, a Hessiana de h em $(0,0)$ é a segunda forma fundamental de S em p.

Vamos aplicar as considerações acima para dar uma interpretação geométrica da indicatriz de Dupin. Usando a mesma notação que acima, seja $\varepsilon > 0$ um número pequeno de forma que

$$C = \{(x,y) \in T_pS;\ h(x,y) = \varepsilon\}$$

seja uma curva regular (para obter $\varepsilon > 0$, pode-se ter que trocar a orientação da superfície). Queremos mostrar que, se p não é um ponto planar, a curva C é "aproximadamente" semelhante à indicatriz de Dupin de S em p (Fig. 3.20).

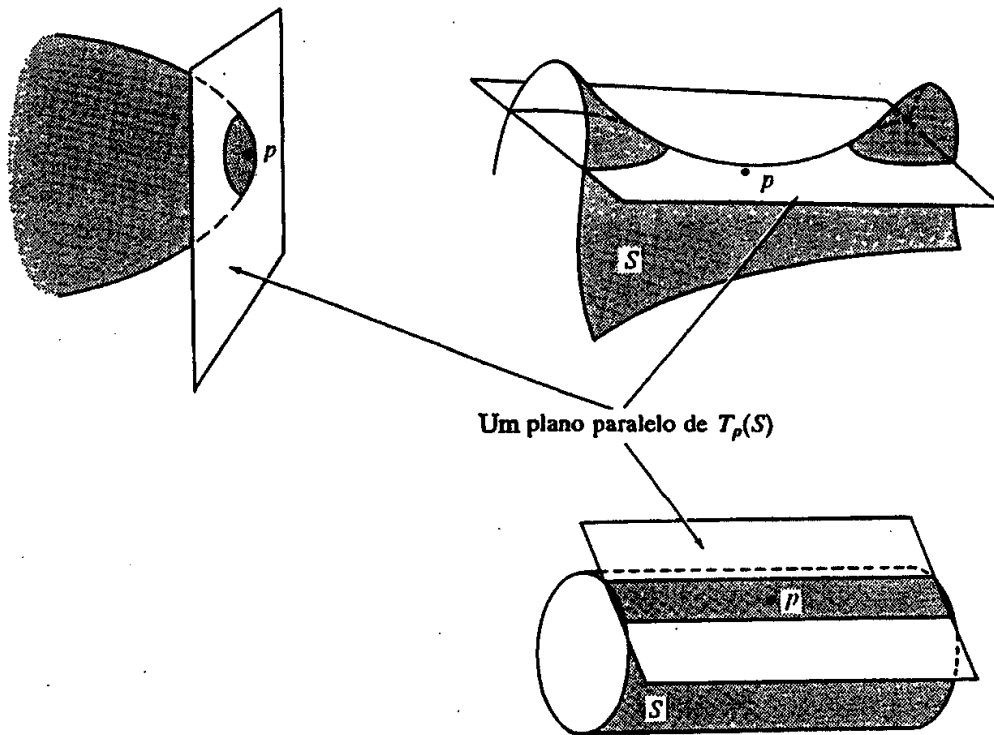



Figura 3-20

Para ver isso, vamos supor ainda que os eixos Ox e Oy estejam nas direções principais, sendo o eixo Ox na direção de curvatura principal máxima. Assim, $f = h_{xy}(0,0) = 0$ e

$$k_1(p) = \frac{e}{E} = h_{xx}(0,0), \qquad k_2 = \frac{g}{G} = h_{yy}(0,0).$$

Considerando o desenvolvimento de Taylor de $h(x,y)$ em torno de $(0,0)$, e levando em conta que $h_x(0,0) = 0 = h_y(0,0)$, obtemos

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \frac{1}{2}(h_{xx}(0,0)x^2 + 2h_{xy}(0,0)xy + h_{yy}(0,0)y^2) + R \\ &= \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) + R, \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R}{x^2+y^2} = 0.$$

Assim, a curva C é dada por

$$k_1x^2 + k_2y^2 + 2R = 2\varepsilon.$$

Se p não é um ponto planar, podemos considerar $k_1x^2 + k_2y^2 = 2\varepsilon$ como uma aproximação de primeira ordem de C em uma vizinhança de p. Usando a homotetia (ou semelhança),

$$x = \bar{x}\sqrt{2\varepsilon}, \qquad y = \bar{y}\sqrt{2\varepsilon},$$

temos que $k_1x^2 + k_2y^2 = 2\varepsilon$ é transformada na curva

$$k_1\bar{x}^2 + k_2\bar{y}^2 = 1,$$

que é a indicatriz de Dupin em p. Isso significa que *se p não é um ponto planar, a interseção de S com um plano paralelo a T_pS e próximo a p é, em uma aproximação de primeira ordem, uma curva semelhante à indicatriz de Dupin em p.*

Se p é um ponto planar, essa interpretação deixa de ser válida (cf. Exercício 11).

Para concluir essa seção, daremos uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana em termos da aplicação de Gauss $N : S \to S^2$. Na verdade, foi dessa maneira que o próprio Gauss introduziu a curvatura.

Para fazê-lo, precisamos primeiro de uma definição.

Sejam S e $\bar{S}$ duas superfícies regulares orientadas. Seja $\varphi : S \to \bar{S}$ uma aplicação diferenciável e suponha que para algum $p \in S$, $d\varphi_p$ seja não-singular. Dizemos que φ *preserva orientação* em p se dada uma base positiva

$\{w_1, w_2\}$ em T_pS, então $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$ é uma base positiva em $T_{\varphi(p)}\bar{S}$. Se $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$ não é uma base positiva, dizemos que φ *reverte orientação* em p.

Observamos agora que tanto S como a esfera unitária são mergulhadas em $\mathbb{R}^3$. Assim, uma orientação N em S induz uma orientação N em S^2. Seja $p \in S$ tal que dN_p é não-singular. Como, para uma base $\{w_1, w_2\}$ em T_pS,

$$dN_p(w_1) \wedge dN_p(w_2) = \det(dN_p)(w_1 \wedge w_2) = Kw_1 \wedge w_2,$$

a aplicação de Gauss N preserva a orientação em $p \in S$ se $K(p) > 0$ e reverte a orientação em $p \in S$ se $K(p) < 0$. Intuitivamente, isso significa o seguinte (Fig. 3.21): uma orientação de T_pS induz uma orientação para pequenas curvas fechadas em S, em torno de p; a imagem por N dessas curvas terá orientação igual ou oposta às primeiras curvas, conforme o ponto p seja elíptico ou hiperbólico, respectivamente.

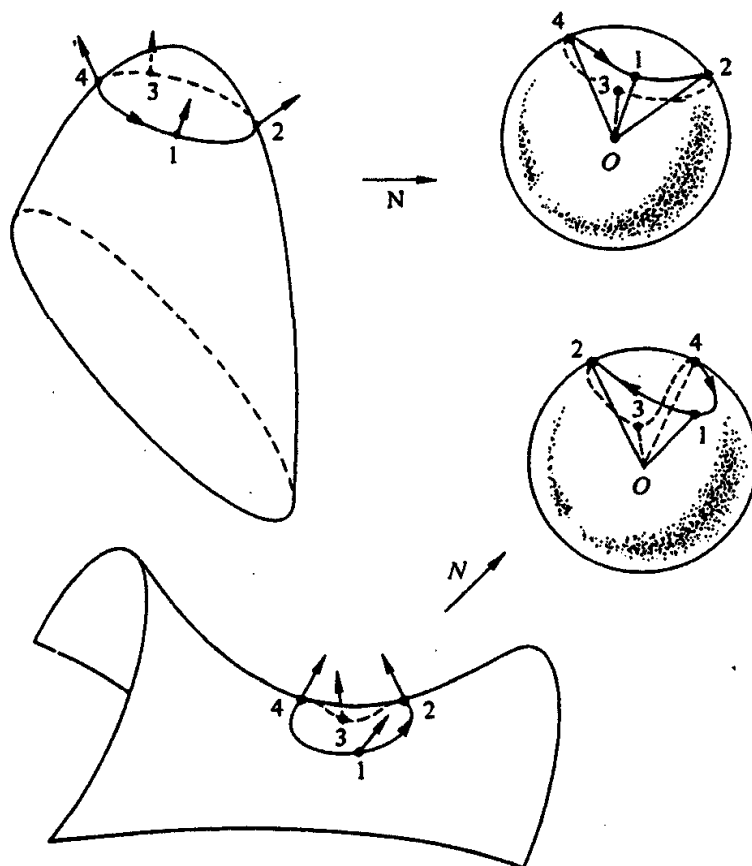



Figura 3-21. *A aplicação de Gauss preserva a orientação em um ponto elíptico e inverte a orientação em um ponto hiperbólico.*

Para levar tal fato em consideração, faremos a convenção de que a área de uma região contida em uma vizinhança conexa V, onde $K \neq 0$, e a área da sua imagem por N têm o mesmo sinal se $K > 0$ em V, e sinais opostos se $K < 0$ em V (como V é conexo, K não muda de sinal em V).

Podemos agora enunciar a prometida interpretação geométrica da curvatura Gaussiana K, para $K \neq 0$.

Proposição 2. *Seja p um ponto de uma superfície S tal que a curvatura Gaussiana $K(p) \neq 0$, e seja V uma vizinhança conexa de p onde K não muda de sinal. Então*

$$K(p) = \lim_{A \to 0} \frac{A'}{A},$$

onde A é a área de uma região $B \subset V$ contendo p, A' é a área da imagem de B pela aplicação de Gauss $N : S \to S^2$, e o limite é tomado através de uma sequência de regiões B_n que convergem para p, no sentido em que toda esfera centrada em p contém todos B_n, para n suficientemente grande.

Demonstração. A área A de B é dada por (cf. seção 2.5)

$$A = \iint_R |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv,$$

onde $\mathbf{x}(u, v)$ é uma parametrização em p, cuja vizinhança coordenada contém V (podemos supor V suficientemente pequena) e R é a região do plano uv correspondente a B. A área A' de $N(B)$ é

$$A' = \iint_R |N_u \wedge N_v| \, dudv.$$

Utilizando a Eq.(1), a definição de K, e a equação acima, podemos escrever

$$A' = \iint_R K \, |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv. \tag{12}$$

Passando ao limite, e indicando por R a área da região R, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{A \to 0} \frac{A'}{A} &= \lim_{A \to 0} \frac{\frac{A'}{R}}{\frac{A}{R}} = \frac{\lim_{R \to 0} \frac{1}{R} \iint_R K \, |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv}{\lim_{R \to 0} \frac{1}{R} \iint_R |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv} \\ &= \frac{K \, |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = K \end{aligned}$$

(observe que utilizamos o teorema do valor médio para integrais duplas), e isso demonstra a proposição.

Q.E.D.

Observação. Comparando a proposição anterior com a expressão da curvatura

$$k = \lim_{s \to o} \frac{\sigma}{s}$$

de uma curva plana C em p (aqui s é o comprimento de arco de um pequeno segmento de C contendo p, e σ é o comprimento de arco da imagem deste segmento na indicatriz das tangentes; cf. Exercício 3 da seção 1.5), vemos que a curvatura Gaussiana K é o análogo, para superfícies, da curvatura k para curvas planas.

Exercícios

1. Mostre que para o ponto $(0,0,0)$ do hiperbolóide $z = axy$ temos $K = -a^2$ e $H = 0$.

***2.** Determine as curvas assintóticas e as linhas de curvatura do helicóide $x = v \cos u$, $y = v \operatorname{sen} u$, $z = cu$, e mostre que a sua curvatura média é zero.

***3.** Determine as curvas assintóticas do catenóide

$$\mathbf{x}(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \operatorname{sen} u, v).$$

4. Determine as curvas assintóticas e as linhas de curvatura de $z = xy$.

5. Considere a superfície parametrizada (*Superfície de Enneper*)

$$\mathbf{x}(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$$

e mostre que

a. Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, \qquad F = 0.$$

b. Os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$e = 2, \qquad g = -2, \qquad f = 0.$$

c. As curvaturas principais são

$$k_1 = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}, \qquad k_2 = -\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}.$$

d. As linhas de curvatura são curvas coordenadas.

e. As linhas assintóticas são $u + v = const.$ e $u - v = const.$.

6. (Uma superfície com $K \equiv -1$; a *pseudo-esfera.*)

***a.** Determine uma equação para uma curva plana C, tal que o segmento da tangente entre o ponto de tangência e uma reta r do plano, que não encontra a curva C, é constante e igual a 1 (esta curva é chamada a *tractriz;* ver Fig. 1.9).

b. Faça uma rotação da tractriz em torno da reta r; verfique se a "superfície" de revolução obtida (a pseudo-esfera; ver Fig.3.22) é regular e encontre uma parametrização de uma vizinhança de um ponto regular.

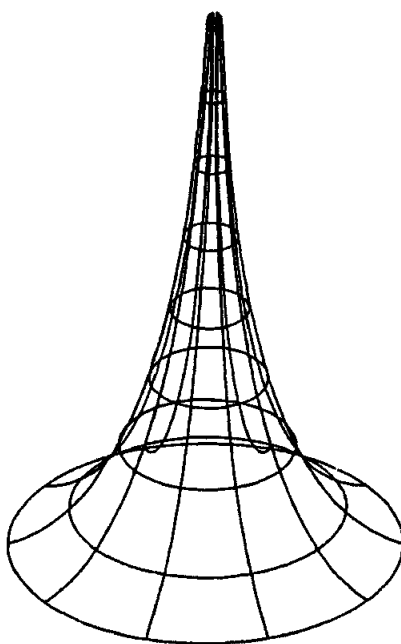



Figura 3-22. *A pseudoesfera.*

c. Mostre que a curvatura Gaussiana de qualquer ponto regular da pseudo-esfera é -1.

7. (*Superfícies de Revolução com Curvatura Constante.*)

$(\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\,sen\,u, \psi(v))$, $\varphi(v) \neq 0$, é dada como uma superfície de revolução com curvatura Gaussiana constante K. Para determinar as funções φ e ψ, escolha o parâmetro v de tal modo que $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$ (geometricamente, isso significa que v é o comprimento de arco da curva geratriz $(\varphi(v), \psi(v))$). Mostre que

a. φ satisfaz $\varphi'' + K\varphi = 0$ e ψ é dada por $\psi = \int \sqrt{1-(\varphi')^2}dv$; assim, $0 < u < 2\pi$, e o domínio de v é tal que a integral acima faça sentido.

b. Todas as superfícies de revolução com curvatura constante $K = 1$ que intersectam o plano xy ortogonalmente são dadas por

$$\varphi(v) = C\cos v, \qquad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 v}dv,$$

onde C é uma constante ($C = \varphi(0)$). Determine o domínio de v e esboce um perfil da superfície no plano xz para os casos $C = 1$, $C > 1$, $C < 1$. Observe que $C = 1$ nos dá a esfera (Fig. 3.23).

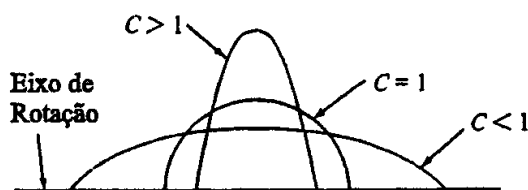



Figura 3-23

c. Todas as superfícies de revolução com curvatura constante $K = -1$ podem ser dadas por um dos seguintes tipos:

1. $\varphi(v) = C\cosh v, \qquad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \operatorname{senh}^2 v}\, dv.$
2. $\varphi(v) = C\operatorname{senh} v, \qquad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \cosh^2 v}\, dv.$
3. $\varphi(v) = e^v, \qquad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - e^{2v}}dv.$

Determine o domínio de v e faça um esboço do perfil da superfície no plano xz.

d. A superfície do tipo 3 na parte c é a pseudo-esfera do Exercício 6.

e. As únicas superfícies de revolução com $K = 0$ são o cilindro circular reto, o cone circular reto e o plano.

8. (*Contacto de ordem* ≥ 2 *para Superfícies.*) Duas superfícies S e $\bar{S}$, com um ponto p em comum, têm um *contacto de ordem* ≥ 2 em p se existem parametrizações $\mathbf{x}(u,v)$ e $\bar{\mathbf{x}}(u,v)$ em p de S e $\bar{S}$, respectivamente, tais que

$$\mathbf{x}_u = \bar{\mathbf{x}}_u, \qquad \mathbf{x}_v = \bar{\mathbf{x}}_v, \qquad \mathbf{x}_{uu} = \bar{\mathbf{x}}_{uu}, \qquad \mathbf{x}_{uv} = \bar{\mathbf{x}}_{uv}, \qquad \mathbf{x}_{vv} = \bar{\mathbf{x}}_{vv},$$

em p. Prove o seguinte:

***a.** Sejam S e $\bar{S}$ com um contacto de ordem ≥ 2 em p; $\mathbf{x} : U \to S$ e $\bar{\mathbf{x}} : U \to \bar{S}$ parametrizações arbitrárias em p de S e $\bar{S}$, respectivamente; e $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$. Então as derivadas parciais de ordem ≤ 2 de $f \circ \bar{\mathbf{x}} : U \to \mathbb{R}$ são nulas em $\bar{\mathbf{x}}^{-1}(p)$ se e somente se as derivadas parciais de ordem ≤ 2 de $f \circ \mathbf{x} : U \to R$ são nulas em $\mathbf{x}^{-1}(p)$.

***b.** Sejam S e $\bar{S}$ com um contacto de ordem ≥ 2 em p. Sejam $z = f(x,y)$, $z = \bar{f}(x,y)$ as equações, em uma vizinhança de p, de S e $\bar{S}$, respectivemente; onde o plano xy é o plano tangente comum em $p = (0,0)$. Então a função $f(x,y) - \bar{f}(x,y)$ tem todas as derivadas parciais de ordem ≤ 2 iguais a zero.

c. Seja p um ponto em uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$. Seja $Oxyz$ um sistema de coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^3$ tal que $O = p$ e que o plano xy seja o plano tangente de S em p. Mostre que o parabolóide

$$z = \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy}), \qquad (\star)$$

obtido desprezando-se os termos de ordem maior ou igual a três no desenvolvimento de Taylor em torno de $p = (0,0)$, tem contacto de ordem ≥ 2 em p com S (a superfície $(\star)$ é chamada o *parabolóide osculador* de S em p).

***d.** Se um parabolóide (incluindo os casos degenerados do plano e do cilindro parabólico) tem contacto de ordem ≥ 2 com uma superfície S em p, então ele é o parabolóide osculador de S em p.

e. Se duas superfícies têm um contacto de ordem ≥ 2 em p, então o parabolóide osculador de S e $\bar{S}$ em p coincidem. Conclua que a curvatura Gaussiana e a curvatura média de S e $\bar{S}$ são iguais em p.

f. A noção de contacto de ordem ≥ 2 é invariante por difeomorfismos de $\mathbb{R}^3$; isto é, se S e $\bar{S}$ têm um contacto de ordem ≥ 2 em p e $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um difeomorfismo, então $\varphi(S)$ e $\varphi(\bar{S})$ têm um contacto de ordem ≥ 2 em $\varphi(p)$.

g. Se S e $\bar{S}$ têm um contacto de ordem ≥ 2 em p, então

$$\lim_{r \to 0} \frac{d}{r^2} = 0,$$

onde d é o comprimento do segmento determinado pelas interseções com as superfícies, de uma paralela à reta normal a $T_pS = T_p\bar{S}$, e a uma distância r de p.

9. (*Contacto de Curvas.*) Defina contacto de ordem $\geq n$ (n um inteiro ≥ 1) para curvas regulares em $\mathbb{R}^3$ tendo um ponto em comum p, e prove que

a. A noção de contacto de ordem $\geq n$ é invariante por difeomorfismos.

b. Duas curvas têm contacto de ordem ≥ 1 em p se e somente se elas são tangentes em p.

10. (*Contacto de Curvas e Superfícies*) Uma curva C e uma superfície S, tendo um ponto em comum p, têm um contacto de ordem $\geq n$ (n um inteiro ≥ 1) em p se existe uma curva $\bar{C} \subset S$ passando por p e tal que C e $\bar{C}$ têm contacto de ordem $\geq n$ em p. Prove que

a. Se $f(x, y, z) = 0$ é uma representação de uma vizinhança de p em S e $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma parametrização de C em p, com $\alpha(0) = p$, então C e S têm contacto de ordem $\geq n$ em p se e somente se

$$f(x(0), y(0), z(0)) = 0, \qquad \frac{df}{dt} = 0, ..., \frac{d^n f}{dt^n} = 0,$$

onde as derivadas são calculadas em $t = 0$.

b. Se um plano tem contacto de ordem ≥ 2 com uma curva C em p, então ele é o plano osculador de C em p.

c. Se uma esfera tem contacto de ordem ≥ 3 com uma curva C em p, e $\alpha(s)$ é uma parametrização pelo comprimento de arco dessa curva, com $\alpha(0) = p$, então o centro da esfera é dado por

$$\alpha(0) + \frac{1}{k}n + \frac{k'}{k^2\tau}b.$$

Uma tal esfera é chamada a *esfera osculatriz* de C em p.

11. Considere a sela de macaco S do Exemplo 2. Construa a indicatriz de Dupin em $p = (0,0,0)$ usando a definição da seção 3.2, e compare-a com a curva obtida como a interseção de S com um plano paralelo ao T_pS e próximo a p. Por que eles não são "aproximadamente semelhantes" (cf. Exemplo 5 da seção 3.3.) ? Tente repetir o argumento usado no Exemplo 5 da seção 3.3, e note onde ele não é válido.

12. Considere a superfície parametrizada

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(\operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} \theta v, \cos u + \log \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \varphi(v)\right),$$

onde φ é uma função diferenciável. Prove que

a. As curvas $v = const.$ estão contidas em planos que passam pelo eixo Oz e intersectam a superfície formando um ângulo constante θ dado por

$$\cos\theta = \frac{\varphi'}{\sqrt{1 + (\varphi')^2}}.$$

Conclua que as curvas $v = const.$ são linhas de curvatura da superfície.

b. O comprimento do segmento de uma reta tangente a uma curva $v = const.$, determinado pelo seu ponto de tangência com o eixo Oz, é constante e igual a 1. Conclua que as curvas $v = const.$ são tractrizes (cf. Exercício 6).

13. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação (uma *semelhança ou homotetia*) definida por $F(p) = cp$, $p \in \mathbb{R}^3$, c uma constante positiva. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e considere $F(S) = \bar{S}$. Mostre que $\bar{S}$ é uma superfície

regular, e encontre fórmulas relacionando as curvaturas, média e Gaussiana, H e K, de S com as curvaturas, média e Gaussiana, $\bar{H}$ e $\bar{K}$, de $\bar{S}$.

14. Considere a superfície obtida pela rotação da curva $y = x^3$, $-1 < x < 1$, em torno da reta $x = 1$. Mostre que os pontos obtidos pela rotação da origem $(0,0)$ da curva são pontos planares da superfície.

***15.** Dê um exemplo de uma superfície que tenha um ponto parabólico isolado p (isto é, existe uma vizinhança de p que não contém pontos parabólicos além de p).

***16.** Mostre que uma superfície que é compacta (i.e., é limitada e fechada em $\mathbb{R}^3$) tem um ponto elíptico.

17. Defina curvatura Gaussiana em uma superfície não-orientável. Pode-se definir curvatura média em uma superfície não-orientável?

18. Mostre que a faixa de Möbius da Fig. 3.1 pode ser parametrizada por

$$\mathbf{x}(u,v) = \left((2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}) \operatorname{sen} u, (2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}) \cos u, v \cos \frac{u}{2}\right)$$

e que a sua curvatura Gaussiana é

$$K = -\frac{1}{\{\frac{1}{4}v^2 + (2 - v \operatorname{sen} \frac{u}{2})^2\}^2}.$$

***19.** Obtenha as linhas assintóticas do hiperbolóide de uma folha $x^2+y^2-z^2 = 1$.

***20.** Determine os pontos umbílicos do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

***21.** Seja S uma superfície com orientação N. Seja $V \subset S$ um conjunto aberto em S e seja $f : V \subset S \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável arbitrária em V que não se anula. Sejam v_1 e v_2 dois campos vetoriais (tangentes) diferenciáveis em V tais que em cada ponto de V, v_1 e v_2 são ortonormais e $v_1 \wedge v_2 = N$.

a. Prove que a curvatura Gaussiana K de V é dada por

$$K = \frac{\langle d(fN)(v_1) \wedge d(fN)(v_2), fN \rangle}{f^3}.$$

A virtude dessa fórmula é que uma escolha inteligente de f pode simplificar o cálculo de K, como ilustra o item b.

b. Aplique o resultado acima para mostrar que se f é a restrição de

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

ao elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

então, a curvatura Gaussiana do elipsóide é

$$K = \frac{1}{a^2b^2c^2}\frac{1}{f^4}.$$

22. (*A Hessiana*) Seja $h : S \to R$ uma função diferenciável em uma superfície S, e seja $p \in S$ um ponto crítico de h (i.e., $dh_p = 0$). Seja $w \in T_pS$ e seja

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$$

uma curva parametrizada com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Defina

$$H_p h(w) = \left.\frac{d^2(h \circ \alpha)}{dt^2}\right|_{t=0}$$

a. Seja $\mathbf{x} : U \to S$ uma parametrização de S em p, e mostre que (aqui o fato de p ser um ponto crítico de h é essencial)

$$H_p h(u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v) = h_{uu}(p)(u')^2 + 2h_{uv}(p)u'v' + h_{vv}(p)(v')^2.$$

Conclua que $H_p h : T_pS \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática bem definida (i.e., não depende da escolha de $\mathbf{x}$) em T_pS. $H_p h$ é chamado a *Hessiana* de h em p.

b. Seja $h : S \to \mathbb{R}$ a função altura de S relativa ao T_pS; isto é, $h(q) = \langle q - p, N(p)\rangle$, $q \in S$. Verifique que p é um ponto crítico de h e assim, que a Hessiana H_ph está bem definida. Mostre que se $w \in T_pS$, $|w| = 1$, então

$$H_ph(w) = \text{curvatura normal em } p \text{ na direção de } w.$$

Conclua que a *Hessiana em p da função altura relativa ao T_pS é a segunda forma fundamental de S em p.*

23. (*Funções de Morse em Superfícies.*) Um ponto crítico $p \in S$ de uma função diferenciável $h : S \to \mathbb{R}$ é *não-degenerado* se a aplicação linear auto-adjunta A_ph associada à forma quadrática H_ph (cf. apêndice ao Capítulo 3) é não-singular (aqui H_ph é a Hessiana de h em p; cf. Exercício 22). Caso contrário, p é um ponto crítico *degenerado.* Uma função diferenciável em S é uma *função de Morse* se todos os seus pontos críticos são não-degenerados. Seja $h_r : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função distância de S a r; i.e.

$$h_r(q) = \sqrt{\langle q - r, q - r\rangle}, \qquad q \in S, \qquad r \in \mathbb{R}^3, \qquad r \notin S.$$

a. Mostre que $p \in S$ é um ponto crítico de h_r se e somente se a reta pr é ortogonal a S em p.

b. Seja p um ponto crítico de $h_r : S \to \mathbb{R}$. Seja $w \in T_pS$, $|w| = 1$, e seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Prove que

$$H_ph_r(w) = \frac{1}{h_r(p)} - k_n,$$

onde k_n é a curvatura normal em p na direção de w. Conclua que a base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, onde e_1 e e_2 estão nas direções principais de T_pS, diagonaliza a aplicação linear auto-adjunta A_ph_r. Conclua ainda que p é um ponto crítico degenerado de h_r se e somente se ou $h_r(p) = \frac{1}{k_1}$ ou $h_r(p) = \frac{1}{k_2}$, onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais em p.

24. (*Convexidade Local e Curvatura.*) Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é *localmente convexa* em um ponto $p \in S$ se existe uma vizinhança $V \subset S$ de p tal

que V está contida em um dos semi-espaços fechados determinados por T_pS em $\mathbb{R}^3$. Se, além disso, V tem apenas um ponto em comum com T_pS, então S é *estritamente localmente convexa* em p.

a. Prove que S é estritamente localmente convexa em p se as curvaturas principais de S em p são não-nulas e têm o mesmo sinal (isto é, a curvatura Gaussiana $K(p)$ satisfaz $K(p) > 0$).

b. Prove que se S é localmente convexa em p, então as curvaturas principais em p não têm sinais diferentes (assim, $K(p) \geq 0$).

c. Para mostrar que $K \geq 0$ não implica convexidade local, considere a superfície $f(x, y) = x^3(1 + y^2)$, definida no conjunto aberto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 < \frac{1}{2}\}$. Mostre que a curvatura Gaussiana desta superfície é não-negativa em U e, ainda assim, a superfície não é localmente convexa em $(0, 0) \in U$. (Um teorema não-trivial, devido a R. Sacksteder, implica que um tal exemplo não pode ser estendido ao $\mathbb{R}^2$ inteiro se insistirmos em manter a curvatura não-negativa; cf. Observação 3 da seção 5.6.)

***d.** O exemplo da parte **c** é também bastante especial, no seguinte sentido local. Seja p um ponto em uma superfície S, e suponha que exista uma vizinhança $V \subset S$ de p tal que as curvaturas principais em V não tenham sinais diferentes (isso não acontece no exemplo da parte *c*). Prove que S é localmente convexa em p.

3.4 Campos de Vetores*

Nesta seção usaremos os teoremas fundamentais das equações diferenciais ordinárias (existência, unicidade e dependência das condições iniciais) para provar a existência de certos sistemas de coordenadas em superfícies.

Se o leitor estiver disposto a admitir os Corolários 2, 3 e 4 no final desta seção (que podem ser compreendidos sem a leitura da seção), o conteúdo aqui exposto pode ser omitido em uma primeira leitura.

Começaremos com uma apresentação geométrica do material sobre equações diferenciais que pretendemos utilizar.

---

* Esta seção pode ser omitida em uma primeira leitura.

Um *campo de vetores* em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma aplicação que associa a cada ponto $q \in U$ um vetor $w(q) \in \mathbb{R}^2$. O campo de vetores w é *diferenciável* se, escrevendo $q = (x, y)$ e $w(q) = (a(x, y), b(x, y))$, as funções a e b são diferenciáveis em U.

Geometricamente, a definição corresponde a associar a cada ponto $(x, y) \in U$ um vetor com coordenadas $a(x, y)$ e $b(x, y)$ que variam de maneira diferenciável em relação a (x, y) (Fig. 3.24).

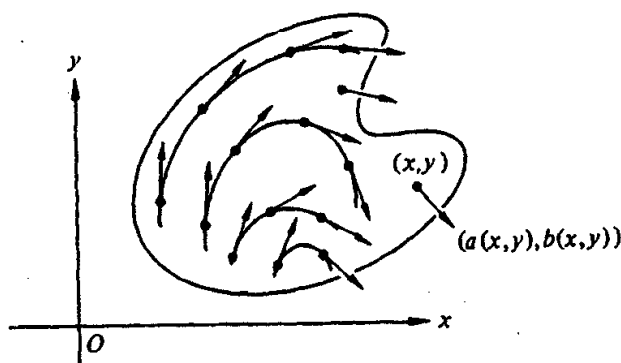



Figura 3-24

Nas considerações a seguir, consideraremos apenas campos de vetores diferenciáveis.

Alguns exemplos de campos de vetores são ilustrados na Fig. 3.25.

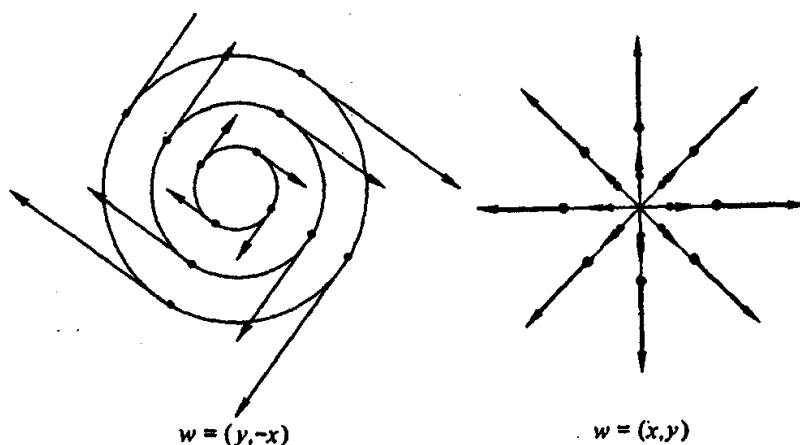



Figura 3-25

Dado um campo de vetoresl w é natural perguntar se existe uma *trajetória* deste campo, isto é, se existe uma curva parametrizada diferenciável $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, tal que $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$.

Por exemplo, uma trajetória, passando pelo ponto (x_0, y_0), do campo de vetores $w(x, y) = (x, y)$ é a reta $\alpha(t) = (x_0e^t, y_0e^t)$, $t \in R$; e uma trajetória de $w(x, y) = (y, -x)$, passando pelo ponto (x_0, y_0), é o círculo $\beta(t) = (r \operatorname{sen} t, r \cos t)$, $t \in R$, $r^2 = x_0^2 + y_0^2$.

Na linguagem das equações diferenciais ordinárias, diz-se que um campo de vetores w determina um sistema de *equações diferenciais*,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= b(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

e que uma trajetória de w é uma *solução* da Eq. (1).

O teorema fundamental de existência (local) e unicidade de soluções da Eq. (1) é equivalente à seguinte afirmação sobre trajetórias (no que se segue, as letras I e J denotam intervalos abertos da reta R, contendo a origem $0 \in \mathbb{R}$).

Teorema 1. *Seja w um campo de vetores em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Dado $p \in U$, existe uma trajetória $\alpha : I \to U$ de w (i.e., $\alpha'(t) = w(\alpha(t))$, $t \in I$) com $\alpha(0) = p$. Esta trajetória é única no seguinte sentido: Qualquer outra trajetória $\beta : J \to U$ com $\beta(0) = p$ coincide com α em $I \cap J$.*

Um complemento importante ao Teorema 1 é o fato da trajetória passando por p "variar de maneira diferenciável com p". Em termos precisos, tal idéia pode ser expressa da seguinte maneira.

Teorema 2. *Seja w um campo de vetores em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para cada $p \in U$ existe uma vizinhança $V \subset U$ de p, um intervalo I, e uma aplicação $\alpha : V \times I \to U$ tal que*

1. *Para todo $q \in V$ fixado, a curva $\alpha(q, t)$, $t \in I$, é a trajetória de w passando por q; isto é,*

$$\alpha(q, 0) = q, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(q, t) = w(\alpha(q, t)).$$

2. *α é diferenciável.*

Geometricamente, o Teorema 2 significa que todas as trajetórias que passam, para $t = 0$, em uma certa vizinhança V de p podem ser "coletadas"

em uma única aplicação diferenciável. É neste sentido que dizemos que as trajetórias dependem de p de maneira diferenciável (Fig. 3.26).

A aplicação α é chamada de *fluxo* (local) de w em p.

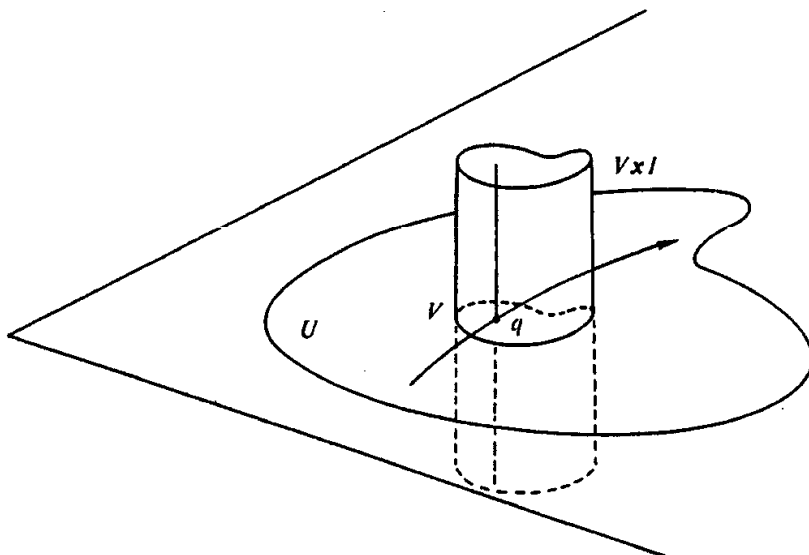



Figura 3-26

Neste livro, os Teoremas 1 e 2 serão admitidos; para uma demonstração, pode-se consultar, por exemplo, W. Hurewicz, Lectures on Ordinary Differential Equations, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1958, Capítulo 2 ou J. Sotomayor, Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides, IMPA, 1979, Capítulos I e II. Para os nossos propósitos, precisamos da seguinte consequência destes teoremas.

Lema. *Sejam w um campo de vetores em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $p \in U$ tais que $w(p) \neq 0$. Então existe uma vizinhança $W \subset U$ de p e uma função diferenciável $f : W \to \mathbb{R}$ tais que f é constante ao longo de cada trajetória de w e $df_q \neq 0$ para todo $q \in W$.*

Demonstração. Escolha um sistema de coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}^2$ tal que $p = (0,0)$ e $w(p)$ aponta na direção do eixo Ox. Sejam $\alpha : V \times I \to U$ o fluxo local em p, $V \subset U$, $t \in I$, e $\tilde{\alpha}$ a restrição de α ao retângulo

$$(V \times I) \cap \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}.$$

(Ver Fig. 3.27.) Pela definição de fluxo local, $d\tilde{\alpha}_p$ leva o vetor unitário do eixo Ot em w, e leva o vetor unitário do eixo Oy nele mesmo. Portanto, $d\tilde{\alpha}$

é não-singular. Segue-se que existe uma vizinhança $W \subset U$ de p, onde $\tilde{\alpha}^{-1}$ está definida e é diferenciável. A projeção de $\tilde{\alpha}^{-1}(x,y)$ sobre o eixo Oy é uma função diferenciável $\xi = f(x,y)$, que tem o mesmo valor ξ para todos os pontos da trajetória passando por $(0,\xi)$. Como $d\tilde{\alpha}_p$ é não-singular, pode-se tomar W suficientemente pequena de modo que $df_q \neq 0$ para todo $q \in W$. Portanto, f é a função desejada.

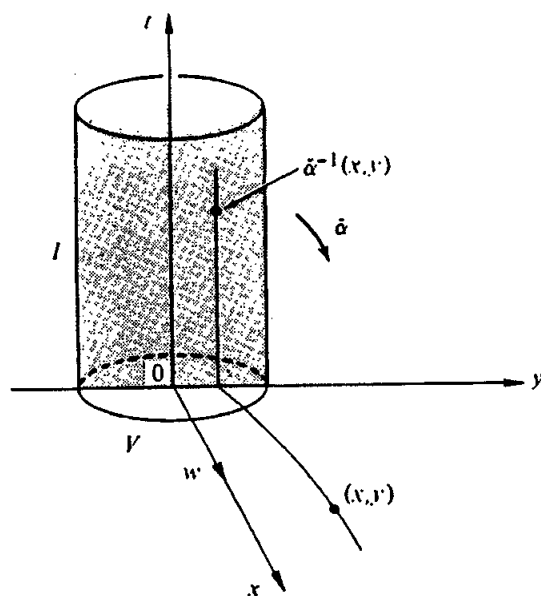



Figura 3-27

Q.E.D.

A função f do lema acima é chamada uma *integral primeira* (local) de w em uma vizinhança de p. Por exemplo, se $w(x,y) = (y,-x)$ é definido em $\mathbb{R}^2$, uma integral primeira $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0\} \to R$ é $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Um conceito estreitamente associado ao de campo de vetores é o conceito de campo de direções.

Um *campo de direções* r em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma correspondência que associa a cada $p \in U$ uma reta $r(p)$ em $\mathbb{R}^2$ passando por p. Diz-se que r é *diferenciável* em $p \in U$ se existe um campo de vetores diferenciável w, que não se anula, definido em uma vizinhança $V \subset U$ de p, tal que para cada $q \in V$, $w(q) \neq 0$ é uma *base* de $r(q)$; r é *diferenciável* em U se é diferenciável para todo $p \in U$.

A cada campo diferenciável de vetores w que não se anula em $U \subset \mathbb{R}^2$, corresponde um campo diferenciável de direções dado por $r(p)$ = reta gerada por $w(p)$, $p \in U$.

Pela própria definição, cada campo diferenciável de direções dá origem, localmente, a um campo diferenciável de vetores que não se anula. Isto, no entanto, não é verdade globalmente. Como exemplo, considere o campo de direções em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dado pelas retas tangentes às curvas da Fig. 3.28. Qualquer tentativa de orientar essas curvas para obter um campo diferenciável de vetores que não se anula leva a uma contradição.

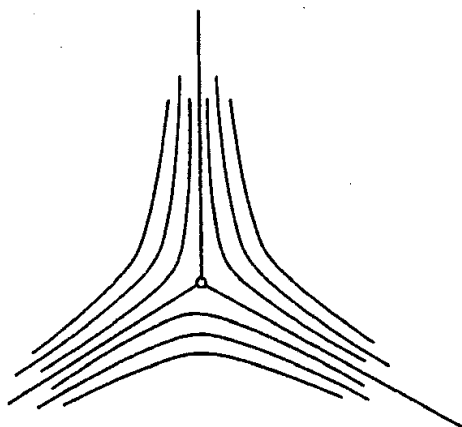



Figura 3-28. *Um campo de direção não-orientável em* $\mathbb{R}^2$-$\{(0,0)\}$.

Uma curva regular conexa $C \subset U$ é uma *curva integral* de um campo de direções r definido em $U \subset \mathbb{R}^2$ se $r(q)$ é a reta tangente a C em q para todo $q \in C$.

Pelo que vimos anteriormente, é claro que dado um campo diferenciável de direções r em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, para cada $q \in U$, passa uma curva integral C de r; C coincide localmente com o traço da trajetória passando por q do campo vetorial determinado por r em U. A partir daqui, iremos considerar apenas campos diferenciáveis de direções e omitir, em geral, a palavra diferenciável.

Uma maneira natural de descrever um campo de direções é a seguinte. Dizemos que dois vetores não-nulos w_1 e w_2 em $q \in \mathbb{R}^2$ são *equivalentes* se $w_1 = \lambda w_2$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Dois vetores equivalentes representam a mesma reta passando por q, e, reciprocamente, se dois vetores não-nulos pertencem à mesma reta passando por q, eles são equivalentes. Assim, um campo de direções r em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ pode ser dado associando

a cada $q \in U$ um par de números reais (r_1, r_2) (as coordenadas de um vetor não-nulo pertencente a r), onde consideramos os pares (r_1, r_2) e $(\lambda r_1, \lambda r_2)$, $\lambda \neq 0$, como equivalentes.

Na linguagem das equações diferenciais, um campo de direções é usualmente dado por

$$a(x,y)\frac{dx}{dt} + b(x,y)\frac{dy}{dt} = 0, \tag{2}$$

significando simplesmente que a um ponto $q = (x, y)$ associamos a reta passando por q e que contém o vetor $(b, -a)$ ou qualquer um de seus múltiplos não-nulos (Fig. 3.29). O traço da trajetória do campo de vetores $(b, -a)$ é uma curva integral de r. Como a parametrização é irrelevante nas considerações acima, utiliza-se com frequência, ao invés da Eq. (2), a expressão

$$a\,dx + b\,dy = 0$$

com o mesmo significado que antes.

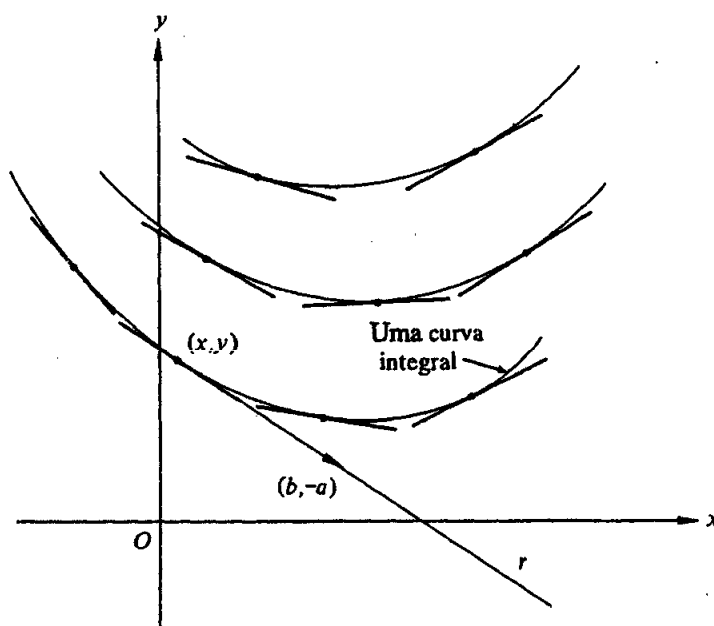



Figura 3-29. *A equação diferencial $a\,dx + b\,dy = 0$.*

As idéias introduzidas acima pertencem ao domínio dos fatos locais de $\mathbb{R}^2$, que dependem apenas da "estrutura diferenciável" de $\mathbb{R}^2$. Elas podem, portanto, ser transportadas para uma superfície regular, sem dificuldades adicionais, da maneira seguinte.

DEFINIÇÃO 1. *Um* campo de vetores w *em um conjunto aberto* $U \subset S$ *de uma superfície regular* S *é uma correspondência que associa a cada* $p \in U$ *um vetor* $w(p) \in T_pS$. *O campo de vetores* w *é* diferenciável *em* $p \in U$ *se, para alguma parametrização* $\mathbf{x}(u,v)$ *em* p, *as funções* $a(u,v)$ *e* $b(u,v)$ *dadas por*

$$w(p) = a(u,v)\mathbf{x}_u + b(u,v)\mathbf{x}_v$$

são funções diferenciáveis em p; *é claro que essa definição não depende da escolha de* $\mathbf{x}$.

Podemos definir, de maneira análoga, trajetórias, campos de direções e curvas integrais. Os teoremas 1 e 2 e o lema acima estendem-se facilmente a uma superfície; a menos da troca de $\mathbb{R}^2$ por S, os enunciados são exatamente os mesmos.

Exemplo 1. Um campo de vetores no toro de revolução T é obtido parametrizando os meridianos de T pelo comprimento de arco e definindo $w(p)$ como o vetor velocidade do meridiano passando por p (Fig. 3.30). Note que $|w(p)| = 1$ para todo $p \in T$. Deixamos a cargo do leitor (Exercício 2) verificar que w é diferenciável.

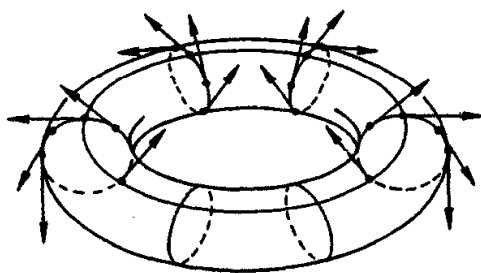



Figura 3-30

Exemplo 2. Um procedimento análogo, dessa vez sobre a esfera S^2 e usando os semi-meridianos de S^2, nos fornece um campo de vetores w definido na esfera menos os dois pólos N e S. Para obter um campo de vetores definido em toda a esfera, reparametrize todos os semi-meridianos pelo mesmo parâmetro t, $-1 < t < 1$, e defina $v(p) = (1 - t^2)w(p)$ para $p \in S^2 - \{N \cup S\}$ e $v(N) = v(S) = 0$ (Fig. 3.31).

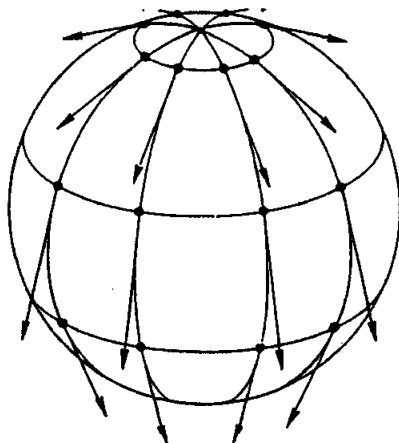



Figura 3-31

Exemplo 3. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 - y^2\}$ o parabolóide hiperbólico. A intersecção de S com os planos $z = const. \neq 0$ determina uma família de curvas $\{C_\alpha\}$ tais que por cada ponto de $S - \{(0,0,0)\}$ passa uma curva C_α. As retas tangentes a tais curvas fornecem um campo diferenciável de direções r em $S - \{(0,0,0)\}$. Queremos encontrar um campo de direções r' em $S - \{(0,0,0)\}$ que é ortogonal a r em cada ponto e determinar as curvas integrais de r e r'. r' é chamado de *campo ortogonal* a r, e suas curvas integrais são chamadas de *família ortogonal* a r (cf. Exercício 15, seção 2.5).

Começamos parametrizando S por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2), \qquad u = x, \qquad v = y.$$

A família $\{C_\alpha\}$ é dada por $u^2 - v^2 = const. \neq 0$ (melhor dizendo, pela imagem deste conjunto por $\mathbf{x}$). Se $u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v$ é um vetor tangente de uma parametrização regular de uma curva C_α, obtemos, derivando $u^2 - v^2 = const.$,

$$2uu' - 2vv' = 0.$$

Segue-se que r é dada, na parametrização $\mathbf{x}$, pelo par (v, u) ou por qualquer um de seus múltiplos não-nulos.

Seja agora $(a(u, v), b(u, v))$ uma expressão para o campo ortogonal r', na parametrização $\mathbf{x}$. Como

$$E = 1 + 4u^2, \qquad F = -4uv, \qquad G = 1 + 4v^2,$$

e r' é ortogonal a r em cada ponto, temos

$$Eav + F(bv + au) + Gbu = 0$$

ou

$$(1 + 4u^2)av - 4uv(bv + au) + (1 + 4v^2)bu = 0.$$

Segue-se que

$$va + ub = 0. \tag{3}$$

Isto determina o par (a, b) em cada ponto, a menos de um múltiplo não-nulo, e portanto o campo r'.

Para encontrar as curvas integrais de r', seja $u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v$ um vetor tangente de alguma parametrização regular de uma curva integral de r'. Então (u', v') satisfaz a Eq. (3); isto é,

$$vu' + uv' = 0$$

ou

$$uv = const..$$

Segue-se que a família ortogonal de $\{C_\alpha\}$ é dada pela intersecção de S com os cilindros hiperbólicos $xy = const. \neq 0$.

O principal resultado desta seção é o seguinte teorema.

Teorema. *Sejam w_1 e w_2 dois campos de vetores em um conjunto aberto $U \subset S$, que são linearmente independentes em algum ponto $p \in U$. Então é possível parametrizar uma vizinhança $V \subset U$ de p de tal maneira que para cada $q \in V$ as curvas coordenadas dessa parametrização passando por q são tangentes às curvas integrais determinadas por $w_1(q)$ e $w_2(q)$.*

Demonstração. Seja W uma vizinhança de p onde as integrais primeiras f_1 e f_2 de w_1 e w_2, respectivamente, estejam definidas. Defina a aplicação $\varphi : W \to \mathbb{R}^2$ por

$$\varphi(q) = (f_1(q), f_2(q)), \qquad q \in W.$$

Como f_1 é constante ao longo das trajetórias de w_1 e $(df_1) \neq 0$, temos em p

$$d\varphi_p(w_1) = ((df_1)_p(w_1), (df_2)_p(w_1)) = (0, a),$$

onde $a = (df_2)_p(w_1) \neq 0$, pois w_1 w_2 são linearmente independentes. Analogamente,

$$d\varphi_p(w_2) = (b, 0),$$

onde $b = (df_1)_p(w_2) \neq 0$.

Segue-se que $d\varphi_p$ é não-singular, e portanto que φ é um difeomorfismo local. Logo, existe uma vizinhança $\bar{U} \subset \mathbb{R}^2$ de $\varphi(p)$ que é levada difeomorficamente por $\mathbf{x} = \varphi^{-1}$ em uma vizinhança $V = \mathbf{x}(\bar{U})$ de p; isto é, $\mathbf{x}$ é uma parametrização de S em p, cujas curvas coordenadas.

$$f_1(q) = const., \qquad f_2(q) = const.,$$

são tangentes em q às curvas determinadas por $w_1(q)$ e $w_2(q)$, respectivamente.

Q.E.D.

Deve-se observar que o teorema não implica que as curvas coordenadas podem ser parametrizadas de modo que os respectivos vetores velocidade sejam $w_1(q)$ e $w_2(q)$. O enunciado do teorema se aplica às curvas coordenadas vistas como curvas (conjunto de pontos) regulares; mais precisamente, temos

Corolário 1. *Dados dois campos de direções r e r' em um conjunto aberto $U \subset S$ tais que em $p \in U$, $r(p) \neq r'(p)$, existe uma parametrização $\mathbf{x}$ em uma vizinhança de p tal que as curvas coordenadas de $\mathbf{x}$ são as curvas integrais de r e r'.*

Uma primeira aplicação do teorema acima é a prova da existência de uma parametrização ortogonal em qualquer ponto de uma superfície regular.

Corolário 2. *Para todo $p \in S$ existe uma parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ em uma vizinhança V de p tal que as curvas coordenadas $u = const.$, $v = const.$ intersectam-se ortogonalmente para cada $q \in V$ (diz-se que uma tal $\mathbf{x}$ é uma* parametrização ortogonal*).*

Demonstração. Considere uma parametrização arbitrária $\bar{\mathbf{x}} : \bar{U} \to S$ em p, e defina dois campos vetoriais $w_1 = \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}$, $w_2 = -(\bar{F}/\bar{E})\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} + \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}$ em $\bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$, onde

$\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ são os coeficientes da primeira forma fundamental em $\bar{\mathbf{x}}$. Como $w_1(q)$, $w_2(q)$ são vetores ortogonais, para todo $q \in \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$, uma aplicação do teorema nos fornece a parametrização desejada.

Q.E.D.

Uma segunda aplicação do teorema (mais precisamente, do Corolário 1) é a existência de coordenadas dadas pelas direções assintóticas e direções principais.

Como vimos na seção 3.3, as curvas assintóticas são soluções da equação

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0.$$

Em uma vizinhança de um ponto hiperbólico p, temos $eg - f^2 < 0$. Considere uma rotação do plano uv, de maneira que $e(p) > 0$. Podemos então decompor o lado esquerdo da equação acima em dois fatores lineares distintos, o que nos dá

$$(Au' + Bv')(Au' + Dv') = 0, \tag{4}$$

onde os coeficientes são determinados por

$$A^2 = e, \qquad A(B + D) = 2f, \qquad BD = g.$$

O sistema de equações acima tem soluções reais, pois $eg - f^2 < 0$. Assim, a Eq. (4) dá origem a duas equações:

$$Au' + Bv' = 0, \tag{4a}$$

$$Au' + Dv' = 0. \tag{4b}$$

Cada uma destas equações determina um campo diferenciável de direções (por exemplo, a Eq. (4a) determina a direção r que contém o vetor não-nulo $(B, -A)$), e em cada ponto da vizinhança considerada as direções dadas pelas equações (4a) e (4b) são distintas. Aplicando o Corolário 1, vemos que é possível parametrizar uma vizinhança de p de modo que as curvas coordenadas sejam curvas integrais das Eqs. (4a) e (4b). Em outras palavras,

Corolário 3. *Seja $p \in S$ um ponto hiperbólico de S. Então é possível parametrizar uma vizinhança de p de tal modo que as curvas coordenadas desta parametrização sejam as curvas assintóticas de S.*

Exemplo 4. Um exemplo quase trivial, mas que ilustra o mecanismo do método acima, é dado pelo parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$. Como de costume, parametrizamos toda a superfície por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2).$$

Um cálculo simples mostra que

$$e = \frac{2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad f = 0, \qquad g = -\frac{2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Assim, a equação das linhas assintóticas pode ser escrita como

$$\frac{2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{\frac{1}{2}}}((u')^2 - (v')^2) = 0.$$

A equação acima pode ser fatorada em duas equações lineares, fornecendo dois campos de direções:

$$\begin{aligned} r_1 &: \quad u' + v' = 0, \\ r_2 &: \quad u' - v' = 0. \end{aligned}$$

As curvas integrais destes campos de direções são dadas pelas duas famílias de curvas:

$$\begin{aligned} r_1 &: \quad u + v = const., \\ r_2 &: \quad u - v = const.. \end{aligned}$$

É claro agora que as funções $f_1(u, v) = u + v$, $f_2(u, v) = u - v$ são integrais primeiras dos campos vetoriais associados a r_1 e r_2, respectivamente. Assim, definindo

$$\bar{u} = u + v, \qquad \bar{v} = u - v,$$

obtemos uma nova parametrização de toda a superfície $z = u^2 - v^2$ em que as curvas coordenadas são as curvas assintóticas da superfície.

Neste caso particular, a mudança de parâmetros é válida para toda a superfície. Em geral, ela pode não ser globalmente definida, mesmo que todos os pontos da superfície sejam hiperbólicos.

De modo análogo, em uma vizinhança de um ponto não-umbílico de S, é possível decompor a equação diferencial das linhas de curvatura em dois fatores lineares distintos. Por um argumento análogo obtemos

Corolário 4. *Seja $p \in S$ um ponto não-umbílico de S. Então é possível parametrizar uma vizinhança de p de tal modo que as curvas coordenadas desta parametrização sejam as linhas de curvatura de S.*

Exercícios

1. Prove que a diferenciabilidade de um campo de vetores não depende da escolha de um sistema de coordenadas.

2. Prove que o campo de vetores sobre o toro, obtido parametrizando todos os meridianos pelo comprimento de arco e tomando os seus vetores tangentes (Exemplo 1), é diferenciável.

3. Prove que um campo de vetores w definido em uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é diferenciável se e somente se ele é diferenciável como uma aplicação $w : S \to \mathbb{R}^3$.

4. Seja S uma superfície e $\mathbf{x} : U \to S$ uma parametrização de S. Então

$$a(u,v)u' + b(u,v)v' = 0,$$

onde a e b são funções diferenciáveis, determina um campo de direções r em $\mathbf{x}(U)$, a saber, a correspondência que associa a cada $\mathbf{x}(u,v)$ a reta contendo o vetor $b\mathbf{x}_u - a\mathbf{x}_v$. Mostre que uma condição necessária e suficiente para a existência de um campo ortogonal r' em $\mathbf{x}(U)$ (cf. Exemplo 3) é que ambas as funções

$$Eb - Fa, \qquad Fb - Ga$$

não se anulem simultaneamente (onde E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental em $\mathbf{x}$) e que r' é determinado por

$$(Eb - Fa)u' + (Fb - Ga)v' = 0.$$

5. Seja S uma superfície e $\mathbf{x} : U \to S$ uma parametrização de S. Se $ac - b^2 < 0$, mostre que

$$a(u,v)(u')^2 + 2b(u,v)u'v' + c(u,v)(v')^2 = 0$$

pode ser fatorado em duas equações distintas, e que cada uma delas determina um campo de direções em $\mathbf{x}(U) \subset S$. Prove que estes dois campos de direções são ortogonais se e somente se

$$Ec - 2Fb + Ga = 0.$$

6. Uma reta r intersecta o eixo Oz e se move de uma tal maneira que faz um ângulo constante $\alpha \neq 0$ com o eixo Oz e que cada um de seus pontos descreve uma hélice com passo $c \neq 0$ em torno do eixo Oz. A figura descrita por r é o traço da superfície parametrizada (ver Fig. 3.32)

$$\mathbf{x}(u,v) = (v \operatorname{sen} \alpha \cos u, v \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} u, v \cos \alpha + cu).$$

Vê-se facilmente que $\mathbf{x}$ é uma superfície parametrizada regular (cf. Exercício 13, seção 2.5). Restrinja os parâmetros (u,v) a um conjunto aberto U de forma que $\mathbf{x}(U) = S$ seja uma superfície regular (cf. Prop. 2, seção 2.3).

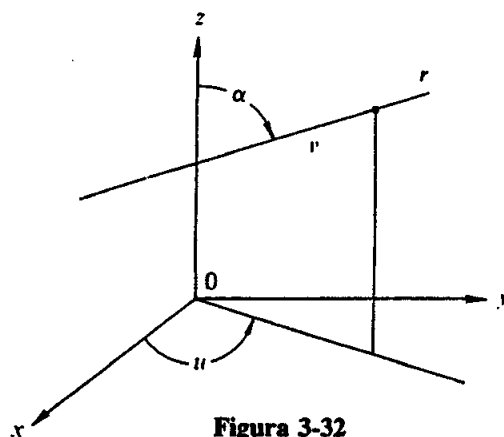



Figura 3-32

a. Encontre a família ortogonal (cf. Exemplo 3) à família de curvas coordenadas $u = const.$.

b. Use as curvas $u = const.$ e a sua família ortogonal para obter uma parametrização ortogonal para S. Mostre que para os novos parâmetros $(\bar{u}, \bar{v})$ os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\bar{G} = 1, \qquad \bar{F} = 0, \qquad \bar{E} = \{c^2 + (\bar{v} - c\bar{u}\cos\alpha)^2\}\,\mathrm{sen}^2\,\alpha.$$

7. Defina a derivada $w(f)$ de uma função diferenciável $f : U \subset S \to \mathbb{R}$ em relação ao campo de vetores w em U por

$$w(f)(q) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\bigg|_{t=0}, \qquad q \in U,$$

onde $\alpha : I \to S$ é uma curva tal que $\alpha(0) = q$ e $\alpha'(0) = w(q)$. Prove que

a. w é diferenciável em U se e somente se $w(f)$ é diferenciável para toda f diferenciável em U.

b. Sejam λ e μ números reais e $g : U \subset S \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em U; então

$$\begin{aligned} w(\lambda f + \mu f) &= \lambda w(f) + \mu w(f), \\ w(fg) &= w(f)g + fw(g). \end{aligned}$$

8. Mostre que se w é um campo diferenciável de vetores em uma superfície S e $w(p) \neq 0$ para algum $p \in S$, então é possível parametrizar uma vizinhança de p por $\mathbf{x}(u, v)$ de modo que $\mathbf{x}_u = w$.

9.a. Seja $A : V \to W$ uma aplicação linear não singular entre espaços vetoriais V e W de dimensão 2 e munidos com produtos internos $\langle\ ,\ \rangle$ e $(\ ,\ )$, respectivemente. A é uma *semelhança* se existe um número real $\lambda \neq 0$ tal que $(Av_1, Av_2) = \lambda\langle v_1, v_2\rangle$ para quaisquer $v_1, v_2 \in V$. Suponha que A não seja uma semelhança e mostre que existe um *único* par de vetores ortonormais e_1 e e_2 em V tais que Ae_1, Ae_2 são ortogonais em W.

b. Use a parte **a** para provar o *teorema de Tissot*: Seja $\varphi : U_1 \subset S_1 \to S_2$ um difeomorfismo de uma vizinhança U_1 de um ponto p de uma superfície S_1 em uma superfície S_2. Suponha que para todo $q \in U_1$ a aplicação linear $d\varphi_q$ não é uma semelhança. Então é possível parametrizar uma vizinhança de p em S_1 por uma parametrização ortogonal $\mathbf{x}_1 : U \to S_1$, de tal modo que $\varphi \circ \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 : U \to S_2$ também é uma parametrização ortogonal em uma vizinhança de $\varphi(p) \in S_2$.

10. Seja T o toro do Exemplo 6 da seção 2.2 e defina a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \to T$ por

$$\varphi(u,v) = ((r\cos u + a)\cos v, (r\cos u + a)\operatorname{sen} v, r\operatorname{sen} u),$$

onde u e v são as coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^2$. Seja $u = at$, $v = bt$ uma reta em $\mathbb{R}^2$, passando por $(0,0)$ em $\mathbb{R}^2$, e considere a curva $\alpha(t) = \varphi(at, bt)$ em T. Prove que

- **a.** φ é um difeomorfismo local.
- **b.** A curva $\alpha(t)$ é uma curva regular; $\alpha(t)$ é fechada se e somente se b/a é um número racional.
- ***c.** Se b/a é irracional, a curva $\alpha(t)$ é densa em T; isto é, em cada vizinhança de um ponto $p \in T$ existe um ponto de $\alpha(t)$.

***11.** Use a unicidade local das trajetórias de um campo de vetores w em $U \subset S$ para provar o seguinte resultado. Dado $p \in U$, existe uma única trajetória $\alpha : I \to U$ de w, com $\alpha(0) = p$, que é *máxima* no seguinte sentido: Qualquer outra trajetória $\beta : J \to U$, com $\beta(0) = p$, é a restrição de α a J (i.e., $J \subset I$ e $\alpha|_J = \beta$).

***12.** Prove que se w é um campo diferenciável em uma superfície compacta S e $\alpha(t)$ é a trajetória máxima de w com $\alpha(0) = p \in S$, então $\alpha(t)$ está definida para todo $t \in R$.

13. Construa um campo de vetores diferenciável em um disco aberto do plano (que não é compacto) tal que uma trajetória máxima $\alpha(t)$ não está definida para todo $t \in R$ (isto mostra que a condição de compacidade do exercício 12 é essencial).

3.5 Superfícies Regradas e Superfícies Mínimas*

Em geometria diferencial, encontramos vários casos especiais (superfícies de revolução, superfícies paralelas, superfícies regradas, superfícies mínimas, etc.) que podem se tornar interessantes por si mesmas (como no caso das

* Esta seção pode ser omitida em uma primeira leitura.

superfícies mínimas), ou que exibem belos exemplos do poder e das limitações dos métodos diferenciais em geometria. Seguindo o espírito deste livro, até agora tratamos destes casos especiais em exemplos e exercícios.

Pode ser útil, no entanto, apresentar alguns desses tópicos de maneira mais detalhada. É o que pretendemos fazer agora. Esta seção será destinada à teoria das superfícies regradas e a uma introdução à teoria das superfícies mínimas. Ao longo da seção, será conveniente utilizar a noção de superfície parametrizada definida na seção 2.3.

Caso o leitor deseje, toda esta seção, ou um de seus tópicos, pode ser omitida. Exceto por uma referência à seção A no Exemplo 6 da seção B, os dois tópicos são independentes e os seus resultados não serão utilizados de maneira essencial neste livro.

A. Superfícies Regradas

Uma *família* (diferenciável) *a 1-parâmetro de retas* $\{\alpha(t), w(t)\}$ é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um ponto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e um vetor $w(t) \in \mathbb{R}^3, w(t) \neq 0$, tais que ambos $\alpha(t)$ e $w(t)$ sejam diferenciáveis em t. Para cada $t \in I$, a reta L_t passando por $\alpha(t)$ e que é gerada por $w(t)$ é chamada *a reta da família em t*.

Dada uma família a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$, a superfície parametrizada

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + vw(t), \; t \in I, \; v \in \mathbb{R},$$

é chamada *superfície regrada* gerada pela família $\{\alpha(t), w(t)\}$. As retas L_t são chamadas as *geratrizes*, e a curva $\alpha(t)$ é chamada uma *diretriz* da superfície $\mathbf{x}$. A expressão superfície regrada é às vezes usada significando o traço de $\mathbf{x}$. Deve-se observar que estamos admitindo a possibilidade de que $\mathbf{x}$ tenha pontos singulares, isto é, pontos (t, v) onde $\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_v = 0$.

Exemplo 1. Os exemplos mais simples de superfícies regradas são as superfícies tangentes a uma curva regular (cf. Exemplo 4, seção 2.3), os cilindros e os cones. Um *cilindro* é uma superfície regrada gerada por uma família a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$, $t \in I$, onde $\alpha(t)$ está contida em um plano P e $w(t)$ é paralelo a uma direção fixa em $\mathbb{R}^3$ (Fig. 3.33) (a)). Um *cone* é uma superfície regrada gerada por uma família $\{\alpha(t), w(t)\}$, $t \in I$, onde $\alpha(I) \subset P$ e todas as geratrizes L_t passam por um ponto $p \notin P$ (Fig. 3.33 (b)).

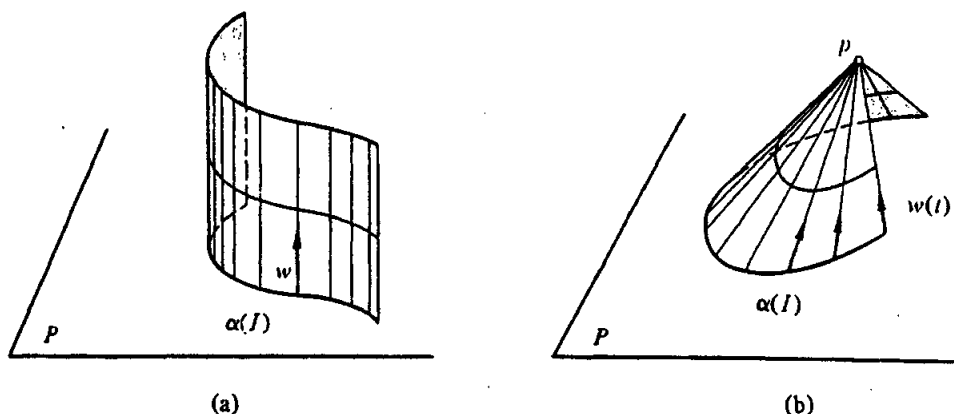



Figura 3-33

Exemplo 2. Sejam S^1 o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy, e $\alpha(s)$ uma parametrização de S^1 pelo comprimento de arco. Para cada s, seja $w(s) = \alpha'(s) + e_3$, onde e_3 é o vetor unitário do eixo Oz (Fig. 3.34). Então

$$\mathbf{x}(s,v) = \alpha(s) + v(\alpha'(s) + e_3)$$

é uma superfície regrada. Podemos colocá-la em uma forma mais familiar escrevendo

$$\mathbf{x}(s,v) = (\cos s - v \operatorname{sen} s,\ \operatorname{sen} s + v\cos s, v)$$

e observando que $x^2 + y^2 - z^2 = 1 + v^2 - v^2 = 1$. Isto mostra que o traço de $\mathbf{x}$ é um hiperbolóide de revolução.

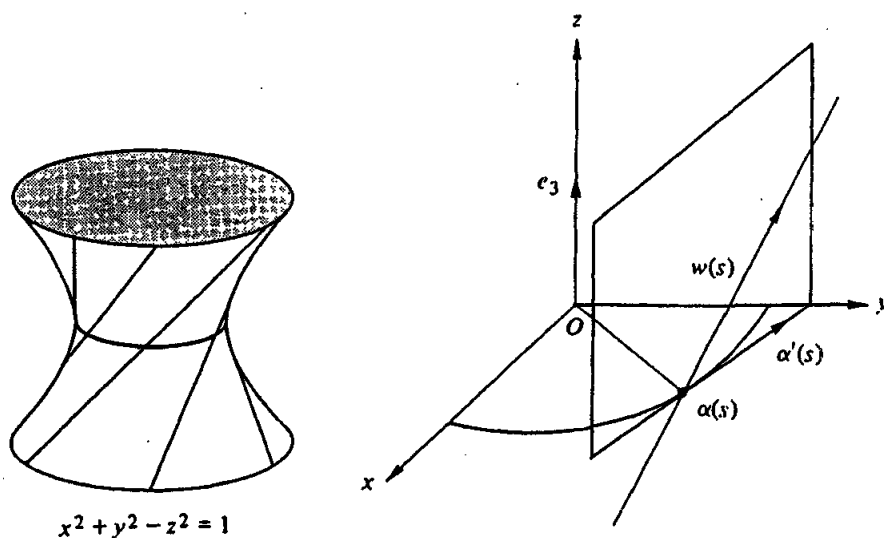



Figura 3-34. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ *como superfície regrada.*

É interessante observar que se tomarmos $w(s) = -\alpha'(s) + e_3$, teremos novamente a mesma superfície. Isto mostra que o hiperbolóide de revolução tem duas famílias de geratrizes.

Definimos superfícies regradas de modo a permitir a ocorrência de singularidades. Isso é necessário se queremos incluir superfícies tangentes e cones. Mostraremos dentro em pouco, pelo menos para superfícies regradas que satisfazem uma certa condição razoável, que as singularidades de uma tal superfície (caso existam) concentram-se ao longo de uma curva desta superfície.

Começaremos agora o estudo geral das superfícies regradas. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $|w(t)| = 1$, $t \in I$. Para desenvolver a teoria, precisamos fazer a suposição não-trivial de que $w'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Caso os zeros de $w'(t)$ sejam isolados, podemos dividir nossa superfície em pedaços tais que a teoria possa ser aplicada a cada um deles. No entanto, se os zeros de $w'(t)$ têm pontos de acumulação, a situação pode se tornar complicada e não será tratada aqui.

A suposição $w'(t) \neq 0$, $t \in I$, é geralmente expressa dizendo-se que a superfície regrada é *não-cilíndrica.*

Salvo menção em contrário, iremos supor que

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + vw(t) \tag{1}$$

é uma superfície regrada não-cilíndrica com $|w(t)| = 1$, $t \in I$. Observe que a suposição $|w(t)| \equiv 1$ implica que $\langle w(t), w'(t)\rangle = 0$ para todo $t \in I$.

Queremos primeiro encontrar uma curva parametrizada $\beta(t)$ tal que $\langle \beta'(t), w'(t)\rangle = 0$, $t \in I$, e que o traço de $\beta(t)$ esteja contido no traço de $\mathbf{x}$; isto é,

$$\beta(t) = \alpha(t) + u(t)w(t), \tag{2}$$

para alguma função a valores reais $u = u(t)$. Supondo a existência de uma tal curva β, obtemos

$$\beta' = \alpha' + u'w + uw';$$

portanto, como $\langle w, w'\rangle = 0$,

$$0 = \langle \beta', w'\rangle = \langle \alpha', w'\rangle + u\langle w', w'\rangle.$$

Segue-se que $u = u(t)$ é dado por

$$u = -\frac{\langle \alpha', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle}. \tag{3}$$

Assim, se definimos $\beta(t)$ pelas Eqs. (2) e (3), obtemos a curva desejada.

Mostraremos agora que a curva β não depende da escolha da diretriz α para a superfície regrada. β é então chamada *linha de estricção*, e seus pontos são chamados de *pontos centrais* da superfície regrada.

Para provar a nossa afirmação, seja $\bar{\alpha}$ uma outra diretriz da superfície regrada; isto é, vale, para todo (t, v),

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + vw(t) = \bar{\alpha}(t) + sw(t) \tag{4}$$

para alguma função $s = s(v)$. Então, das Eqs. (2) e (3) obtemos

$$\beta - \bar{\beta} = (\alpha - \bar{\alpha}) + \frac{\langle \bar{\alpha}' - \alpha', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} w,$$

onde $\bar{\beta}$ é a linha de estricção correspondendo a $\bar{\alpha}$. Por outro lado, a Eq. (4) implica que

$$\alpha - \bar{\alpha} = (s - v)w(t).$$

Assim,

$$\beta - \bar{\beta} = \left\{ (s - v) + \frac{\langle (v - s)w', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} \right\} w = 0.$$

Isto prova a nossa afirmação.

Tomaremos agora a linha de estricção como a diretriz da superfície regrada e escreveremos a superfície da seguinte maneira

$$\mathbf{x}(t, u) = \beta(t) + uw(t). \tag{5}$$

Com essa escolha, temos

$$\mathbf{x}_t = \beta' + uw', \quad \mathbf{x}_u = w$$

e

$$\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_u = \beta' \wedge w + uw' \wedge w.$$

Como $\langle w', w\rangle = 0$ e $\langle w', \beta'\rangle = 0$, concluímos que $\beta' \wedge w = \lambda w'$ para alguma função $\lambda = \lambda(t)$. Assim,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_u|^2 &= |\lambda w' + u w' \wedge w|^2 \\ &= \lambda^2 |w'|^2 + u^2 |w'|^2 = (\lambda^2 + u^2)|w'|^2. \end{aligned}$$

Segue-se que os eventuais pontos singulares da superfície regrada (5) situam-se ao longo da linha de estricção $u = 0$, e eles ocorrem se e somente se $\lambda(t) = 0$. Observe também que

$$\lambda = \frac{(\beta', w, w')}{|w'|^2},$$

onde, como de costume, (β', w, w') é uma abreviação para $\langle \beta' \wedge w, w'\rangle$.

Vamos calcular a curvatura Gaussiana da superfície (5) em seus pontos regulares. Como

$$\mathbf{x}_{tt} = \beta'', \quad \mathbf{x}_{tu} = w', \quad \mathbf{x}_{uu} = 0,$$

temos, para os coeficientes da segunda forma fundamental,

$$g = 0, \quad f = \frac{(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{ut})}{|\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_u|} = \frac{(\beta', w, w')}{|\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_u|};$$

donde (como $g = 0$ não precisamos do valor de e para calcular K),

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{\lambda^2 |w'|^4}{(\lambda^2 + u^2)^2 |w'|^4} = -\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + u^2)^2}. \tag{6}$$

Isso mostra que, em pontos regulares, *a curvatura Gaussiana K de uma superfície regrada satisfaz $K \leq 0$, e é zero apenas ao longo das geratrizes que intersectam a linha de estricção em um ponto singular.*

A equação (6) nos permite dar uma interpretação geométrica dos pontos centrais (regulares) de uma superfície regrada. De fato, os pontos de uma geratriz, exceto possivelmente o ponto central, são pontos regulares da superfície. Se $\lambda \neq 0$, a função $|K(u)|$ é uma função contínua sobre a geratriz e, pela Eq. (6), o ponto central é caracterizado como sendo o ponto onde $|K(u)|$ assume um valor máximo.

Para uma outra interpretação geométrica da linha de estricção, veja o Exercício 4.

Observamos também que a curvatura K assume os mesmos valores em pontos sobre uma geratriz que são simétricos em relação ao ponto central (isso justifica o adjetivo central).

A função $\lambda(t)$ é chamada o *parâmetro de distribuição* de $\mathbf{x}$. Como a linha de estricção é independente da escolha da diretriz, segue-se que o mesmo vale para λ. Se $\mathbf{x}$ é regular, temos a seguinte interpretação para λ. O vetor normal à superfície em (t, u) é

$$N(t,u) = \frac{\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_u}{|\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_u|} = \frac{\lambda w' + u w' \wedge w}{\sqrt{\lambda^2 + u^2}\,|w'|}.$$

Por outro lado ($\lambda \neq 0$),

$$N(t,0) = \frac{w'\lambda}{|w'|\,|\lambda|}.$$

Portanto, se θ é o ângulo formado por $N(t,u)$ e $N(t,0)$,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u}{|\lambda|}. \tag{7}$$

Assim, se θ é o ângulo que o vetor normal em um ponto de uma geratriz faz com o vetor normal no ponto central desta geratriz, então $\operatorname{tg}\theta$ é proporcional à distância entre estes dois pontos, e o coeficiente de proporcionalidade é o inverso do parâmetro de distribuição.

Exemplo 3. Seja S o parabolóide hiperbólico $z = kxy$, $k \neq 0$. Para mostrar que S é uma superfície regrada, observamos que as retas $y = z/tk$, $x = t$, para cada $t \neq 0$, pertencem a S. Considerando a interseção desta família de retas com o plano $z = 0$, obtemos a curva $x = t$, $y = 0$, $z = 0$. Tomando esta curva como diretriz e os vetores $w(t)$ paralelos às retas $y = z/tk$, $x = t$, obtemos

$$\alpha(t) = (t, 0, 0), \quad w(t) = \frac{(0, 1, kt)}{\sqrt{1 + k^2t^2}}.$$

Isto nos dá uma superfície regrada (Fig. 3.35)

$$\mathbf{x}(t,v) = \alpha(t) + v w(t) = \left(t, \frac{v}{\sqrt{1+k^2t^2}}, \frac{vkt}{\sqrt{1+k^2t^2}}\right), \quad t \in R,\ v \in \mathbb{R},$$

cujo traço coincide com S.

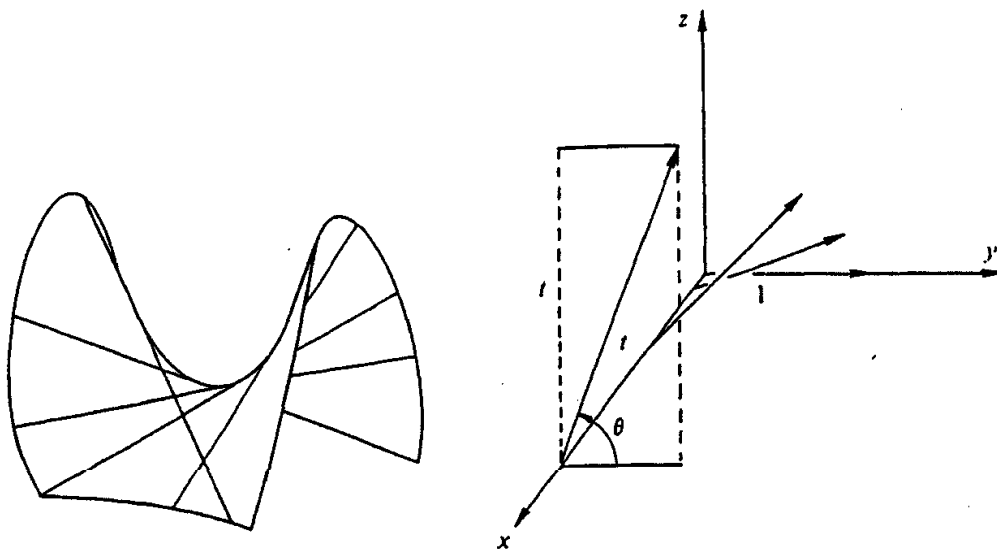



Figura 3-35. *z = xy como superfície regrada.*

Como $\alpha'(t) = (1, 0, 0)$, concluímos que a linha de estricção é a própria α. O parâmetro de distribuição é

$$\lambda = \frac{1}{k}.$$

Observamos também que a tangente do ângulo θ que $w(t)$ faz com $w(0)$ é $\operatorname{tg}\theta = tk$.

A observação precedente nos leva a uma propriedade interessante de uma superfície regrada. Se consideramos a família de vetores normais ao longo de uma geratriz de uma superfície regrada regular, esta família gera outra superfície regrada. Pela Eq. (7) e a observação precedente, esta nova superfície é exatamente o parabolóide hiperbólico $z = kxy$, onde $1/k$ é o valor do parâmetro de distribuição na geratriz escolhida.

Entre as superfícies regradas, as desenvolvíveis têm um papel de destaque. Começamos novamente com uma superfície regrada arbitrária (não necessariamente não-cilíndrica)

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + vw(t), \tag{8}$$

gerada pela família $\{\alpha(t), w(t)\}$ com $|w(t)| \equiv 1$. A superfície (8) é chamada *desenvolvível* se

$$(w, w', \alpha') \equiv 0. \tag{9}$$

Para encontrar uma interpretação geométrica para a condição (9), calculamos a curvatura Gaussiana de uma superfície desenvolvível em um ponto regular. Um cálculo inteiramente similar ao que foi feito para obtenção de (6) nos dá

$$g = 0, \qquad f = \frac{(w, w', \alpha')}{|\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_v|}.$$

Pela condição (9), $f \equiv 0$; logo

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \equiv 0.$$

Isso implica que, *em pontos regulares, a curvatura Gaussiana de uma superfície desenvolvível é identicamente nula.*

Para uma outra interpretação geométrica de uma superfície desenvolvível, veja o Exercício 6.

Podemos agora distinguir dois casos, não exaustivos, de superfícies desenvolvíveis:

1. $w(t) \wedge w'(t) \equiv 0$. Isso implica que $w'(t) \equiv 0$. Assim, $w(t)$ é constante e a superfície regrada é um cilindro sobre uma curva obtida pela interseção do cilindro com um plano normal a $w(t)$.

2. $w(t) \wedge w'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Nesse caso $w'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. A superfície é, portanto, não-cilíndrica, e podemos aplicar a teoria precedente. Assim, podemos deteminar a linha de estricção (2) e verificar que o parâmetro de distribuição

$$\lambda = \frac{(\beta', w, w')}{|w'|^2} \equiv 0.$$

Portanto, a linha de estricção será o lugar geométrico dos pontos singulares da superfície desenvolvível. Se $\beta'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, segue-se da Eq. (10) e do fato de que $\langle \beta', w' \rangle \equiv 0$, que w é paralelo a β'. Logo, a superfície regrada é a superfície tangente de β. Se $\beta'(t) = 0$ para todo $t \in I$, então a linha de estricção é um ponto, e a superfície regrada é um cone tendo esse ponto como vértice.

É claro que, os casos acima não cobrem todas as possibilidades. Como de costume, se existe um ponto de acumulação dos zeros das funções envolvidas, a análise pode ser um tanto complicada. De qualquer maneira, longe destes pontos de acumulação, uma superfície desenvolvível é uma união de pedaços de cilindros, cones e superfícies tangentes.

Como vimos, em pontos regulares, a curvatura Gaussiana de uma superfície desenvolvível é identicamente nula. Na seção 5.8 provaremos uma espécie de recíproca global deste fato que implica que uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ que é fechada como subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e tem curvatura Gaussiana zero é um cilindro.

Exemplo 4. (*Envoltória de uma Família de Planos Tangentes ao longo de uma Curva de uma Superfície.*) Seja S uma superfície regular e $\alpha = \alpha(s)$ uma curva em S parametrizada pelo comprimento de arco. Suponha que α nunca é tangente a uma direção assintótica. Considere a superfície regrada

$$\mathbf{x}(s,v) = \alpha(s) + v\frac{N(s)\wedge N'(s)}{|N'(s)|}, \tag{11}$$

onde denotamos por $N(s)$ o vetor normal unitário de S restrito à curva $\alpha(s)$ (como $\alpha'(s)$ não é uma direção assintótica, $N'(s) \neq 0$ para todo s). Mostraremos que $\mathbf{x}$ é uma superfície desenvolvível que é regular em uma vizinhança de $v = 0$ e é tangente a S ao longo de $v = 0$. Antes disso, porém, daremos uma interpretação geométrica da superfície $\mathbf{x}$.

Considere a família $\{T_{\alpha(s)}S\}$ de planos tangentes à superfície S ao longo da curva $\alpha(s)$. Se Δs é pequeno, os dois planos $T_{\alpha(s)}S$ e $T_{\alpha(s+\Delta s)}S$ da família intersectam-se ao longo de uma reta paralela ao vetor

$$\frac{N(s)\wedge N(s+\Delta s)}{\Delta s}.$$

Se fazemos Δs tender a zero, esta reta se aproxima de uma posiçao limite paralela ao vetor

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{N(s)\wedge N(s+\Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0} N(s)\wedge\frac{(N(s+\Delta s)-N(s))}{\Delta s} = N(s)\wedge N'(s).$$

Isso intuitivamente significa que as geratrizes de $\mathbf{x}$ são as posições limites da interseção de planos vizinhos da família $\{T_{\alpha(s)}S\}$. $\mathbf{x}$ é chamada a *envoltória da família de planos tangentes de S ao longo de $\alpha(s)$* (Fig. 3.36).

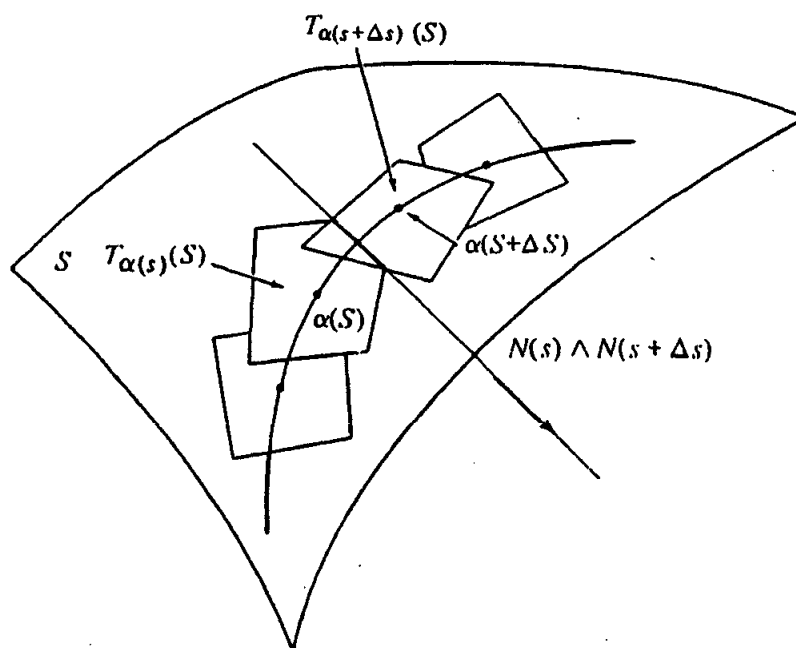



Figura 3-36

Por exemplo, se α é uma parametrização de um paralelo de uma esfera S^2, então a envoltória de planos tangentes de S^2 ao longo de α é um cilindro, se o paralelo for um equador, ou um cone, se o paralelo não for um equador (Fig. 3.37).

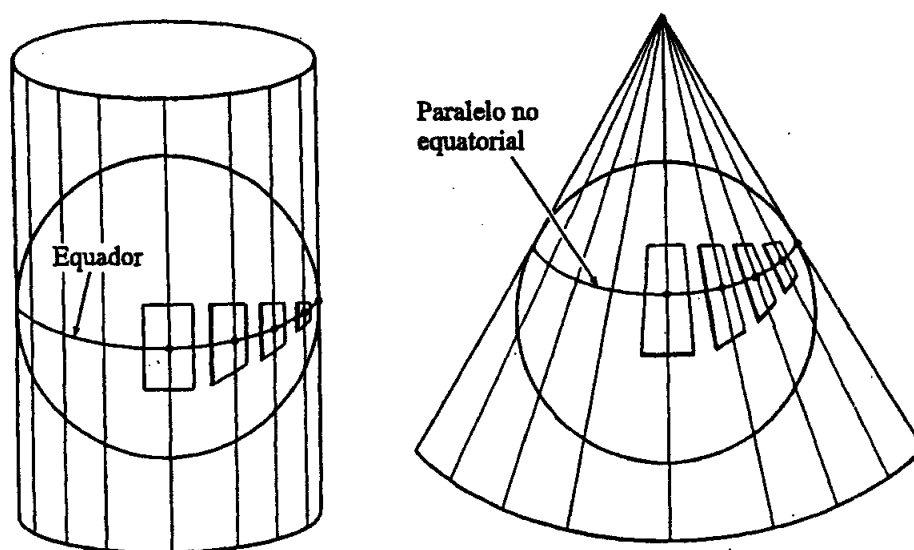



Figura 3-37. ***Envoltórias de famílias de planos tangentes a uma esfera ao longo de um paralelo.***

Para mostrar que $\mathbf{x}$ é uma superfície desenvolvível, verificamos que a condição (9) é satisfeita para $\mathbf{x}$. De fato, por um cálculo simples, obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{N \wedge N'}{|N'|} \wedge \left(\frac{N \wedge N'}{|N'|}\right)', \alpha' \right\rangle &= \left\langle \frac{N \wedge N'}{|N'|} \wedge \frac{(N \wedge N')'}{|N'|}, \alpha' \right\rangle \\ &= \frac{1}{|N'|^2}\langle\langle N \wedge N', N''\rangle N, \alpha'\rangle = 0,\end{aligned}$$

onde usamos (2) da seção 1.4. Isto demonstra a nossa afirmação.

Provaremos agora que $\mathbf{x}$ é regular em uma vizinhança de $v = 0$ e é tangente a S ao longo de α. De fato, em $v = 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_v &= \alpha' \wedge \frac{(N \wedge N')}{|N'|} = \langle N', \alpha'\rangle \frac{N}{|N'|} = -\langle N, \alpha''\rangle \frac{N}{|N'|} \\ &= -\frac{(k_n N)}{|N'|},\end{aligned}$$

onde $k_n = k_n(s)$ é a curvatura normal de α. Como $k_n(s)$ não se anula, isto mostra que $\mathbf{x}$ é regular em uma vizinhança de $v = 0$ e que o vetor normal unitário de $\mathbf{x}$ em $\mathbf{x}(s, 0)$ coincide com $N(s)$. Assim, $\mathbf{x}$ é tangente a S ao longo de $v = 0$, e isto completa a demonstração das nossas afirmações.

Faremos um sumário das nossas conclusões. *Seja $\alpha(s)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em uma superfície S e suponha que α nunca é tangente a uma direção assintótica. Então a envoltória (9) da família de planos tangentes de S ao longo de α é uma superfície desenvolvível, que é regular em uma vizinhança de $\alpha(s)$ e tangente a S ao longo de $\alpha(s)$.*

B. Superfícies Mínimas

Uma superfície parametrizada regular é chamada *mínima* se a sua curvatura média é identicamente nula. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é *mínima* se cada uma de suas parametrizações é mínima.

Para explicar a razão de usarmos a palavra mínima para tais superfícies, precisamos introduzir a noção de variação. Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfíce parametrizada regular. Escolha um domínio limitado $D \subset U$ (cf. seção 2.5) e uma função diferenciável $h : \bar{D} \to R$, onde $\bar{D}$ é a união do domínio D e sua fronteira ∂D. A *variação normal* de $\mathbf{x}(\bar{D})$, determinada por h, é a aplicação (Fig. 3.38) dada por,

$$\varphi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(u,v,t) = \mathbf{x}(u,v) + th(u,v)N(u,v), \quad (u,v) \in \bar{D},\ t \in (-\varepsilon,\varepsilon).$$

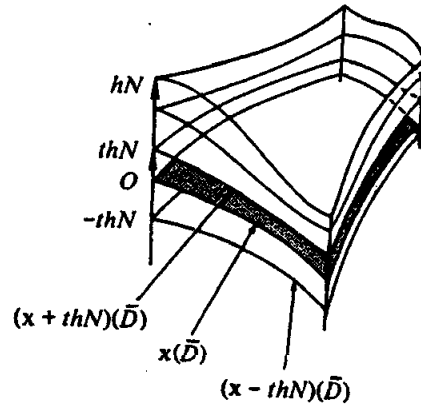



Figura 3-38. *Uma variação normal de* $\mathbf{x}(\mathbb{D})$.

Para cada $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ fixado, a aplicação $\mathbf{x}^t : D \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}^t(u,v) = \varphi(u,v,t)$$

é uma superfície parametrizada com

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial u} &= \mathbf{x}_u + thN_u + th_u N,\\
\frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial v} &= \mathbf{x}_v + thN_v + th_v N.
\end{aligned}$$

Assim, denotando por E^t, F^t, G^t os coeficientes da primeira forma fundamental de $\mathbf{x}^t$, obtemos

$$\begin{aligned}
E^t &= E + th(\langle \mathbf{x}_u, N_u\rangle + \langle \mathbf{x}_u, N_u\rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_u\rangle + t^2h_uh_u,\\
F^t &= F + th(\langle \mathbf{x}_u, N_v\rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u\rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_v\rangle + t^2h_uh_v,\\
G^t &= G + th(\langle \mathbf{x}_v, N_v\rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_v\rangle) + t^2h^2\langle N_v, N_v\rangle + t^2h_vh_v.
\end{aligned}$$

Utilizando o fato de que

$$\langle \mathbf{x}_u, N_u\rangle = -e, \quad \langle \mathbf{x}_u, N_v\rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u\rangle = -2f, \quad \langle \mathbf{x}_v, N_v\rangle = -g,$$

e que a curvatura média H é dada por (seção 3.3, Eq. (5))

$$H = \frac{1}{2}\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2},$$

obtemos

$$\begin{aligned} E^tG^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R, \end{aligned}$$

onde $\lim_{t\to 0}(R/t) = 0$.

Segue-se que se ε é suficientemente pequeno, $\mathbf{x}^t$ é uma superfície parametrizada regular. Além disso, a área $A(t)$ de $\mathbf{x}^t(\bar{D})$ é

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\bar{D}} \sqrt{E^tG^t - (F^t)^2}\, du\, dv \\ &= \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}}\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \end{aligned}$$

onde $\bar{R} = R/(EG - F^2)$. Assim, se ε é pequeno, A é uma função diferenciável e a sua derivada em $t = 0$ é

$$A'(0) = -\int_{\bar{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{12}$$

Estamos agora preparados para justificar o uso da palavra mínima em conexão com as superfícies com curvatura média nula.

Proposição 1. *Seja* $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ *uma superfície parametrizada regular e seja* $D \subset U$ *um domínio limitado em* U*. Então* $\mathbf{x}$ *é mínima se e somente se* $A'(0) = 0$ *para todo tal* D *e toda variação normal de* $x(\bar{D})$.

Demonstração. Se $\mathbf{x}$ é mínima, $H \equiv 0$ e é claro que a condição é satisfeita. Reciprocamente, suponha que a condição é satisfeita e que $H(q) \neq 0$ para algum $q \in D$. Escolha $h : \bar{D} \to \mathbb{R}$ tal que $h(q) = H(q)$, $hH > 0$, e h seja identicamente nula fora de uma pequena vizinhança de q. Então $A'(0) < 0$ para a variação determinada por essa função h, o que é uma contradição.

Q.E.D.

Assim, qualquer região limitada $\mathbf{x}(\bar{D})$ de uma superfície mínima é um ponto crítico para a função área de qualquer variação normal de $\mathbf{x}(\bar{D})$. Deve-se notar que este ponto crítico pode não ser um mínimo e que isso faz a palavra mínima parecer um pouco estranha. No entanto, esta terminologia é consagrada pelo tempo, tendo sido introduzida por Lagrange (que foi o primeiro a definir uma superfície mínima) em 1760.

As superfícies mínimas são geralmente associadas às películas de sabão, que podem ser obtidas mergulhando uma moldura formada por um arame em uma solução de sabão e retirando-a em seguida com cuidado. Se o experimento for bem executado, obtem-se uma película de sabão que tem o arame como fronteira. Pode-se mostrar, por considerações físicas, que a película assume a posição onde, em seus pontos regulares, a curvatura média é zero. Dessa maneira podemos "fabricar" belas superfícies mínimas, como a que está na Fig. 3.39.

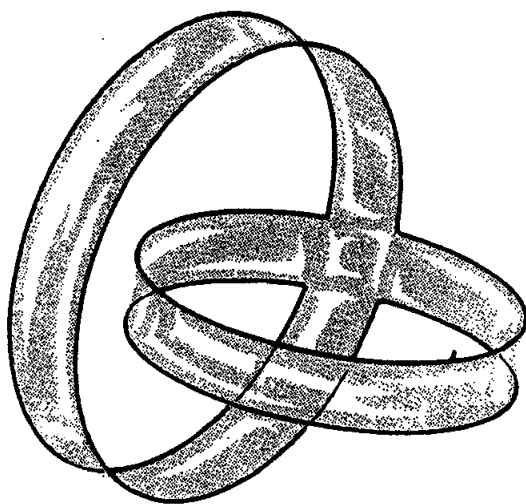



Figura 3-39

Observação 1. Deve-se notar que nem toda película de sabão é uma superfície mínima, de acordo com a nossa definição. Fizemos a suposição de que as superfícies mínimas são regulares (poderíamos ter admitido alguns pontos singulares isolados, mas ir além disto faria com que o tratamento ficasse muito menos elementar). Entretanto, podem-se formar películas de sabão, por exemplo, usando um arame em forma de cubo (Fig. 3.40), que tem singularidades ao longo de retas.

Observação 2. A conexão entre superfícies mínimas e películas de sabão motivou o famoso Problema de Plateau (Plateau foi um físico belga que realizou cuidadosos experimentos com películas de sabão por volta de 1850). O problema pode ser, a grosso modo, descrito da seguinte maneira: *provar que para cada curva fechada $C \subset \mathbb{R}^3$ existe uma superfície S de área mínima tendo C*

como fronteira. Tornar o problema preciso (quais curvas e superfícies são permitidas e o que significa C ser a fronteira de S) é em si uma parte não trivial do problema. Uma versão do problema de Plateau foi resolvida simultaneamente por Douglas e Radó em 1930. Outras versões (e generalizações do problema para dimensões maiores) têm inspirado a criação de entidades matemáticas que incluem objetos semelhantes às películas de sabão. Indicamos ao leitor interessado o capítulo 2 de Lawson [20] (as referências estão no final do livro), onde se pode encontrar detalhes adicionais e uma bibliografia sobre o problema de Plateau.

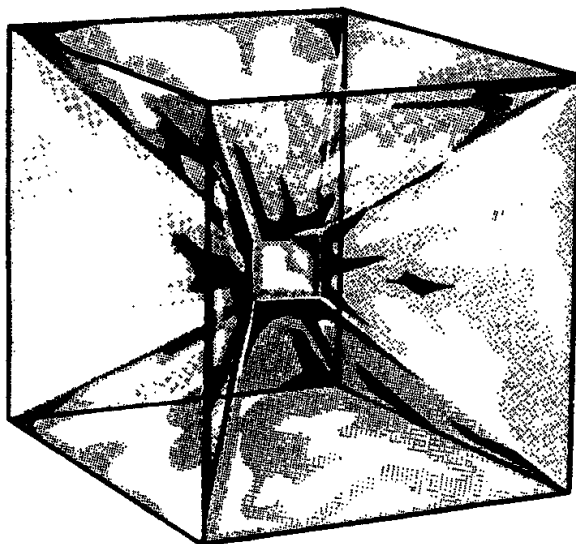



Figura 3-40

Convém introduzir, para uma superfície parametizada regular, o *vetor curvatura média* definido por $\mathbf{H} = HN$. O significado geométrico da direção de $\mathbf{H}$ pode ser obtido a partir da Eq. (12). De fato, escolhendo $h = H$, temos que, para essa variação particular,

$$A'(0) = -2 \int_{\bar{D}} \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv < 0.$$

Isto significa que se *deformarmos* $\mathbf{x}(\bar{D})$ *na direção do vetor* H, *a área é inicialmente decrescente.*

Vamos agora obter uma outra interpretação para o vetor curvatura média, pois ela tem importantes implicações para a teoria das superfícies mínimas.

Uma superfície parametrizada regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ é chamada *isotérmica* se $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ e $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$.

Proposição 2. *Seja $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e suponha que $\mathbf{x}$ é isotérmica. Então*

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H},$$

onde $\lambda^2 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$.

Demonstração. Como $\mathbf{x}$ é isotérmica, $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ e $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$. Derivando, obtemos

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{vu}, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle.$$

Logo,

$$\langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = 0.$$

Analogamente,

$$\langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = 0.$$

Segue-se que $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}$ é paralelo a N. Como $\mathbf{x}$ é isotérmica,

$$H = \frac{1}{2} \frac{g + e}{\lambda^2}.$$

Assim,

$$2\lambda^2 H = g + e = \langle N, \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} \rangle;$$

donde,

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H}.$$

Q.E.D.

O Laplaciano Δf de uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é definido por $\Delta f = \partial^2 f / \partial u^2 + \partial^2 f / \partial v^2$, $(u, v) \in U$. Dizemos que f é *harmônica* em U se $\Delta f = 0$. A partir da Prop. 2, obtemos

Corolário. *Seja* $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ *uma superfície parametrizada e suponha que* $\mathbf{x}$ *é isotérmica. Então* $\mathbf{x}$ *é mínima se e somente se as suas funções coordenadas* x, y, z *são harmônicas.*

Exemplo 5. O catenóide, dado por

$$\mathbf{x}(u,v) = (a\cosh v\cos u, a\cosh v \operatorname{sen} u\,, av), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < 0 < \infty.$$

Esta superfície é gerada pela rotação da catenária $y = a\cos(\frac{z}{a})$ em torno do eixo Oz (Fig. 3. 41). Verifica-se facilmente que $E = G = a^2\cosh^2 v$, $F = 0$, e que $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$. Assim, o catenóide é uma superfície mínima. Ela pode ser caracterizada como a única superfície de revolução que é mínima.

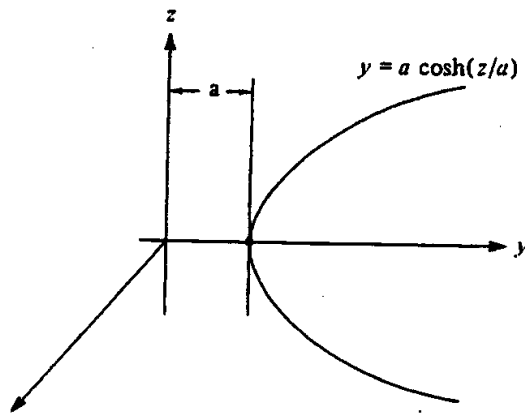



Figura 3-41

A afirmação acima pode ser provada da seguinte maneira. Queremos encontrar uma curva $y = f(x)$ tal que, ao ser girada em torno do eixo Ox, descreva uma superfície mínima. Como os paralelos e meridianos de uma superfície de revolução são linhas de curvatura da superfície (seção 3.3, Exemplo 4), é necessário que a curvatura da curva $y = f(x)$ seja o negativo da curvatura normal do círculo gerado pelo ponto $f(x)$ (ambas são curvaturas principais). Como a curvatura de $y = f(x)$ é

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e a curvatura normal do círculo é a projeção da sua curvatura usual ($= 1/y$) sobre o vetor normal N à superfície (Fig. 3.42), obtemos

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{y}\cos\varphi.$$

Mas $-\cos\varphi = \cos\theta$ (ver Fig. 3.42), e como $\operatorname{tg}\theta = y'$, obtemos

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y}\frac{1}{(1+(y')^2)^{\frac{1}{2}}}$$

como a equação a ser satisfeita pela curva $y = f(x)$.

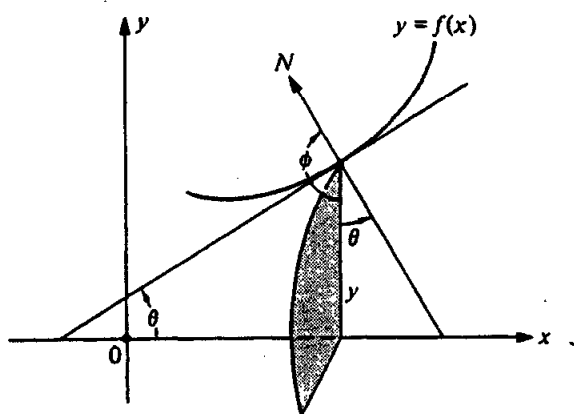



Figura 3-42

É claro que existe um ponto onde $f'(x) \neq 0$. Trabalharemos em uma vizinhança deste ponto onde $f' \neq 0$. Multiplicando ambos os membros da equação acima por $2y'$, obtemos

$$\frac{2y'y''}{1+(y')^2} = \frac{2y'}{y}.$$

Colocando $1+(y')^2 = z$ (logo, $2y'y'' = z'$), temos

$$\frac{z'}{z} = \frac{2y'}{y},$$

que, por integração, nos dá (k é uma constante)

$$\log z = \log y^2 + \log k^2 = \log(yk)^2$$

ou

$$1+(y')^2 = z = (yk)^2.$$

Essa última expressão pode ser escrita como

$$\frac{k\,dy}{\sqrt{(yk)^2-1}} = k\,dx,$$

que, novamente por integração, nos dá (c é uma constante)

$$\cosh^{-1}(yk) = kx + c$$

ou

$$y = \frac{1}{k}\cosh(kx+c).$$

Assim, em uma vizinhança de um ponto onde $f' \neq 0$, a curva $y = f(x)$ é uma catenária. Mas então y' pode ser zero apenas para $x = 0$, e se queremos uma superfície conexa, ela é, por continuidade, um catenóide, como havíamos afirmado.

Exemplo 6. (Helicóide). (cf. Exemplo 3, seção 2.5)

$$\mathbf{x}(u,v) = (a\,\mathrm{senh}\,v\cos u, a\,\mathrm{senh}\,v\,\mathrm{sen}\,u\,, au).$$

Verifica-se facilmente que $E = G = a^2\cosh^2 v$, $F = 0$ e $\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv} = 0$. Portanto, o helicóide é uma superfície mínima. Ele tem a propriedade adicional de ser a única superfície mínima, além do plano, que é também uma superfície regrada.

Podemos dar uma demonstração da afirmação acima supondo que os zeros da curvatura Gaussiana de uma superfície mínima são isolados (uma demonstração desse último fato pode ser encontrada, por exemplo, no livro de Osserman citado no final desta seção, p. 76). Admitindo isso procedemos do seguinte modo.

Suponha que a superfície não seja um plano. Então em alguma vizinhança W da superfície, a curvatura Gaussiana K é estritamente negativa. Como a curvatura média é zero, W é coberta por duas famílias de curvas assintóticas que se intersectam ortogonalmente. Como as geratrizes são curvas assintóticas e a superfície não é um plano, podemos escolher um ponto $q \in W$ tal que a curva assintótica, que não é a geratriz, passando por q tenha torção não-nula em q. Como o plano osculador de uma curva assintótica é o plano tangente à superfície, existe uma vizinhança $V \subset W$ tal que as geratrizes de V são normais principais à família de curvas assintóticas não-retilineas (Fig. 3.43).

Um exercício interessante sobre curvas é mostrar que isso pode acontecer se e somente se as curvas desta última família são hélices circulares (cf. Exercício 18, seção 1.5). Assim, V é parte de um helicóide. Como a torção de uma hélice circular é constante, vê-se facilmente que toda a superfície é parte de um helicóide, como havíamos afirmado.

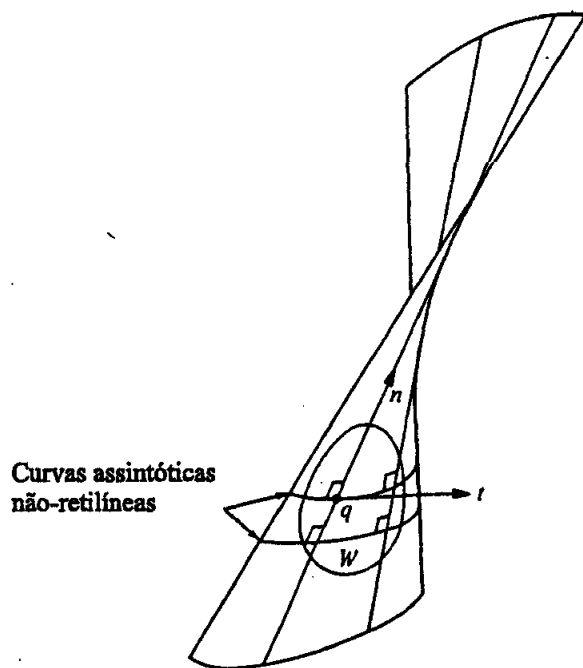



Figura 3-43

O helicóide e o catenóide foram descobertos em 1776 por Meusnier, que também demonstrou que a definição de Lagrange para superfícies mínimas como pontos críticos de um problema variacional é equivalente ao anulamento total da curvatura média. Durante muito tempo, esses foram os únicos exemplos conhecidos (além do plano) de superfícies mínimas. Só em 1835 Scherk encontrou novos exemplos, um deles descrito no Exemplo 8. No Exercício 14, descrevemos uma conexão interessante entre o catenóide e o helicóide.

Exemplo 7 (*Superfície Mínima de Enneper*). A superfície de Enneper é a superfície parametrizada

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

A verificação de que a superfície acima (Fig. 3.44) é mínima não apresenta maiores dificuldades. Note que ao trocarmos (u,v) por $(-v,u)$ trocamos, na

superfície, (x, y, z) por $(-y, x, -z)$. Assim, ao efetuarmos uma rotação positiva de $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo Oz seguida de uma simetria no plano xy, a superfície permanece invariante.

Uma característica interessante da superfície de Enneper é que ela possui auto-interseções. Isso pode ser mostrado colocando $u = \rho\cos\theta$, $v = \rho\operatorname{sen}\theta$ e escrevendo

$$\mathbf{x}(\rho,\theta) = \left(\rho\cos\theta - \frac{\rho^3}{3}\cos 3\theta, \rho\operatorname{sen}\theta + \frac{\rho^3}{3}\operatorname{sen} 3\theta, \rho^2\cos 2\theta\right).$$

Assim, se $\mathbf{x}(\rho_1,\theta_1) = \mathbf{x}(\rho_2,\theta_2)$, um cálculo direto mostra que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho_1^2 + \frac{\rho_1^6}{9} - \cos 4\theta_1 \frac{2\rho_1^4}{3} \\ &= \left(\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}(\rho_1^2\cos 2\theta_1)^2 \\ &= \left(\rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}(\rho_2^2\cos 2\theta_2)^2. \end{aligned}$$

Portanto, como $\rho_1^2\cos 2\theta_1 = \rho_2^2\cos 2\theta_2$, obtemos

$$\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3} = \rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3},$$

que implica que $\rho_1 = \rho_2$. Segue-se que $\cos 2\theta_1 = \cos 2\theta_2$.

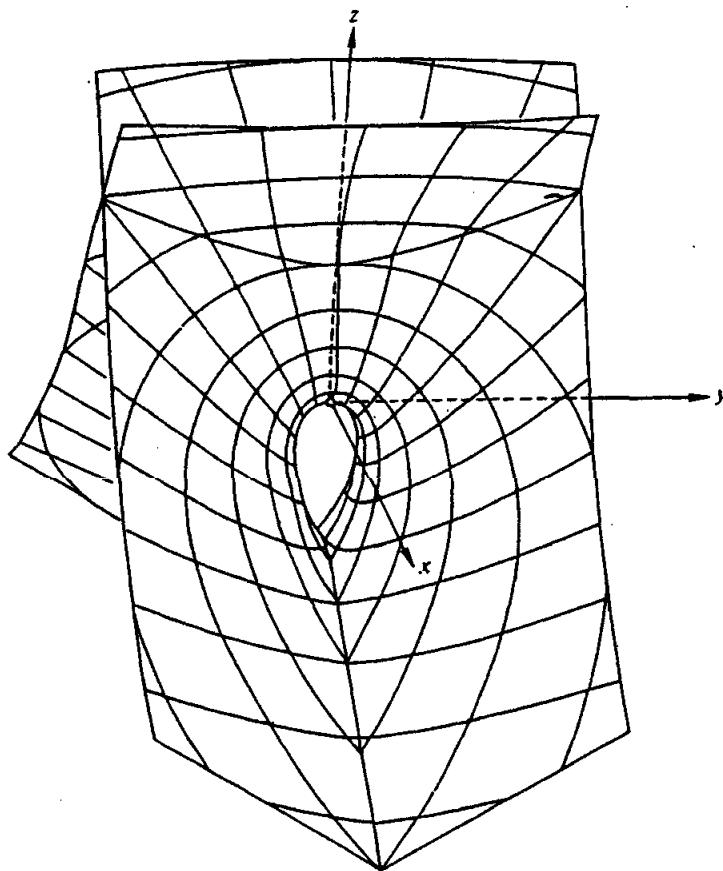



Figura 3-44. *A superfície de Enneper. Reprodução autorizada, com modificações, de K. Leichtweiss "Minimalflächen in Grossen"*, Überblicke Math., *2 (1969) pp. 7-49, fig. 4.*

Se, por exemplo, $\rho_1 = \rho_2$ e $\theta_1 = 2\pi - \theta_2$, obtem-se a partir de

$$y(\rho_1, \theta_1) = y(\rho_2, \theta_2)$$

que $y = -y$. Logo, $y = 0$; isto é, os pontos (ρ_1, θ_1) e (ρ_2, θ_2) pertencem à curva

$$\operatorname{sen} \theta + (\frac{\rho^2}{3}) \operatorname{sen} 3\theta = 0.$$

É claro que, para cada ponto (ρ, θ) que pertence a esta curva, o ponto $(\rho, 2\pi - \theta)$ também pertence a ela, e

$$x(\rho, \theta) = x(\rho, 2\pi - \theta), \qquad z(\rho, \theta) = z(\rho, 2\pi - \theta).$$

Assim, a intersecção da superfície com o plano $y = 0$ é uma curva de auto-intersecção da superfície.

Analogamente, pode-se mostrar que a intersecção da superfície com o plano $x = 0$ também é uma curva de auto-intersecção (isto corresponde ao caso $\rho_1 = \rho_2$, $\theta_1 = \pi - \theta_2$). Não é difiícil ver que estas são as únicas auto-interseções da superfície de Enneper.

Antes de passarmos ao próximo exemplo, vamos estabelecer uma relação útil entre superfícies mínimas e funções analíticas de uma variável complexa. Vamos denotar por $\mathbb{C}$ o plano complexo, que é, como de costume, identificado com $\mathbb{R}^2$ ao tomarmos $\zeta = u + iv$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Lembramos que uma função $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é *analítica* (ou *holomorfa*) quando, escrevendo

$$f(\zeta) = f_1(u, v) + i f_2(u, v),$$

as funções reais f_1 e f_2 têm derivadas parciais contínuas de primeira ordem que satisfazem às chamadas equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}.$$

Seja agora $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e defina as funções complexas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ por

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \varphi_2(\zeta) = \frac{\partial y}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \varphi_3(\zeta) = \frac{\partial z}{\partial u} - i\frac{\partial z}{\partial v},$$

onde x, y e z são as funções coordenadas de $\mathbf{x}$.

Lema. $\mathbf{x}$ *é isotérmica se e somente se* $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$. *Se essa última condição é satisfeita,* $\mathbf{x}$ *é mínima se e somente se* φ_1, φ_2 *e* φ_3 *são funções analíticas.*

Demonstração. Através de um cálculo simples, obtemos

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = E - G + 2iF,$$

donde segue a primeira parte do lema. Além disto, $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ se e somente se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) &= -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right), \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) &= -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right), \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) &= -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right), \end{aligned}$$

que são metade das equações de Cauchy-Riemann para φ_1, φ_2, φ_3. Como a outra metade é satisfeita automaticamente, concluímos que $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ se e somente se φ_1, φ_2 e φ_3 são analíticas. **Q.E.D.**

Exemplo 8 (*Superfície Mínima de Scherk*). É a superfície dada por

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(\arg\frac{\zeta+i}{\zeta-i}, \arg\frac{\zeta+1}{\zeta-1}, \log\left|\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2-1}\right|\right), \quad \zeta \neq \pm 1,\ \zeta \neq \pm i,$$

onde $\zeta = u + iv$, e $\arg\zeta$ é o ângulo que o eixo real faz com $O\zeta$.

Calcula-se facilmente que

$$\begin{aligned} \arg\frac{\zeta+i}{\zeta-i} &= \tan^{-1}\frac{2u}{u^2+v^2-1}, \\ \arg\frac{\zeta+1}{\zeta-1} &= \tan^{-1}\frac{-2v}{u^2+v^2-1}, \\ \log\left|\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2-1}\right| &= \frac{1}{2}\log\frac{(u^2-v^2+1)^2+4u^2v^2}{(u^2-v^2-1)^2+4u^2v^2}; \end{aligned}$$

portanto,

$$\varphi_1 = \frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2}{1+\zeta^2}, \quad \varphi_2 = -\frac{2i}{1-\zeta^2}, \quad \varphi_3 = \frac{4\zeta}{1-\zeta^4}.$$

Como $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$ e φ_1, φ_2 e φ_3 são analíticas, $\mathbf{x}$ é uma parametrização isotérmica de uma superfície mínima.

Vê-se facilmente a partir das expressões de x, y e z que

$$z = \log\frac{\cos y}{\cos x}.$$

Esta representação mostra que a superfície de Scherk é definida sobre um domínio em forma de tabuleiro de xadrez da Fig. 3.45 (exceto nos vértices dos quadrados, onde a superfície é na verdade uma reta vertical). Nesta forma ela foi obtida por Scherk como a superfície mínima dada como um gráfico $z = f(x,y)$ com a propriedade adicional que $f(x,y) = h(x) + g(y)$, onde h é uma função só de x e g é uma função só de y. Neste caso, a equação de $H = 0$ para um gráfico, a saber (cf. o Exemplo 5 da seção 3.3),

$$(1+f_x^2)f_{yy} + 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_y^2)f_{xx} = 0,$$

se transforma em

$$\frac{h_{xx}}{1+(h_x)^2} = -\frac{g_{yy}}{1+(g_y)^2}.$$

Como o lado direito da igualdade acima depende só de x, e o lado esquerdo depende só de y, ambos são constantes. Por integração, obtemos facilmente que, a menos de constantes,

$$h(x) = -\log\cos x, \qquad g(y) = \log\cos y,$$

donde a expressão acima para z.

As superfícies mínimas são talvez as superfícies mais estudadas em geometria diferencial, e nós meramente tocamos no assunto. Textos introdutórios relativamente simples podem ser encontrados em J.L.M. Barbosa e A.G. Colares, *Minimal Surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Lecture Notes in Math., vol. 1195, Springer-Verlag, 1985, e M. do Carmo, *Superfícies Mínimas*, 16 Colóquio Brasileiro de Matemática, 1987. Um texto de nível médio é R. Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, 2^{nd} edition, Dover, 1986. A teoria desenvolveu-se em um ramo rico da geometria diferencial, no qual questões interessantes e não-triviais ainda estão sendo investigadas. Há uma conexão profunda com as funções analíticas de variáveis complexas e com as equações diferenciais parciais. Via de regra, os resultados da teoria têm um certo charme por serem de fácil visualização e muito difíceis de provar. Para dar ao leitor um pouco do sabor do assunto, encerramos este breve relato enunciando sem demonstração um resultado surpreendente.

Teorema (Osserman). *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$, regular, fechada (como subconjunto de $\mathbb{R}^3$), e que não seja um plano. Então a imagem da aplicação de Gauss $N : S \to S^2$ é densa na esfera S^2 (isto é, arbitrariamente próximo a qualquer ponto de S^2 há um ponto de $N(S) \subset S^2$).*

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada no livro do Osserman, citado acima. Em verdade, o teorema é um pouco mais forte, por se aplicar a superfícies completas, um conceito que definiremos na seção 5.3.

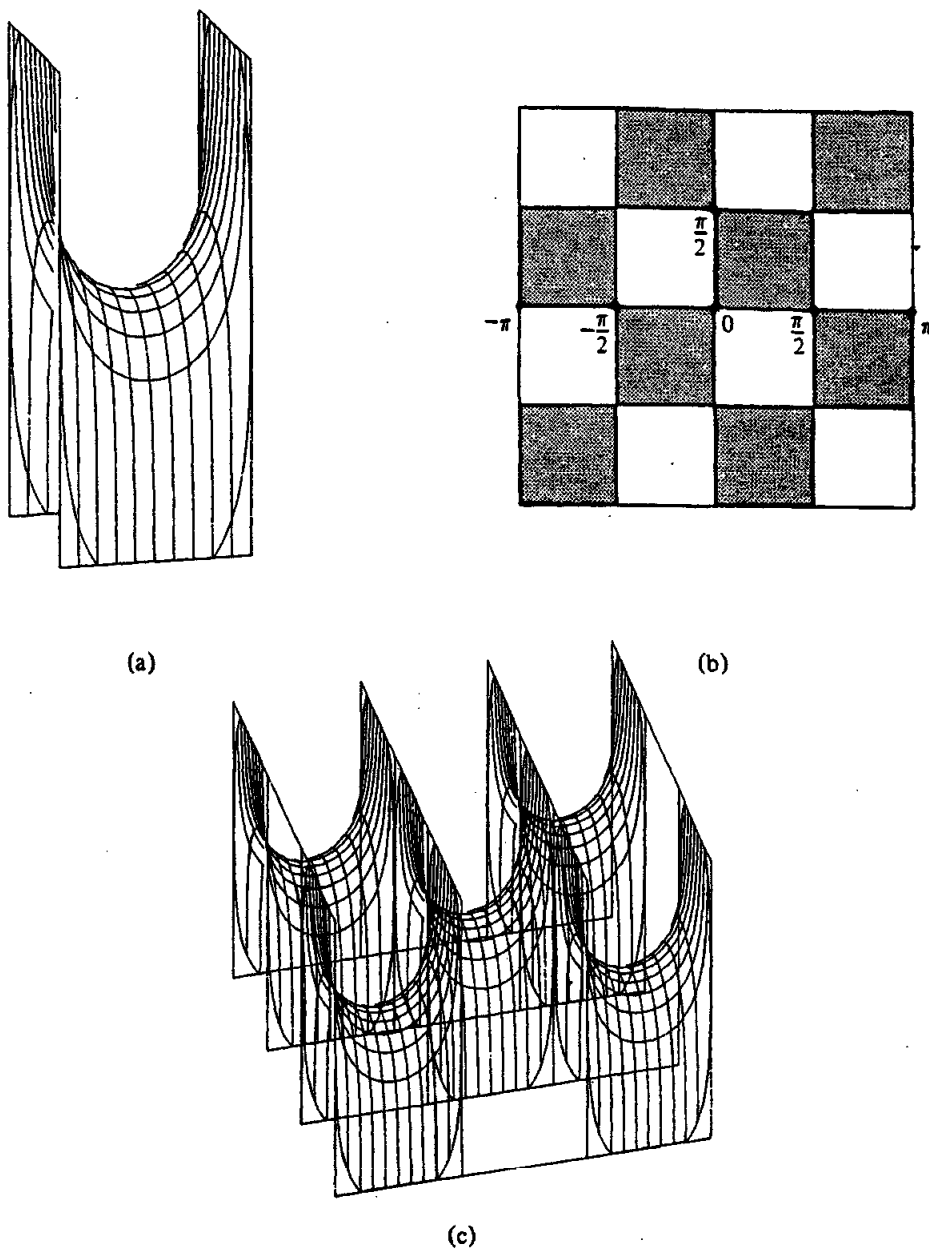



Figura 3-45. *A superfície de Scherk.*

Exercícios

1. Mostre que o helicóide (cf. Exemplo 3, seção 2.5) é uma superfície regrada, que a sua linha de estricção é o eixo Oz, e que o seu parâmetro de distribuição é constante.

2. Mostre que no hiperbolóide de revolução $x^2+y^2-z^2=1$, o paralelo com

menor raio é a linha de estricção, que as geratrizes a intersectam sob um ângulo constante, e que o parâmetro de distribuição é constante.

3. Seja $\alpha : I \to S \subset \mathbb{R}^3$ uma curva em uma superfície regular S e considere a superfície regrada gerada pela família $\{\alpha(t), N(t)\}$, onde $N(t)$ é a normal à superfície em $\alpha(t)$. Prove que $\alpha(I) \subset S$ é uma linha de curvatura em S se e somente se esta superfície é desenvolvível.

4. Suponha que uma superfície regrada não-cilíndrica

$$\mathbf{x}(t,v) = \alpha(t) + vw(t), \qquad |w(t)| = 1,$$

seja regular. Sejam $w(t_1)$, $w(t_2)$ as direções de duas geratrizes de $\mathbf{x}$ e sejam $\mathbf{x}(t_1, v_1)$, $\mathbf{x}(t_2, v_2)$ os pés da perpendicular comum a essas duas geratrizes. Quando $t_2 \to t_1$, estes pontos tendem para um ponto $\mathbf{x}(t_1, \bar{v})$. Para determinar $(t_1, \bar{v})$ prove o seguinte:

a. O vetor unitário da perpendicular comum converge para um vetor unitário tangente à superfície em $(t_1, \bar{v})$. Conclua que, em $(t_1, \bar{v})$,

$$\langle w' \wedge w, N \rangle = 0.$$

b.

$$\bar{v} = -\frac{\langle \alpha', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle}.$$

Assim, $(t_1, \bar{v})$ é o ponto central da geratriz passando por t_1, e isto fornece uma outra interpretação da linha de estricção (supondo-a não-singular).

5. Um *conóide reto* é uma superfície regrada cujas geratrizes L_t intersectam ortogonalmente um eixo fixo r, que não encontra a diretriz $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$.

a. Encontre uma parametrização para o conóide reto e determine a condição que implica que a superfície é não-cilíndrica.

b. Dado um conóide reto que satisfaz a condição de ser não-cilíndrica, encontre a linha de estricção e o parâmetro de distribuição.

6. Seja

$$\mathbf{x}(t,v) = \alpha(t) + vw(t)$$

uma superfície desenvolvível. Prove que em um ponto regular temos

$$\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N_v, \mathbf{x}_t \rangle = 0.$$

Conclua que *o plano tangente a uma superfície desenvolvível é constante ao longo (dos pontos regulares) de uma geratriz fixada.*

7. Sejam S uma superfície regular e $C \subset S$ uma curva regular em S, que nunca é tangente a uma direção assintótica. Considere a envoltória da família de planos tangentes de S ao longo de C. Prove que a direção da geratriz que passa por um ponto $p \in C$ é conjugada à direção tangente de C em p.

8. Mostre que se $C \subset S^2$ é um paralelo de uma esfera unitária S^2, então a envoltória dos planos tangentes de S^2 ao longo de C é um cilindro , se C é um equador, ou é um cone, se C não é um equador.

9. (*Superfícies Focais.*) Seja S uma superfície regular sem pontos parabólicos ou umbílicos. Seja $\mathbf{x}: U \to S$ uma parametrização de S tal que as curvas coordenadas sejam linhas de curvatura (se U é pequeno, isso não é uma restrição, cf. Corolário 4, seção 3.4). As superfícies parametrizadas

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(u,v) &= \mathbf{x}(u,v) + \rho_1 N(u,v), \\ \mathbf{z}(u,v) &= \mathbf{x}(u,v) + \rho_2 N(u,v), \end{aligned}$$

onde $\rho_1 = 1/k_1$, $\rho_2 = 1/k_2$, são chamadas *superfícies focais* de $\mathbf{x}(U)$ (ou *superfícies dos centros* de $\mathbf{x}(U)$; essa terminologia vem do fato de que $\mathbf{y}(u,v)$, por exemplo, é o centro do círculo osculador (cf. seção 1.6, Exercício 2) da seção normal em $\mathbf{x}(u,v)$ correspondendo à curvatura principal k_1). Prove que

a. Se $(k_1)_u$ e $(k_2)_v$ nunca se anulam, então $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ são superfícies parametrizadas regulares.

b. Em pontos regulares, as direções sobre a superfície focal correspondendo às direções principais em $\mathbf{x}(U)$ são conjugadas. Isto significa, por exemplo, que $\mathbf{y}_u$ e $\mathbf{y}_v$ são vetores conjugados em $\mathbf{y}(U)$ para todo $(u,v) \in U$.

c. Uma superfície focal, digamos $\mathbf{y}$, pode ser construída da seguinte maneira: Considere a linha de curvatura $\mathbf{x}(u, const.)$ em $\mathbf{x}(U)$, e construa a superfície desenvolvivel gerada pelas normais a $\mathbf{x}(U)$ ao longo da curva $\mathbf{x}(u, const.)$ (Exercício 3). A linha de estricção de uma tal superfície desenvolvível está sobre $\mathbf{y}(U)$, e à medida que $\mathbf{x}(u, const.)$ descreve $\mathbf{x}(U)$, essa linha descreve $\mathbf{y}(U)$ (Fig. 3.46).

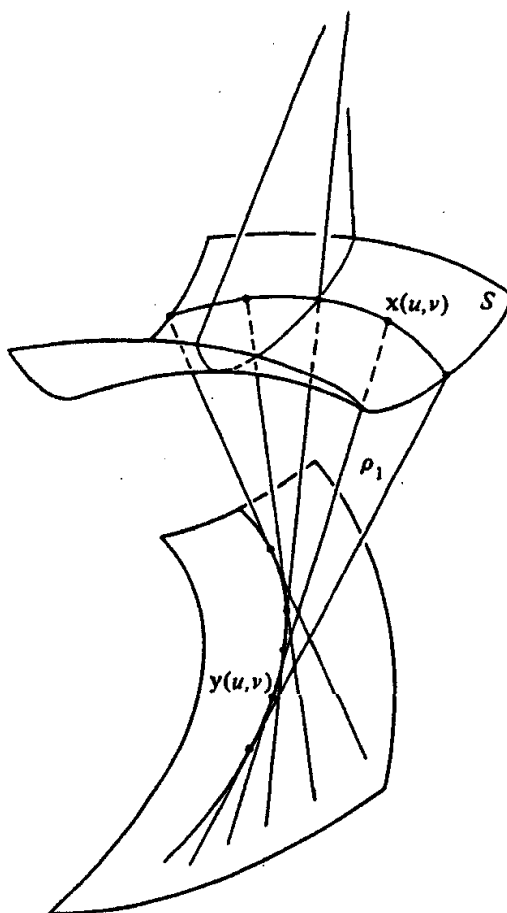



Figura 3-46. ***Construção de uma superfície focal.***

10. O Exemplo 4 pode ser generalizado da seguinte maneira. *Uma família diferenciável a 1-parâmetro de planos* $\{\alpha(t), N(t)\}$ é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um ponto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e um vetor unitário $N(t) \in \mathbb{R}^3$ de tal modo que ambos α e N sejam aplicações diferenciáveis. A família $\{\alpha(t), N(t)\}$ é chamada uma *família de planos tangentes* se $\alpha'(t) \neq 0$, $N'(t) \neq 0$, e $\langle \alpha'(t), N(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I$.

a. Forneça uma prova de que uma família diferenciável a 1-parâmetro de planos tangentes $\{\alpha(t), N(t)\}$ determina uma família diferenciável a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), (N \wedge N')/|N'|\}$ que gera a superfíce desenvolvível

$$\mathbf{x}(t,v) = \alpha(t) + v\frac{N \wedge N'}{|N'|}. \qquad (\star)$$

A superfície $(\star)$ é chamada *envoltória da família* $\{\alpha(t), N(t)\}$.

b. Prove que se $\alpha'(t) \wedge (N(t) \wedge N'(t)) \neq 0$ para todo $t \in I$, então a envoltória $(\star)$ é regular em uma vizinhança de $v = 0$, e o vetor normal unitário de $\mathbf{x}$ em $(t, 0)$ é $N(t)$.

c. Seja $\alpha = \alpha(s)$ uma curva em $\mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco. Suponha que a curvatura $k(s)$ e a torção $\tau(s)$ de α nunca se anulam. Prove que a família de planos osculadores $\{\alpha(s), b(s)\}$ é uma família diferenciável a 1-parâmetro de planos tangentes e que a envoltória desta família é a superfície tangente a $\alpha(s)$ (cf. Exemplo 5, seção 2.3).

11. Seja $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Uma *superfície paralela* a $\mathbf{x}$ é uma superfície parametrizada

$$\mathbf{y}(u,v) = \mathbf{x}(u,v) + aN(u,v),$$

onde a é uma constante.

a. Prove que $\mathbf{y}_u \wedge \mathbf{y}_v = (1 - 2aH + a^2K)(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)$, onde K e H são as curvaturas Gaussiana e média, respectivamente.

b. Prove que em pontos regulares, a curvatura Gaussiana de $\mathbf{y}$ é

$$\frac{K}{1 - 2aH + a^2K}$$

e a curvatura média de $\mathbf{y}$ é

$$\frac{H - Ka}{1 - 2aH + a^2K}.$$

c. Seja $\mathbf{x}$ uma superfície com curvatura média constante igual a $c \neq 0$ e considere a superfície paralela a $\mathbf{x}$ a uma distância $1/2c$. Prove que esta superfície paralela tem curvatura Gaussiana constante igual a $4c^2$.

12. Prove que não existem superfícies mínimas compactas (i.e. fechadas e limitadas em $\mathbb{R}^3$).

13. a. Seja S uma superfície regular sem pontos umbílicos. Prove que S é uma superfície mínima se e somente se a aplicação de Gauss $N : S \to S^2$ satisfaz, para todo $p \in S$ e quaisquer $w_1, w_2 \in T_pS$,

$$\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2)\rangle_{N(p)} = \lambda(p)\langle w_1, w_2\rangle_p,$$

onde $\lambda(p) \neq 0$ é um número que depende apenas de p.

b. Seja $\mathbf{x} : U \to S^2$ uma parametrização da esfera unitária S^2 pela projeção estereográfica. Considere uma vizinhança V de um ponto p da superfície mínima sem pontos planares S do item **a** tal que $N : S \to S^2$ restrita a V seja um difeomorfismo (como $K(p) = \det(dN_p) \neq 0$, uma tal V existe pelo teorema da função inversa). Prove que a parametrização $\mathbf{y} = N^{-1} \circ \mathbf{x} : U \to S$ é isotérmica (*isto fornece uma maneira de introduzir parametrizações isotérmicas em superfícies mínimas sem pontos planares*).

14. Quando duas funções diferenciáveis $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \to R$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u},$$

vê-se facilmente que elas são harmônicas; nesta situação, diz-se que f e g são *harmônicas conjugadas*. Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ parametrizações isotérmicas de superfícies mínimas tais que os pares formados pelas respectivas funções componentes sejam de funções harmônicas conjugadas; diz-se então que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são *superfícies minimas conjugadas*. Prove que

a. O helicóide e o catenóide são superfícies mínimas conjugadas.

b. Dadas duas superfícies mínimas conjugadas, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, a superfície

$$\mathbf{z} = (\cos t)\mathbf{x} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{y} \qquad (\star)$$

também é mínima para todo $t \in R$.

c. Todas as superfícies da família a 1-parâmetro ($\star$) têm a mesma primeira forma fundamental: $E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{y}_v, \mathbf{y}_v \rangle$, $F = 0$, $G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_u \rangle$.

Assim, quaisquer duas superfícies mínimas conjugadas podem ser ligadas por uma família a 1-parâmetro de superfícies mínimas, e a primeira forma fundamental dessa família não depende de t.

Apêndice: Aplicações Lineares Auto-Adjuntas e Formas Quadráticas

Neste apêndice, denotamos por V um espaço vetorial de dimensão 2, munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. O material que apresentamos a seguir pode ser facilmente generalizado para um espaço vetorial de dimensão n mas, para simplificar, trataremos apenas o caso $n = 2$.

Diz-se que uma aplicação linear $A : V \to V$ é *auto-adjunta* se $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ para todo $v, w \in V$.

Note que se $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de V e (α_{ij}), $i, j = 1, 2$, é a matriz de A relativa a esta base, então

$$\alpha_{ij} = \langle Ae_j, e_i\rangle = \langle e_j, Ae_i\rangle = \langle Ae_i, e_j\rangle = \alpha_{ji};$$

isto é, a matriz (α_{ij}) é simétrica.

A cada aplicação linear auto-adjunta associamos uma aplicaçã o $B : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por

$$B(v, w) = \langle Av, w\rangle.$$

É claro que B é bilinear, isto é, é linear em ambos v e w. Além disso, o fato de que A é auto-adjunta implica que $B(v, w) = B(w, v)$; isto é, B é uma forma bilinear e simétrica em V.

Reciprocamente, se B é uma forma bilinear e simétrica em V, podemos definir uma aplicação linear $A : V \to V$ por $\langle Av, w\rangle = B(v, w)$ e a simetria de B implica que A é auto-adjunta.

Por outro lado, a cada forma bilinear e simétrica em V, corresponde uma forma quadrática Q em V dada por

$$Q(v) = B(v, v), \quad v \in V,$$

e o conhecimento de Q determina B completamente, pois

$$B(u, v) = \frac{1}{2}[Q(u + v) - Q(u) - Q(v)].$$

Assim, estabelecemos uma bijeção entre formas quadráticas em V e aplicações lineares auto-adjuntas de V.

A meta deste apêndice é provar que (veja o teorema abaixo) dada uma aplicação linear auto-adjunta $A : V \to V$, existe uma base ortonormal de V tal que a matriz de A relativa a esta base é uma matriz diagonal. Além disso, os elementos da diagonal são o máximo e o mínimo da forma quadrática correspondente restrita ao círculo unitário de V.

Lema. *Se a função* $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, *restrita ao círculo unitário* $x^2 + y^2 = 1$, *tem um máximo no ponto* $(1,0)$, *então* $b = 0$.

Demonstração. Parametrize o círculo $x^2 + y^2 = 1$ por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $t \in (0 - \varepsilon, 2\pi + \varepsilon)$. Assim, Q, restrita a este círculo, torna-se uma função de t :

$$Q(t) = a\cos^2 t + 2b\cos t \operatorname{sen} t + c \operatorname{sen}^2 t.$$

Como Q tem um máximo no ponto $(1,0)$ temos

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{t=0} = 2b = 0.$$

Portanto, $b = 0$, como desejado.

Q.E.D.

Proposição. *Dada uma forma quadrática Q em V, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tal que se $v \in V$ é dado por $v = xe_1 + ye_2$, então*

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2,$$

onde λ_1 e λ_2 são o máximo e mínimo, respectivamente, de Q sobre o círculo unitário $|v| = 1$.

Demonstração. Seja λ_1 o máximo de Q sobre o círculo unitário $|v| = 1$, e seja e_1 um vetor unitário tal que $Q(e_1) = \lambda_1$. Um tal e_1 existe pela continuidade de Q sobre o conjunto compacto $|v| = 1$. Seja e_2 um vetor unitário que é ortogonal a e_1, e seja $\lambda_2 = Q(e_2)$. Mostraremos agora que a base $\{e_1, e_2\}$ satisfaz as condições da proposição.

Seja B a forma simétrica bilinear associada a Q e $v = xe_1 + ye_2$. Então

$$\begin{aligned} Q(v) &= B(v,v) = B(xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2) \\ &= \lambda_1 x^2 + 2bxy + \lambda_2 y^2, \end{aligned}$$

onde $b = B(e_1, e_2)$. Pelo lema $b = 0$, e resta apenas provar que λ_2 é o mínimo de Q sobre o círculo $|v| = 1$. Isto é imediato pois, para qualquer $v = xe_1 + ye_2$ com $x^2 + y^2 = 1$, temos que

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \geq \lambda_2(x^2 + y^2) = \lambda_2,$$

já que $\lambda_2 \leq \lambda_1$.

Q.E.D.

Diz-se que um vetor $v \neq 0$ é um *auto-vetor* de uma aplicação linear $A : V \to V$ se $Av = \lambda v$ para algum número real λ; λ é então chamado um *auto-valor* de A.

Teorema. *Seja $A : V \to V$ uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tais que $A(e_1) = \lambda_1 e_1$, $A(e_2) = \lambda_2 e_2$ (isto é, e_1 e e_2 são auto-vetores, e λ_1, λ_2 são auto-valores de A). Na base $\{e_1, e_2\}$, a matriz de A é diagonal e os elementos λ_1 e λ_2, $\lambda_1 \geq \lambda_2$, da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática $Q(v) = \langle Av, v\rangle$ sobre o círculo unitário de V.*

Demonstração. Considere a forma quadrática $Q(v) = \langle Av, v\rangle$. Pela proposição acima, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V, tal que $Q(e_1) = \lambda_1$, $Q(e_2) = \lambda_2 \leq \lambda_1$, onde λ_1 e λ_2 são o máximo e o mínimo, respectivamente, de Q sobre o círculo unitário. Resta, portanto, provar que

$$A(e_1) = \lambda_1 e_1, \quad A(e_2) = \lambda_2 e_2.$$

Como $B(e_1, e_2) = \langle Ae_1, e_2\rangle = 0$ (pelo lema) e $e_2 \neq 0$, temos que Ae_1 é paralelo a e_1 ou $Ae_1 = 0$. Se Ae_1 é paralelo a e_1, então $Ae_1 = \alpha e_1$, e como $\langle Ae_1, e_1\rangle = \lambda_1 = \langle \alpha e_1, e_1\rangle = \alpha$, concluimos que $Ae_1 = \lambda_1 e_1$; se $Ae_1 = 0$, então $\lambda_1 = \langle Ae_1, e_1\rangle = 0$, e $Ae_1 = 0 = \lambda_1 e_1$. Assim, em qualquer caso, temos que $Ae_1 = \lambda_1 e_1$.

Agora, usando o fato de que

$$B(e_1, e_2) = \langle Ae_2, e_1\rangle = 0$$

e que

$$\langle Ae_2, e_2\rangle = \lambda_2,$$

podemos, da mesma forma, provar que $Ae_2 = \lambda_2 e_2$.

Q.E.D.

Observação. A extensão dos resultados acima para um espaço vetorial de dimensão $n > 2$ requer apenas a seguinte precaução. Na proposição anterior, deve-se escolher o máximo $\lambda_1 = Q(e_1)$ de Q na esfera unitária, e então mostrar que Q restrita ao sub-espaço V_1 ortogonal a e_1 é uma forma quadrática Q_1 sobre V_1. Escolhemos para $\lambda_2 = Q_1(e_2)$ o máximo de Q_1 sobre a esfera unitária de V_1, e assim por diante.

4

Geometria Intrínseca das Superfícies

4.1 Introdução

No capítulo 2 introduzimos a primeira forma fundamental de uma superfície S e mostramos como ela pode ser usada para calcular conceitos métricos simples sobre S (comprimento, ângulo, área, etc.). O ponto importante é que tais cálculos podem ser feitos, conhecendo-se a primeira forma fundamental, sem "sair" da superfície. Por causa disto, diz-se que estes conceitos são intrínsecos à superfície S.

A geometria da primeira forma fundamental, contudo, não se limita aos conceitos simples mencionados acima. Como veremos neste capítulo, muitas propriedades locais importantes de uma superfície podem ser expressas apenas em termos da primeira forma fundamental. O estudo de tais propriedades é chamado de *geometria intrínseca* da superfície. Este capítulo é dedicado à geometria intrínseca.

Na seção 4.2 definimos a noção de isometria, que essencialmente torna precisa a noção intuitiva de duas superfícies terem "a mesma" primeira forma fundamental.

Na seção 4.3 demonstramos a célebre formula de Gauss que expressa a curvatura Gaussiana K como uma função dos coeficientes da primeira forma fundamental e de suas derivadas. Isto significa que K é um conceito intrínseco, um fato extraordinário, se considerarmos que K foi definida usando-se a segunda forma fundamental.

Na seção 4.4 iniciamos um estudo sistemático da geometria intrínseca. O assunto pode ser unificado através do conceito de derivada covariante de um campo vetorial sobre uma superfície. Tal conceito é uma generalização da derivada usual de um campo vetorial no plano, e tem um papel importante ao longo deste capítulo.

A seção 4.5 é dedicada ao teorema de Gauss-Bonnet, em suas versões local e global. Este é provavelmente o teorema mais importante deste livro. Mesmo em um curso breve, deve-se fazer um esforço para alcançar a seção 4.5.

Na seção 4.6 definimos a aplicação exponencial e a utilizamos para introduzir dois sistemas de coordenadas especiais, a saber, as coordenadas normais e as coordenadas polares geodésicas.

Na seção 4.7 tratamos de alguns pontos delicados da teoria das geodésicas que foram deixados de lado nas seções anteriores. Por exemplo, provamos a existência, para cada ponto p de uma superfície S, de uma vizinhança de p em S que é uma vizinhança normal de todos os seus pontos (a definição de vizinhança normal é dada na seção 4.6). Este resultado e um outro relacionado a ele são usados no capítulo 5; no entanto, provavelmente convém admiti-los e omitir a seção 4.7 em uma primeira leitura. Provamos também a existência de vizinhanças convexas, mas tal fato não será utilizado posteriormente em qualquer parte deste livro.

4.2 Isometrias; Aplicações Conformes

Os exemplos 1 e 2 da seção 2.5 exibem uma peculiaridade interessante. Embora o cilindro e o plano sejam superfícies distintas, suas primeira formas fundamentais são "iguais" (pelo menos, nos sistemas de coordenadas que consideramos). Isto significa que, no que se refere a questões métricas intrínsecas (comprimento, ângulo, área), o plano e o cilindro se comportam localmente da mesma maneira. (Isto é claro intuitivamente, já que cortando-se um cilindro ao longo de uma das geratrizes pode-se desenrolá-lo sobre uma parte do plano.) Neste capítulo veremos que muitos outros conceitos importantes associados a uma superfície regular dependem apenas da primeira forma fundamental e podem ser incluídos na categoria dos conceitos intrínsecos. Convém, portanto, formular de maneira precisa o que significa dizer que duas superfícies têm a mesma primeira forma fundamental.

No que se segue, S e $\bar{S}$ denotam sempre superfícies regulares.

DEFINIÇÃO 1. *Uma aplicação $\varphi : S \to \bar{S}$ é uma* isometria *se φ é um difeomorfismo e para todo $p \in S$ e todos os pares $w_1, w_2 \in T_pS$, temos*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Diz-se então que as superfícies S e $\bar{S}$ são isométricas.

Em outras palavras, um difeomorfismo φ é uma isometria se a diferencial $d\varphi$ preserva o produto interno. Se φ é uma isometria, segue-se que

$$I_p(w) = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w)\rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

para todo $w \in T_pS$. Reciprocamente, se um difeomorfismo φ preserva a primeira forma fundamental, isto é,

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \quad \text{para todo } w \in T_pS,$$

então

$$\begin{aligned} & 2\langle w_1, w_2\rangle_p = I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\ = \ & I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1 + w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)) \\ = \ & 2\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\rangle_{\varphi(p)}, \end{aligned}$$

e φ é, portanto, uma isometria.

DEFINIÇÃO 2. *Uma aplicação $\varphi : V \to \bar{S}$ de uma vizinhança V de $p \in S$ é uma* isometria local *em p se existe uma vizinhança $\bar{V}$ de $\varphi(p) \in \bar{S}$ tal que $\varphi : V \to \bar{V}$ é uma isometria. Se existir uma isometria local em $\bar{S}$ para todo ponto $p \in S$, diz-se que a superfície S é* localmente isométrica *a $\bar{S}$. S e $\bar{S}$ são* localmente isométricas *se S é localmente isométrica a $\bar{S}$ e $\bar{S}$ é localmente isométrica a S.*

É claro que se $\varphi : S \to \bar{S}$ é um difeomorfismo e uma isometria local para todo $p \in S$, então φ é uma isometria (globalmente). Pode acontecer, no entanto, que duas superfícies sejam localmente isométricas sem que sejam (globalmente) isométricas, como mostramos no exemplo seguinte.

Exemplo 1. Seja φ uma aplicação da vizinhança coordenada $\bar{\mathbf{x}}(U)$ do cilindro dado no Exemplo 2 da seção 2.5 sobre o plano $\mathbf{x}(\mathbb{R}^2)$ do Exemplo 1 da seção 2.5, definida por $\varphi : \mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1}$ (trocamos $\mathbf{x}$ por $\bar{\mathbf{x}}$ na parametrização do cilindro). Então φ é uma isometria local. De fato, cada vetor w, tangente ao cilindro em um ponto $p \in \bar{\mathbf{x}}(U)$, é tangente a uma curva $\bar{\mathbf{x}}(u(t), v(t))$, onde $(u(t), v(t))$ é uma curva em $U \subset \mathbb{R}^2$. Assim, w pode ser escrito como

$$w = \bar{\mathbf{x}}_u u' + \bar{\mathbf{x}}_v v'.$$

Por outro lado, $d\varphi(w)$ é tangente à curva

$$\varphi(\bar{\mathbf{x}}(u(t), v(t))) = \mathbf{x}(u(t), v(t)).$$

Logo, $d\varphi(w) = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$. Como $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$, obtemos

$$\begin{aligned} I_p(w) &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 \\ &= \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F}u'v' + \bar{G}(v')^2 = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \end{aligned}$$

como havíamos afirmado. Segue-se que o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ é localmente isométrico a um plano.

A isometria não pode ser estendida ao cilindro inteiro pois o cilindro não é nem mesmo homeomorfo a um plano. Não cabe aqui uma demonstração rigorosa desta última afirmação, mas o argumento intuitivo dado a seguir pode dar uma idéia da demonstração. Qualquer curva simples e fechada no plano pode ser encolhida continuamente até tornar-se um ponto sem deixar o plano (Fig. 4.1). Tal propriedade certamente seria preservada por um homeomorfismo. Mas um paralelo do cilindro (Fig. 4.1) não possui esta propriedade, e contradiz a existência de um homeomorfismo entre o plano e o cilindro.

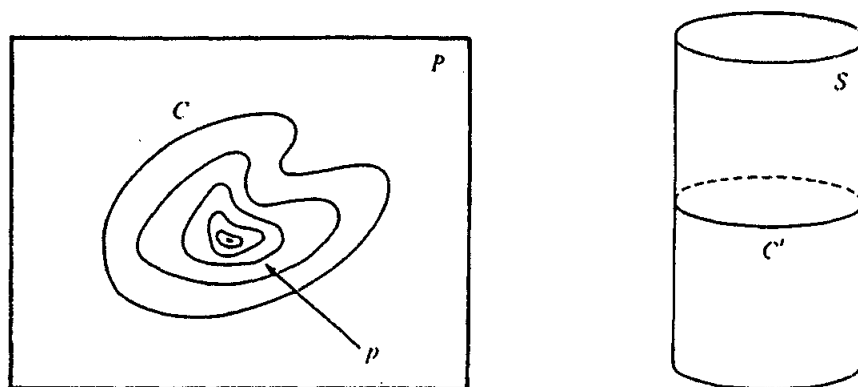



Figura 4-1. *$C \subset P$ pode ser deformada continuamente em um ponto sem abandonar P. O mesmo não ocorre com $C' \subset S$.*

Antes de apresentarmos mais exemplos, vamos generalizar o argumento dado acima para obter um critério para isometria local em termos de coordenadas locais.

Proposição 1. *Suponha a existência de parametrizações $\mathbf{x} : U \to S$ e $\bar{\mathbf{x}} : U \to \bar{S}$ tais que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$ em U. Então a aplicação $\varphi = \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \to \bar{S}$ é uma isometria local.*

Demonstração. Seja $p \in \mathbf{x}(U)$ e $w \in T_pS$. Então w é tangente a uma curva $\mathbf{x}(\alpha(t))$ em $t = 0$, onde $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ é uma curva em U; assim, w pode

ser escrito como $(t = 0)$

$$w = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'.$$

Por definição, o vetor $d\varphi_p(w)$ é o vetor tangente à curva $\bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}(\alpha(t))$, i.e., à curva $\bar{\mathbf{x}}(\alpha(t))$ em $t = 0$ (Fig. 4.2). Logo,

$$d\varphi(w) = \bar{\mathbf{x}}_u u' + \bar{\mathbf{x}}_v v'.$$

Como

$$\begin{aligned} I_p(w) &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \\ I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) &= \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F}u'v' + \bar{G}(v')^2, \end{aligned}$$

concluímos que $I_{p(w)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$ para todo $p \in \mathbf{x}(U)$ e todo $w \in T_pS$; portanto, φ é uma isometria local.

Q.E.D.

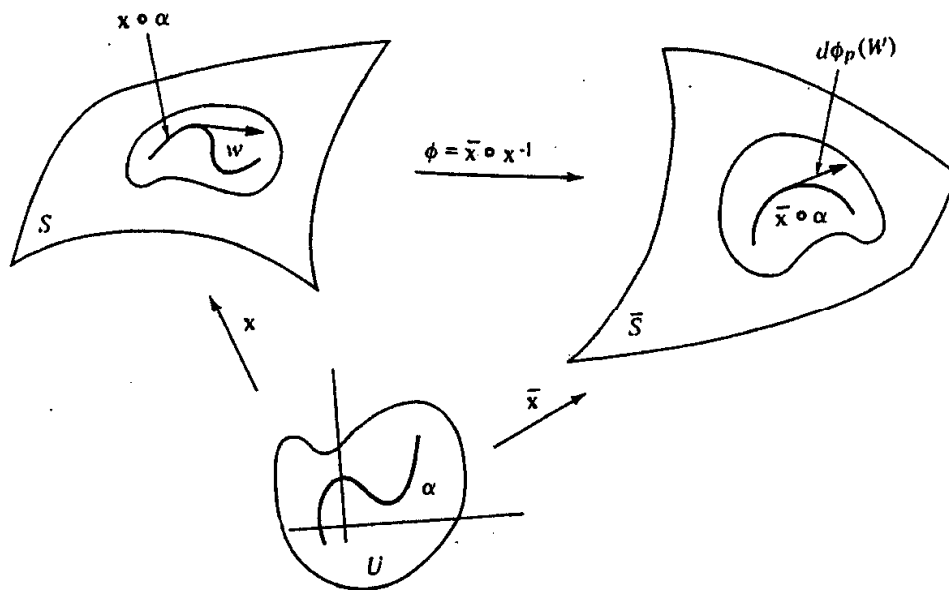



Figura 4-2

Exemplo 2. Seja S uma superfície de revolução e seja

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v)),$$

$$a < v < b, \qquad 0 < u < 2\pi, \qquad f(v) > 0,$$

uma parametrização de S (cf. Exemplo 4, seção 2.3). Os coeficientes da primeira forma fundamental de S na parametrização $\mathbf{x}$ são dados por

$$E = (f(v))^2, \qquad F = 0, \qquad G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2.$$

Em particular, a superfície de revolução da *catenária,*

$$x = a \cosh v, \qquad z = av, \qquad -\infty < v < \infty,$$

tem a seguinte parametrização:

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \operatorname{sen} u, av),$$

$$0 < u < 2\pi, \qquad -\infty < v < \infty,$$

e os respectivos coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = a^2 \cosh^2 v, \qquad F = 0, \qquad G = a^2(1 + \operatorname{senh}^2 v) = a^2 \cosh^2 v.$$

Esta superfície de revolução é chamada *catenóide* (ver Fig. 4.3). Mostraremos que o catenóide é localmente isométrico ao helicóide do Exemplo 3, seção 2.5.

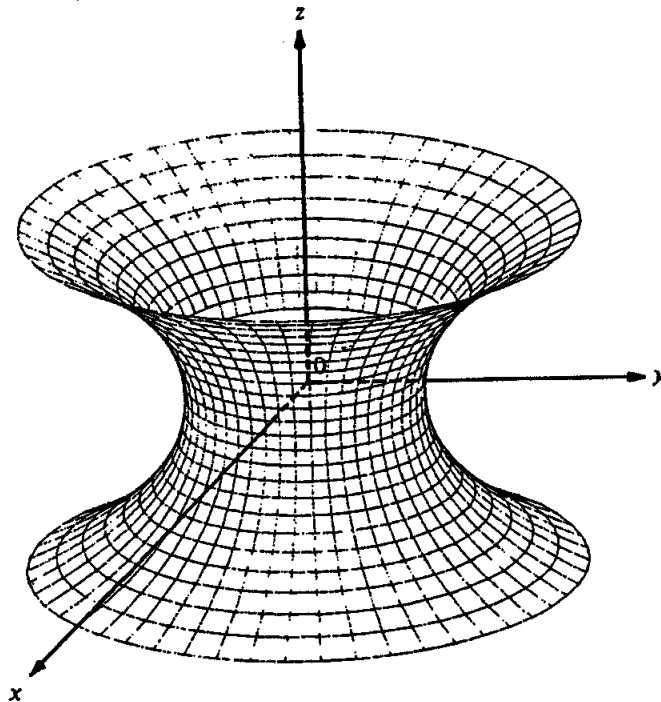



Figura 4-3. *O catenóide.*

Uma parametrização para o helicóide é dada por

$$\bar{\mathrm{x}}(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{v}\cos\bar{u}, \bar{v}\,sen\,\bar{u}, a\bar{u}), \qquad 0 < \bar{u} < 2\pi, -\infty < \bar{v} < \infty.$$

Vamos fazer a seguinte mudança de parâmetros:

$$\bar{u} = u, \qquad \bar{v} = a\,\mathrm{senh}\,v, \qquad 0 < u < 2\pi, \ -\infty < v < \infty,$$

que é possível já que a aplicação é evidentemente bijetiva, e o Jacobiano

$$\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)} = a\cosh v$$

nunca se anula. Assim, uma nova parametrização do helicóide é

$$\bar{\mathrm{x}}(u,v) = (a\,\mathrm{senh}\,v\cos u, a\,\mathrm{senh}\,v\,\mathrm{sen}\,u, au),$$

e os respectivos coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = a^2\cosh^2 v, \qquad F = 0, \qquad G = a^2\cosh^2 v.$$

Utilizando a Prop. 1, concluímos que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos.

A Figura 4.4 fornece uma idéia geométrica de como opera a isometria; ela aplica "uma volta" do helicóide (vizinhança coordenada correspondente a $0 < u < 2\pi$) sobre o catenóide menos um meridiano.

Observação 1. A isometria entre o helicóide e o catenóide já apareceu no Capítulo 3, no contexto das superfícies mínimas; cf. Exercício 14, seção 3.5.

Exemplo 3. Mostraremos que o cone de uma folha (menos o vértice)

$$z = +k\sqrt{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0),$$

é localmente isométrico a um plano. A idéia é mostrar que o cone menos uma geratriz pode ser "rolado" sobre um pedaço de um plano.

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto dado em coordenadas polares (ρ,θ) por

$$0 < \rho < \infty, \qquad 0 < \theta < 2\pi\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

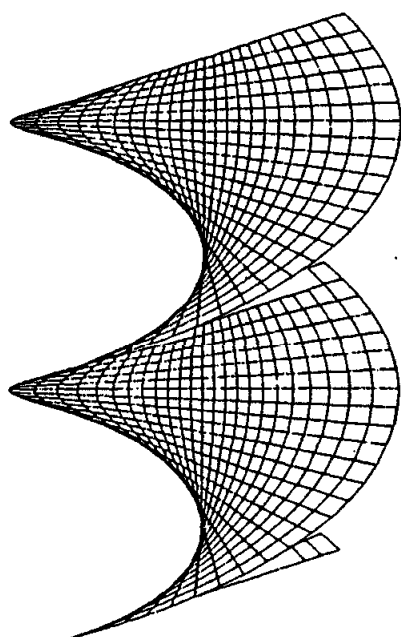
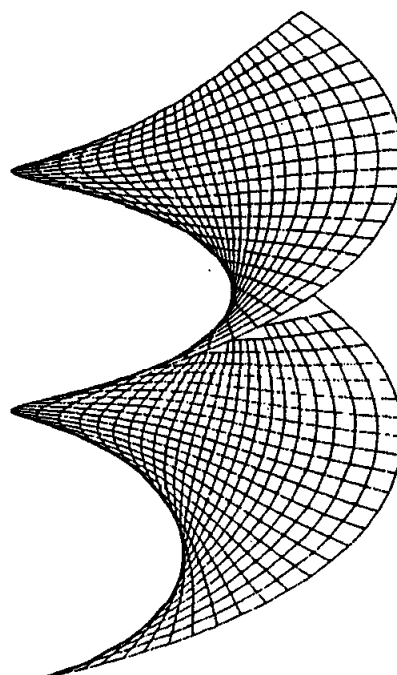
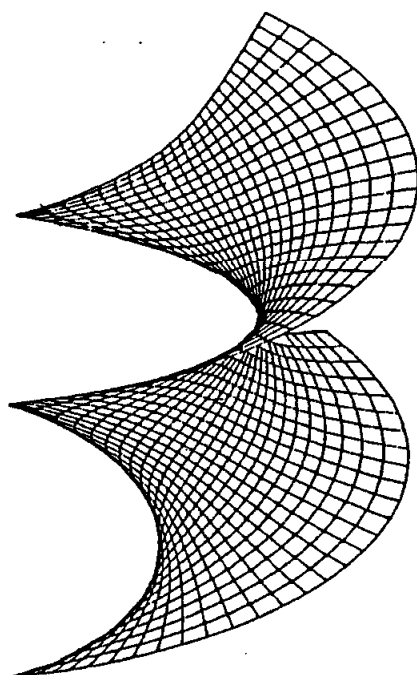
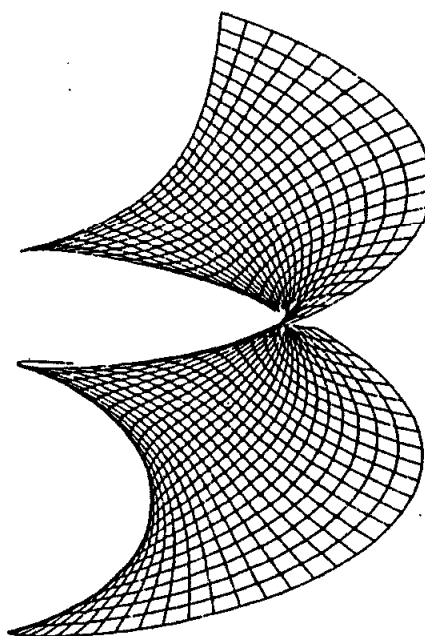



Figura 4-4. *Deformação isométrica do helicóide no catenóide.*

(e) Fase 5

(f) Fase 6

(g) Fase 7

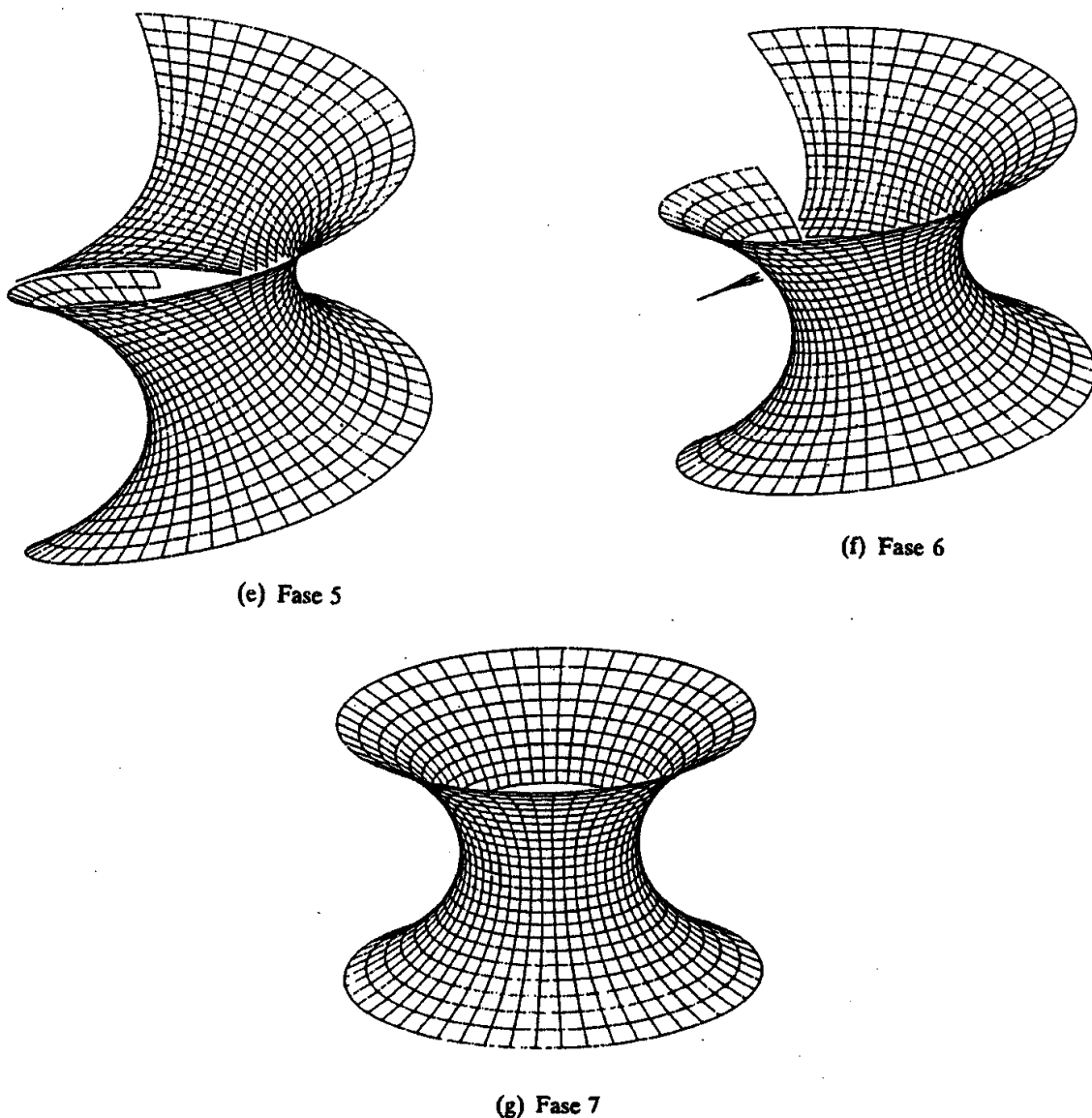



Figura 4-4

onde 2α $(0 < 2\alpha < \pi)$ é o ângulo no vértice do cone (i.e., onde $\operatorname{cotg}\alpha = k$), e seja $F : U \to \mathbb{R}^3$ a aplicação (Fig. 4.5)

$$F(\rho, \theta) = \left(\rho \operatorname{sen}\alpha \cos(\frac{\theta}{\operatorname{sen}\alpha}), \rho \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\frac{\theta}{\operatorname{sen}\alpha}), \rho\cos\alpha\right).$$

É claro que $F(U)$ está contido no cone pois

$$k\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{cotg}\alpha \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\alpha} = \rho\cos\alpha = z.$$

Além disso, quando θ percorre o intervalo $(0, 2\pi \operatorname{sen}\alpha)$, $\theta/\operatorname{sen}\alpha$ percorre o intervalo $(0, 2\pi)$. Assim, todos os pontos do cone exceto a geratriz $\theta = 0$ são cobertos por $F(U)$.

Verifica-se facilmente que F e dF são injetivas em U; portanto, F é um difeomorfismo de U sobre o cone menos uma geratriz.

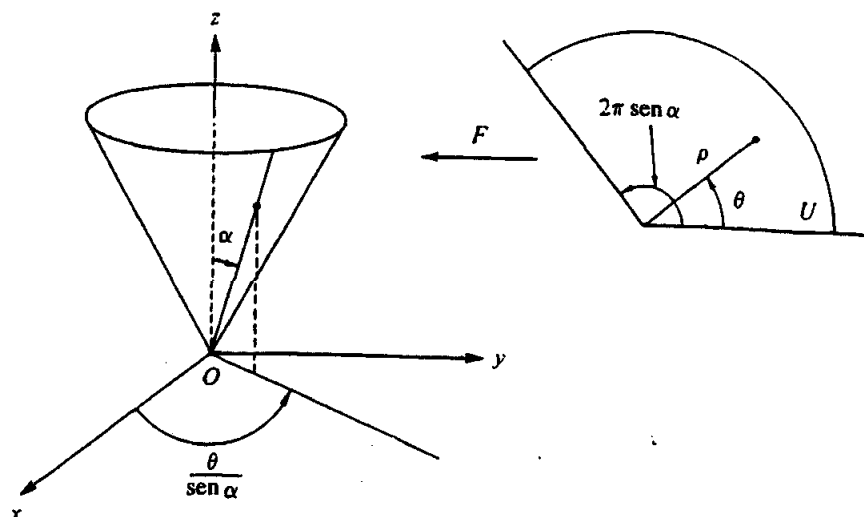



Figura 4-5

Mostraremos agora que F é uma isometria. De fato, U pode ser pensado como uma superfície regular parametrizada por

$$\bar{\mathbf{x}} = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, 0), \qquad 0 < \rho < \infty,\ 0 < \theta < 2\pi\operatorname{sen}\alpha.$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental de U nesta parametrização são

$$\bar{E} = 1, \qquad \bar{F} = 0, \qquad \bar{G} = \rho^2.$$

Por outro lado, os coeficientes da primeira forma fundamental do cone na parametrização $F \circ \bar{\mathbf{x}}$ são

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = \rho^2.$$

Concluímos pela Prop. 1 que F é uma isometria local, como desejado.

Observação 2. O fato de podermos calcular comprimentos de curvas sobre uma superfície S utilizando apenas a primeira forma fundamental nos permite introduzir a noção de distância "intrínseca" para pontos em S. A grosso modo, definimos a *distância* (intrínseca) $d(p,q)$ entre dois pontos de S como o ínfimo do comprimento de curvas em S ligando p e q. (Trataremos disto com mais detalhes na seção 5.3.) Esta distância é evidentemente maior ou igual

à distância $\|p-q\|$ de p a q *como pontos em* $\mathbb{R}^3$ (Fig. 4.6). Mostraremos no Exercício 3 que a distância d é invariante por isometrias; isto é, se $\varphi : S \to \bar{S}$ é uma isometria, então $d(p,q) = d(\varphi(p), \varphi(q))$, $p, q \in S$.

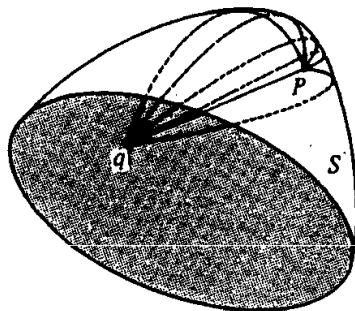



Figura 4-6

A noção de isometria é o conceito natural de equivalência para propriedades métricas das superfícies regulares. Da mesma maneira que superfícies difeomorfas são equivalentes sob o ponto de vista da diferenciabilidade, as superfícies isométricas são equivalentes sob o ponto de vista métrico.

É possível definir outros tipos de equivalências no estudo de superfícies. Do nosso ponto de vista, difeomorfismos e isometrias são os mais importantes. Entretanto, ao lidarmos com problemas associados com funções analíticas de variáveis complexas, é importante introduzir a equivalência conforme, que discutiremos sumariamente a seguir.

DEFINIÇÃO 3. *Um difeomorfismo* $\varphi : S \to \bar{S}$ *é chamado uma* aplicação conforme *se para todo* $p \in S$ *e quaisquer* $v_1, v_2 \in T_pS$ *temos*

$$\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)\rangle_{\varphi(p)} = \lambda^2(p)\langle v_1, v_2\rangle_p,$$

onde λ^2 *é uma função diferenciável em* S *que nunca se anula; as superfícies* S *e* $\bar{S}$ *são então chamadas* conformes. *Uma aplicação* $\varphi : V \to \bar{S}$ *de uma vizinhança* V *de* $p \in S$ *em* $\bar{S}$ *é uma* aplicação conforme local em p *se existe uma vizinhança* $\bar{V}$ *de* $\varphi(p)$ *tal que* $\varphi : V \to \bar{V}$ *é uma aplicação conforme. Se para cada* $p \in S$, *existe uma aplicação conforme local em* p, *a superfície* S *é* localmente conforme *a* $\bar{S}$.

O significado geométrico da definição acima é que ângulos (mas não necessariamente comprimentos) são preservados por aplicações conformes. De fato,

sejam $\alpha : I \to S$ e $\beta : I \to S$ duas curvas em S que se intersectam em, digamos, $t = 0$. O ângulo θ entre elas em $t = 0$ é dado por

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha', \beta' \rangle}{|\alpha'|\,|\beta'|}, \qquad 0 < \theta < \pi.$$

Uma aplicação conforme $\varphi : S \to \bar{S}$ aplica estas curvas em curvas $\varphi \circ \alpha : I \to \bar{S}$, $\varphi \circ \beta : I \to \bar{S}$, que se intersectam para $t = 0$, fazendo um ângulo dado por

$$\cos\bar{\theta} = \frac{\langle d\varphi(\alpha'), d\varphi(\beta') \rangle}{|d\varphi(\alpha')|\,|d\varphi(\beta')|} = \frac{\lambda^2 \langle \alpha', \beta' \rangle}{\lambda^2 |\alpha'|\,|\beta'|} = \cos\theta,$$

como afirmado. Não é difícil mostrar que esta propriedade caracteriza as aplicações localmente conformes (Exercício 14).

A proposição seguinte é um análogo da Prop. 1 para aplicações conformes, cuja demonstração também será deixada como exercício.

Proposição 2. *Sejam* $\mathbf{x} : U \to S$ *e* $\bar{\mathbf{x}} : U \to \bar{S}$ *parametrizações tais que* $E = \lambda^2 \bar{E}$, $F = \lambda^2 \bar{F}$, $G = \lambda^2 \bar{G}$ *em* U, *onde* λ^2 *é uma função diferenciável em* U *que nunca se anula. Então a aplicação* $\bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : x(U) \to \bar{S}$ *é uma aplicação conforme local.*

Vê-se facilmente que conformidade local é uma relação transitiva; isto é, se S_1 é localmente conforme a S_2 e S_2 é localmente conforme a S_3, então S_1 é localmente conforme a S_3.

A propriedade mais importante das aplicações conformes é dada pelo seguinte teorema, cuja demontração será omitida.

Teorema. *Duas superfícies regulares quaisquer são localmente conformes.*

A demonstração é baseada na possibilidade de parametrizar uma vizinhança de qualquer ponto de uma superfície regular de tal modo que os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \lambda^2(u,v) > 0, \qquad F = 0, \qquad G = \lambda^2(u,v).$$

Um tal sistema de coordenadas é chamado *isotérmico*. Admitindo a existência de um sistema isotérmico de coordenadas para uma superfície regular S, S é evidentemente localmente conforme a um plano e, por composição, localmente conforme a qualquer outra superfície.

A prova de que existem sistemas isotérmicos de coordenadas para qualquer superfície regular é delicada e não será apresentada aqui. O leitor interessado pode consultar L. Bers, *Riemann Surfaces*, New York University, Institute of Mathematical Sciences, New York, 1957-1958, pp. 15-35.

Observação 3. Parametrizações isotérmicas já apareceram no Capítulo 3 no contexto das superfícies mínimas; cf. Prop. 2 e Exercício 13 da seção 3.5.

Exercícios

1. Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{aligned} F(u,v) &= (u \operatorname{sen} \alpha \cos v, u \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} v, u \cos \alpha), \\ (u,v) &\in U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u > 0\}, \qquad \alpha = \text{ const.} \end{aligned}$$

a. Prove que F é um difeomorfismo local de U sobre um cone C com vértice na origem e com ângulo do vértice igual a 2α.

b. F é uma isometria local?

2. Prove a seguinte "recíproca" da Prop. 1: Seja $\varphi : S \to \bar{S}$ uma isometria e $\mathbf{x} : U \to S$ uma parametrização em $p \in S$; então $\bar{\mathbf{x}} = \varphi \circ \mathbf{x}$ é uma parametrização em $\varphi(p)$ e $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$.

***3.** Mostre que um difeomorfismo $\varphi : S \to \bar{S}$ é uma isometria se e somente se o comprimento de arco de qualquer curva parametrizada em S é igual ao comprimento de arco da curva imagem por φ.

4. Utilize a projeção estereográfica (cf. Exercício 16, seção 2.2) para mostrar que a esfera é localmente conforme a um plano.

5. Sejam $\alpha_1 : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha_2 : I \to \mathbb{R}^3$ curvas parametrizadas regulares, onde o parâmetro é o comprimento de arco. Suponha que as curvaturas k_1 de α_1 e k_2 de α_2 satisfaçam $k_1(s) = k_2(s) \neq 0$, $s \in I$. Sejam

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(s,v) &= \alpha_1(s) + v\alpha_1'(s), \\ \mathbf{x}_2(s,v) &= \alpha_2(s) + v\alpha_2'(s) \end{aligned}$$

as suas superfícies tangentes (regulares) (cf. Exemplo 5, seção 2.3) e seja V uma vizinhança de (s_0, v_0) tal que $\mathbf{x}_1(V) \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}_2(V) \subset \mathbb{R}^3$ sejam

superfícies regulares (cf. Prop. 2, seção 2.3). Prove que $\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2^{-1}(V) \to \mathbf{x}_1(V)$ é uma isometria.

***6.** Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular com $k(t) \neq 0$, $t \in I$. Seja $\mathbf{x}(t, v)$ a sua superfície tangente. Prove que, para cada $(t_0, v_0) \in I \times (\mathbb{R} - \{0\})$, existe uma vizinhança V de (t_0, v_0) tal que $\mathbf{x}(V)$ é isométrica a um conjunto aberto do plano (assim, *superfícies tangentes são localmente isométricas a planos*).

7. Sejam V e W espaços vetoriais (de dimensão n) com produtos internos denotados por $\langle\ ,\ \rangle$ e seja $F : V \to W$ uma aplicação linear. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

a. $\langle F(v_1), F(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$ para quaisquer v_1, $v_2 \in V$,

b. $|F(v)| = |v|$ para todo $v \in V$.

c. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal em V, então $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ é uma base ortonormal em W.

d. Existe uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ em V tal que $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ é uma base ortonormal em W.

Se qualquer uma destas condições é satisfeita, diz-se que F é uma *isometria linear* de V em W. (Quando $W = V$, costuma-se dizer que a isometria linear é uma *transformação ortogonal.)*

***8.** Seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação tal que

$$|G(p) - G(q)| = |p - q|, \qquad \text{para todo } p, q \in \mathbb{R}^3$$

(isto é, G é uma aplicação que preserva distância). Prove que existe $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e uma isometria linear (cf. Exercício 7) F do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ tal que

$$G(p) = F(p) + p_0, \qquad \text{para todo } p \in \mathbb{R}^3.$$

9. Sejam S_1, S_2 e S_3 superfícies regulares. Prove que

a. Se $\varphi : S_1 \to S_2$ é uma isometria, então $\varphi^{-1} : S_2 \to S_1$ também é uma isometria.

b. Se $\varphi : S_1 \to S_2$, $\psi : S_2 \to S_3$ são isometrias, então $\psi \circ \varphi : S_1 \to S_3$ é uma isometria.

Isto implica que as isometrias de uma superfície regular S constituem naturalmente um grupo, chamado *grupo de isometrias* de S.

10. Seja S uma superfície de revolução. Mostre que as rotações em torno do seu eixo são isometrias de S.

***11. a.** Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um difeomorfismo que preserva distâncias em $\mathbb{R}^3$ (Exercício 8) tal que $F(S) \subset S$. Prove que a restrição de F a S é uma isometria de S.

b. Use a parte **a** para mostrar que o grupo de isometrias (ver Exercício 10) da esfera unitária $x^2+y^2+z^2 = 1$ contém o grupo das transformações lineares ortogonais de $\mathbb{R}^3$ (em verdade, é igual; ver Exercício 23, seção 4.4).

c. Dê um exemplo mostrando que existem isometrias $\varphi : S_1 \to S_2$ que não podem ser estendidas em aplicações que preservam distâncias $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

***12.** Seja $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1\}$ um cilindro. Construa uma isometria $\varphi : C \to C$ tal que o conjunto de pontos fixos de φ, i.e., o conjunto $\{p \in C;\ \varphi(p) = p\}$, contenha exatamente dois pontos.

13. Sejam V e W espaços vetoriais (de dimensão n) com produtos internos $\langle\ ,\ \rangle$. Seja $G : V \to W$ uma aplicação linear. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

a. Existe uma constante real $\lambda \neq 0$ tal que

$$\langle G(v_1), G(v_2)\rangle = \lambda^2 \langle v_1, v_2\rangle \qquad \text{para todo } v_1, v_2 \in V.$$

b. Existe uma constante real $\lambda > 0$ tal que

$$|G(v)| = \lambda\,|v| \qquad \text{para todo } v \in V.$$

c. Existe uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que $\{G(v_1), \dots, G(v_n)\}$ é uma base ortogonal em W e, além disto, os vetores $G(v_i)$, $i = 1, \dots, n$, têm o mesmo comprimento (não-nulo).

Se qualquer uma destas condições é satisfeita, dizemos que G é uma *aplicação linear conforme* (ou uma *semelhança*).

14. Dizemos que uma aplicação diferenciável $\varphi : S_1 \to S_2$ *preserva ângulos* quando para todo $p \in S_1$ e quaisquer $v_1, v_2 \in T_pS_1$ temos

$$\cos(v_1, v_2) = \cos(d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)).$$

Prove que φ é localmente conforme se e somente se ela preserva ângulos.

15. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, onde u e v são funções diferenciáveis que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Mostre que φ é uma aplicação localmente conforme de $\mathbb{R}^2 - Q$ em $\mathbb{R}^2$, onde $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ u_x^2 + u_y^2 = 0\}$.

16. Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, onde

$$\begin{aligned} U &= \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < 2\pi\}, \\ \mathbf{x}(\theta, \varphi) &= (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta), \end{aligned}$$

uma parametrização da esfera unitária S^2. Seja

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta = u, \qquad \varphi = v,$$

e mostre que uma nova parametrização da vizinhança coordenada $\mathbf{x}(U) = V$ pode ser dada por

$$\mathbf{y}(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{tgh} u).$$

Prove que na parametrização $\mathbf{y}$ os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = G = \operatorname{sech}^2 u, \qquad F = 0.$$

Assim, $\mathbf{y}^{-1} : V \subset S^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação conforme que leva meridianos e paralelos de S^2 em retas do plano. Esta é a chamada *projeção de Mercator.*

***17.** Considere um triângulo da esfera unitária de forma que seus lados sejam segmentos de loxodromicas (i.e., curvas que fazem um ângulo constante com os meridianos; cf. Exemplo 4, seção 2.5), e não contém pólos. Prove que a soma dos ângulos internos deste triângulo é igual a π.

18. Dizemos que um difeomorfismo $\varphi : S \to \bar{S}$ *preserva áreas* se a área de qualquer região $R \subset S$ é igual à área de $\varphi(R)$. Prove que se φ preserva áreas e é conforme, então φ é uma isometria.

19. Seja $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ a esfera unitária e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2=1\}$ o cilindro circunscrito. Seja

$$\varphi : S^2 - \{(0,0,1) \cup (0,0,-1)\} = M \to C$$

a aplicação definida da seguinte maneira. Para cada $p \in M$, a reta passando por p e perpendicular a Oz encontra Oz no ponto q. Seja l a semi-reta começando em q e contendo p (Fig. 4.7). Por definição $\varphi(p) = C \cap l$.

Prove que φ é um difeomorfismo que preserva áreas.

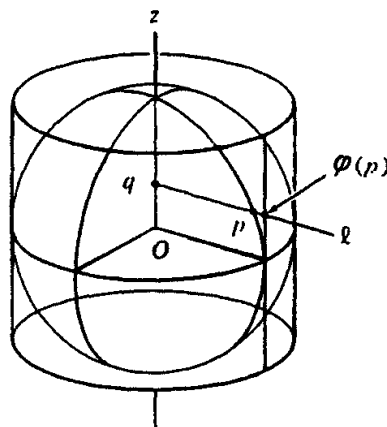



Figura 4-7

20. Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ uma parametrização de uma superfície de revolução S:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u,v) &= (f(v)\cos u, f(v)\,\mathrm{sen}\, u, g(v)), \qquad f(v) > 0, \\ U &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < u < 2\pi,\ a < v < b\}. \end{aligned}$$

a. Mostre que a aplicação $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi(u,v) = \left(u, \int \frac{\sqrt{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}}{f(v)}\, dv\right)$$

é um difeomorfismo local.

b. Utilize a parte **a** para provar que uma superfície de revolução S é localmente conforme a um plano de um tal modo que cada aplicação conforme local $\theta : V \subset S \to \mathbb{R}^2$ leva os paralelos e meridianos de uma vizinhança V em um sistema ortogonal de retas em $\theta(V) \subset \mathbb{R}^2$. (Note que isto generaliza a projeção de Mercator do Exercício 16.)

c. Mostre que a aplicação $\psi : U \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\psi(u,v) == \left(u, \int f(v)\sqrt{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}\, dv\right)$$

é um difeomorfismo local.

d. Utilize a parte **c** para provar que para cada ponto p de uma superfície de revolução S existem uma vizinhança $V \subset S$ e uma aplicação $\bar{\theta} : V \to \mathbb{R}^2$ de V sobre um plano que preserva áreas.

4.3 O Teorema de Gauss e as Equações de Compatibilidade

As propriedades do Capítulo 3 foram obtidas a partir do estudo da variação do plano tangente em uma vizinhança de um ponto. Procedendo com a analogia com as curvas, vamos associar a cada ponto de uma superfície um triedro (o análogo do triedro de Frenet) e estudar as derivadas de seus vetores.

Denotaremos por S, como de costume, uma superfície regular orientável e orientada. Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ uma parametrização na orientação de S. É possível associar a cada ponto de $\mathbf{x}(U)$ um triedro natural dado pelos vetores $\mathbf{x}_u$ $\mathbf{x}_v$ e N. O estudo deste triedro é o assunto desta seção.

Expressando as derivadas dos vetores $\mathbf{x}_u$ $\mathbf{x}_v$ e N na base $\{\mathbf{x}_u\ \mathbf{x}_v, N\}$, obte-

mos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 N, \\
\mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + L_2 N, \\
\mathbf{x}_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + \bar{L}_2 N, \\
\mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + L_3 N, \\
N_u &= a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \\
N_v &= a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

onde os a_{ij}, $i, j = 1, 2$ foram obtidos no Capítulo 3 e os outros coeficientes devem ser determinados. Os coeficientes Γ_{ij}^k, $i, j, k = 1, 2$ são chamados *símbolos de Christoffel* de S na parametrização $\mathbf{x}$. Como $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$, concluímos que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$, e $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$; isto é, os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores.

Tomando o produto interno das primeiras quatro relações em (1) com N, obtemos imediatamente $L_1 = e$, $L_2 = \bar{L}_2 = f$ e $L_3 = g$, onde e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental de S.

Para determinar os símbolos de Christoffel, tomamos o produto interno da primeiras quatro relações com $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$, e obtemos o sistema

$$
\begin{cases}
\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, \\
\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{1}{2} E_v, \\
\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{2} G_u,
\end{cases}
\tag{2}
$$

$$
\begin{cases}
\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\
\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{2} G_v,
\end{cases}
$$

Observe que as equações acima foram agrupadas em três pares de equações e que para cada par o determinante do sistema é $EG - F^2 \neq 0$. Assim, é possível resolver o sistema acima e *calcular os símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental, E, F, G, e de suas derivadas.* Não iremos obter expressões explícitas para os Γ_{ij}^k, já que é mais fácil trabalhar com o sistema (2) em cada caso particular (ver o Exemplo 1 abaixo). Contudo, a

seguinte consequência do fato de podermos resolver o sistema (2) é muito importante: *Todos os conceitos geométricos e propriedades expressas em termos dos símbolos de Christoffel são invariantes por isometrias.*

Exemplo 1. Vamos calcular os símbolos de Christoffel para uma superfície de revolução parametrizada por (cf. Exemplo 4, seção 2.3)

$$\mathbf{x}(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\,\mathrm{sen}\, u, g(v)), \qquad f(v) \neq 0.$$

Como

$$E = (f(v))^2, \qquad F = 0, \qquad G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2,$$

obtemos

$$\begin{aligned} E_u &= 0, & E_v = 2ff', \\ F_u &= F_v = 0, & G_u = 0, \\ G_v &= 2(f'f'' + g'g''), \end{aligned}$$

onde $'$ denota derivação em relação a v. Utilizando o primeiro par de equações do sistema (2) temos que

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \qquad \Gamma_{11}^2 = -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}.$$

Em seguida, o segundo par de equações do sistema (2) nos fornece

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{ff'}{f^2}, \qquad \Gamma_{12}^2 = 0.$$

Finalmente, a partir do último par de equações do sistema (2) obtemos

$$\Gamma_{22}^1 = 0, \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}.$$

Como acabamos de ver, as expressões das derivadas de $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ e N na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ dependem apenas do conhecimento dos coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais de S. Uma maneira de obter relações entre estes coeficientes é considerar as expressões

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u &= 0, \\ (\mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_{vu})_v &= 0, \\ N_{uv} - N_{vu} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Introduzindo os valores de (1), podemos escrever as relações acima na forma

$$\begin{aligned} A_1\mathbf{x}_u + B_1\mathbf{x}_v + C_1N &= 0,\\ A_2\mathbf{x}_u + B_2\mathbf{x}_v + C_2N &= 0,\\ A_3\mathbf{x}_u + B_3\mathbf{x}_v + C_3N &= 0, \end{aligned} \tag{3a}$$

onde A_i, B_i, C_i, $i = 1, 2, 3$, são funções de E, F, G, e, f, g e de suas derivadas. Como os vetores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$, N são linearmente independentes, (3a) implica que existem 9 relações:

$$A_i = 0, \qquad B_i = 0, \qquad C_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Como exemplo, determinaremos as relações $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ e $C_1 = 0$. Utilizando os valores de (1), a primeira das relações (3) pode ser escrita

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^1\mathbf{x}_{uv} + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_{vv} + eN_v + (\Gamma_{11}^1)_v\mathbf{x}_u + (\Gamma_{11}^2)_v\mathbf{x}_v + e_vN\\ &= \Gamma_{12}^1\mathbf{x}_{uu} + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_{vu} + fN_u + (\Gamma_{12}^1)_u\mathbf{x}_u + (\Gamma_{12}^2)_u\mathbf{x}_v + f_uN. \end{aligned} \tag{4}$$

Utilizando (1) novamente e igualando os coeficientes de $\mathbf{x}_v$ obtemos

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + ea_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + fa_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u.$$

Introduzindo os valores de a_{ij} já calculados (cf. seção 3.3) segue-se que

$$\begin{aligned} &(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2\\ &= -E\frac{eg - f^2}{EG - F^2}\\ &= -EK. \end{aligned} \tag{5}$$

Convém neste momento interromper nossos cálculos para chamar a atenção para o fato de que a equação acima prova o seguinte teorema, devido a K. F. Gauss.

Teorema Egregium (Gauss). *A curvatura Gaussiana K de uma superfície é invariante por isometrias locais.*

De fato, se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ é uma parametrização de S em p e se $\varphi : V \subset S \to \bar{S}$, onde $V \subset \mathbf{x}(U)$ é uma vizinhança de p, é uma isometria local em p, então $\mathbf{y} = \varphi \circ \mathbf{x}$ é uma parametrização de $\bar{S}$ em $\varphi(p)$. Como φ é uma

isometria, os coeficientes da primeira forma fundamental nas parametrizações x e y coincidem em pontos correspondentes q e $\varphi(q)$, $q \in V$; assim, os respectivos símbolos de Christoffel também coincidem. Pela equação (5), K pode ser calculada em um ponto como função dos símbolos de Christoffel em uma parametrização dada no ponto. Segue-se que $K(q) = K(\varphi(q))$ para todo $q \in V$.

A expressão acima, que nos fornece o valor de K em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental e de suas derivadas, é conhecida como *fórmula de Gauss*. Ela foi originalmente demonstrada por Gauss em um famoso artigo [1].

O teorema de Gauss é considerado, pela extensão de suas consequências, um dos fatos mais importantes da geometria diferencial. Por enquanto, mencionaremos apenas o seguinte corolário.

Como foi demonstrado na seção 4.2, o catenóide é localmente isométrico ao helicóide. Segue-se do teorema de Gauss que as curvaturas Gaussianas são iguais em pontos correspondentes, um fato que é não-trivial geometricamente.

Em verdade, é um fato extraordinario que um conceito como a curvatura Gaussiana, cuja definição usa de maneira essencial a posição da superfície no espaço, não dependa desta posição mas apenas da estrutra métrica (primeira forma fundamental) da superfície.

Veremos na próxima seção que muitos outros conceitos da geometria diferencial possuem esta característica observada na curvatura Gaussiana; isto é, eles dependem apenas da primeira forma fundamental da superfície. Faz sentido então falar sobre a geometria da primeira forma fundamental, a qual chamamos geometria intrínseca, já que ela pode ser desenvolvida sem qualquer referência ao espaço que contém a superfície (uma vez dada a primeira forma fundamental).

*Tendo em vista futuras aplicações geométricas voltamos aos nossos cálculos. Igualando os coeficientes de $\mathbf{x}_u$ em (4), vemos que a relação $A_1 = 0$ pode ser escrita na forma

$$(\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 = FK. \qquad (5a)$$

Igualando também na Eq. (4) os coeficientes de N, obtemos $C_1 = 0$ na forma

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2. \qquad (6)$$

---

* O restante desta seção não será utilizado até o capítulo 5. Caso seja omitido, os Exercícios 7 e 8 também devem ser omitidos.

Observe que a relação (5a) é (quando $F \neq 0$) meramente uma outra forma da fórmula de Gauss (5).

Aplicando o mesmo processo à segunda expressão de (3), obtemos que ambas as equações $A_2 = 0$ e $B_2 = 0$ nos dão novamente a fórmula de Gauss (5). Além disto, $C_2 = 0$ é dada por

$$f_v - g_u = e\Gamma^1_{22} + f(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - g\Gamma^2_{12}. \tag{6a}$$

Finalmente, o mesmo processo pode ser aplicado à última expressão de (3), resultando que $C_3 = 0$ é uma identidade e que $A_3 = 0$ e $B_3 = 0$ são novamente Eqs. (6) e (6a). As equações (6) e (6a) são chamadas *equações de Mainardi-Codazzi.*

A fórmula de Gauss e as equações de Mainardi-Codazzi são conhecidas como as *equações de compatibilidade* da teoria das superfícies.

Uma questão natural é se existem outras relações de compatibilidade entre a primeira e a segunda formas fundamentais além das já obtidas. O teorema enunciado abaixo mostra que a resposta é negativa. Em outras palavras, por derivações sucessivas ou qualquer outro processo não se obtém novas relações entre os coeficiente E, F, G, e, f, g e suas derivadas. em verdade, o teorema é mais explícito e afirma que o conhecimento da primeira e segunda formas fundamentais determina a superfície localmente. Mais precisamente,

Teorema (Bonnet). *Sejam E, F, G, e, f, g funções diferenciáveis definidas em um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, com $E > 0$, $G > 0$. Suponha que as funções dadas satisfaçam formalmente as equações de Gauss e Mainardi-Codazi e que $EG - F^2 > 0$. Então, para todo $q \in V$ existe uma vizinhança $U \subset V$ de q e um difeomorfismo $\mathbf{x} : U \to \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ tal que a superfície regular $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ tem E, F, G e e, f, g como coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente. Além disto, se U é conexo e se*

$$\bar{\mathbf{x}} : U \to \bar{\mathbf{x}}(U) \subset \mathbb{R}^3$$

é um outro difeomorfismo satisfazendo as mesmas condições, então existe uma translação T e uma transformação ortogonal própria ρ em $\mathbb{R}^3$ tal que $\bar{\mathbf{x}} = T \circ \rho \circ \mathbf{x}$.

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada no apêndice ao capítulo 4.

Para uso posterior, convém observar como as equações de Mainardi-Codazzi se simplificam quando a vizinhança coordenada não contém pontos umbílicos e as curvas coordenadas são linhas de curvatura ($F = 0 = f$). Nesta situação, as Eqs. (6) e (6a) podem ser escritas

$$e_v = e\Gamma_{12}^1 - g\Gamma_{11}^2, \qquad g_u = g\Gamma_{12}^2 - e\Gamma_{22}^1.$$

Levando em conta que $F = 0$ implica que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2}\frac{E_v}{G}, \qquad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2}\frac{G_u}{E}, \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}, \end{aligned}$$

concluímos que as equações de Mainardi-Codazzi assumem a seguinte forma:

$$e_v = \frac{E_v}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right), \tag{7}$$

$$g_u = \frac{G_u}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right). \tag{7a}$$

Exercícios

1. Mostre que se $\mathbf{x}$ é uma parametrização ortogonal, isto é, $F = 0$, então

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\}.$$

2. Mostre que se $\mathbf{x}$ é uma parametrização isotérmica, isto é, $E = G = \lambda(u, v)$ e $F = 0$, então

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta(\log\lambda),$$

onde $\Delta\varphi$ denota o Laplaciano $(\partial^2\varphi/\partial u^2) + (\partial^2\varphi/\partial v^2)$ da função φ. Conclua que quando $E = G = (u^2 + v^2 + c)^{-2}$ e $F = 0$, então $K =$ const. $= 4c$.

3. Verifique que as superfícies

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u,v) &= (u\cos v, u \operatorname{sen} v, \log u), \qquad u > 0, \\ \mathbf{x}(u,v) &= (u\cos v, u \operatorname{sen} v, u), \end{aligned}$$

têm a mesma curvatura Gaussiana nos pontos $\mathbf{x}(u,v)$ e $\bar{\mathbf{x}}(u,v)$ mas que a aplicação $\bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1}$ não é uma isometria. Isto mostra que a "recíproca" do teorema de Gauss não é verdadeira.

4. Mostre que nenhuma vizinhança de um ponto em uma esfera pode ser aplicada isometricamente em um plano.

5. Se as curvas coordenadas formam um rede de Tchebyshef (cf. Exercícios 7 e 8, seção 2.5), então $E = G = 1$ e $F = \cos\theta$. Mostre que neste caso

$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\operatorname{sen}\theta}.$$

6. Mostre que não existe superfície $\mathbf{x}(u,v)$ tal que $E = G = 1$ e $F = 0$ e $e = 1$, $g = -1$, $f = 0$.

7. Existe uma superfície $\mathbf{x}(u,v)$ com $E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 u$ e $e = \cos^2 u$, $f = 0$, $g = 1$?

8. Calcule os símbolos de Christoffel de um conjunto aberto do plano

a. em coordenadas Cartesianas.

b. em coordenadas polares.

Use a fórmula de Gauss para calcular K em ambos os casos.

9. Justifique porque as superfícies abaixo não são localmente isométricas duas a duas:

a. Esfera.

b. Cilindro.

c. Sela $z = x^2 - y^2$.

4.4 Transporte Paralelo. Geodésicas.

Vamos agora fazer uma exposição sistemática da geometria intrínseca. Para ilustrar o significado intuitivo dos conceitos, daremos frequentemente definições e interpretações envolvendo o espaço exterior à superfície. No entanto, mostraremos em cada caso que os conceitos introduzidos dependem apenas da primeira forma fundamental.

Começaremos com a definição de derivada covariante de um campo de vetores, que é o análogo para superfícies da derivação usual de vetores no plano. Lembramos que um *campo de vetores (tangentes)* em um conjunto aberto $U \subset S$ de uma superfície regular S é uma correspondência w que associa a cada $p \in U$ um vetor $w(p) \in T_pS$. O campo de vetores é *diferenciável* em p se, para alguma parametrização $\mathbf{x}(u,v)$ em p, as componentes a e b de $w = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ são funções diferenciáveis em p. O campo de vetores w é *diferenciável* em U se é diferenciável para todo $p \in U$.

DEFINIÇÃO 1. *Seja w um campo diferenciável de vetores em um conjunto aberto $U \subset S$ e $p \in U$. Seja $y \in T_pS$. Considere uma curva parametrizada*

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U,$$

com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = y$, e seja $w(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a restrição do campo de vetores w à curva α. O vetor obtido pela projeção de $(dw/dt)(0)$ sobre o plano T_pS é chamado a derivada covariante *em p do campo de vetores w em relação ao vetor y. Esta derivada covariante é denotada por $(Dw/dt)(0)$ ou $(D_y w)(p)$ (Fig. 4.8).*

A definição acima faz uso do vetor normal de S e de uma curva particular α, tangente a y em p. Para mostrar que a derivada covariante é um conceito da geometria intrínseca e que não depende da escolha da curva α, vamos obter a sua expressão em termos de uma parametrização $\mathbf{x}(u,v)$ de S em p.

Seja $\mathbf{x}(u(t), v(t)) = \alpha(t)$ a expressão da curva α e seja

$$\begin{aligned} w(t) &= a(u(t), v(t))\mathbf{x}_u + b(u(t), v(t))\mathbf{x}_v \\ &= a(t)\mathbf{x}_u + b(t)\mathbf{x}_v, \end{aligned}$$

a expressão de $w(t)$ na parametrização $\mathbf{x}(u,v)$. Então

$$\frac{dw}{dt} = a(\mathbf{x}_{uu}u' + \mathbf{x}_{uv}v') + b(\mathbf{x}_{vu}u' + \mathbf{x}_{vv}v') + a'\mathbf{x}_u + b'\mathbf{x}_v,$$

onde $'$ denota derivação em relação a t.

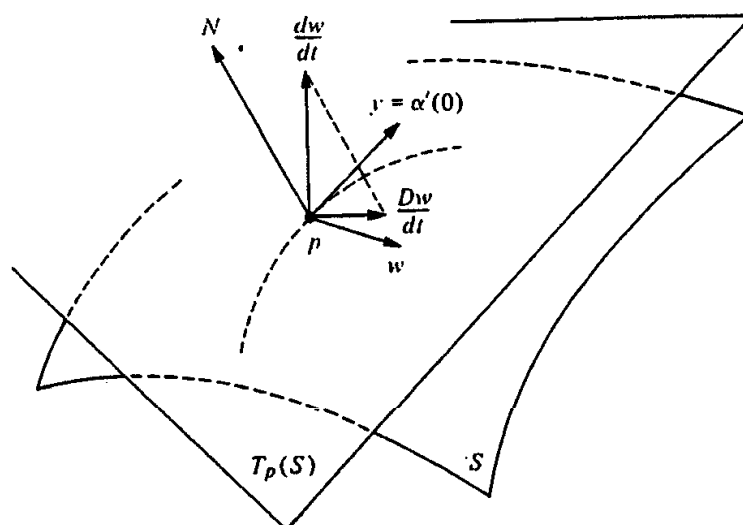



Figura 4-8. *A derivada covariante.*

Como Dw/dt é a componente de dw/dt no plano tangente, utilizando as expressões em (1) da seção 4.3 para $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$ $\mathbf{x}_{vv}$ e, desprezando a componente normal, obtemos

$$\frac{Dw}{dt} = (a' + \Gamma^1_{11}au' + \Gamma^1_{12}av' + \Gamma^1_{12}bu' + \Gamma^1_{22}bv')\mathbf{x}_u \qquad (1)$$
$$(b' + \Gamma^2_{11}au' + \Gamma^2_{12}av' + \Gamma^2_{12}bu' + \Gamma^2_{22}bv')\mathbf{x}_v.$$

A expressão (1) mostra que Dw/dt depende apenas do vetor $(u', v') = y$ e não da curva α. Além disto, a superfície aparece na Eq. (1) através dos símbolos de Christoffel, isto é, através da primeira forma fundamental. Nossas afirmações estão, portanto, demonstradas.

Se, em particular, S é um plano, sabemos que é possível encontrar uma parametrização tal que $E = G = 1$ e $F = 0$. Um rápido olhar sobre as equações que nos dão os símbolos de Christoffel (Eq. (2) da seção 4.3) mostra que neste caso todos os Γ^k_{ij} são nulos. Assim sendo, segue-se da Eq. (1) que a derivada covariante coincide com a derivada usual de vetores no plano (isto também pode ser visto geometricamente a partir da Def. 1). A derivada covariante é, portanto, uma generalização da derivada usual de vetores no plano.

Uma outra consequência da Eq. (1) é que a definição da derivada covariante pode ser estendida a um campo de vetores que esteja definido apenas em pontos de uma curva parametrizada. Para tornar clara esta afirmação, precisamos de algumas definições.

DEFINIÇÃO 2. *Uma* curva parametrizada $\alpha : [0, l] \to S$ *é a restrição a* $[0, l]$ *de uma aplicação diferenciável de* $(0 - \varepsilon, l + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, *em* S. *Se* $\alpha(0) = p$ *e* $\alpha(l) = q$, *dizemos que* α *liga* p *a* q. α *é* regular *se* $\alpha'(t) \neq 0$ *para* $t \in [0, l]$.

No que se segue utilizamos a notação $[0, l] = I$ sempre que a especificação do ponto final l for desnecessária.

DEFINIÇÃO 3. *Seja* $\alpha : I \to S$ *uma curva parametrizada em* S. *Um* campo de vetores w ao longo de α *é uma correspondência que associa a cada* $t \in I$ *um vetor*

$$w(t) \in T_{\alpha(t)}S.$$

O campo de vetores w *é* diferenciável *em* $t_0 \in I$ *se para alguma parametrização* $\mathbf{x}(u, v)$ *em* $\alpha(t_0)$ *as componentes* $a(t)$, $b(t)$ *de* $w(t) = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ *são funções diferenciáveis de* t *em* t_0. *O campo* w *é* diferenciável *em* I *se é diferenciável para todo* $t \in I$.

Um exemplo de um campo de vetores (diferenciável) ao longo de α é dado pelo campo $\alpha'(t)$ de vetores tangentes de α (Fig. 4.9).

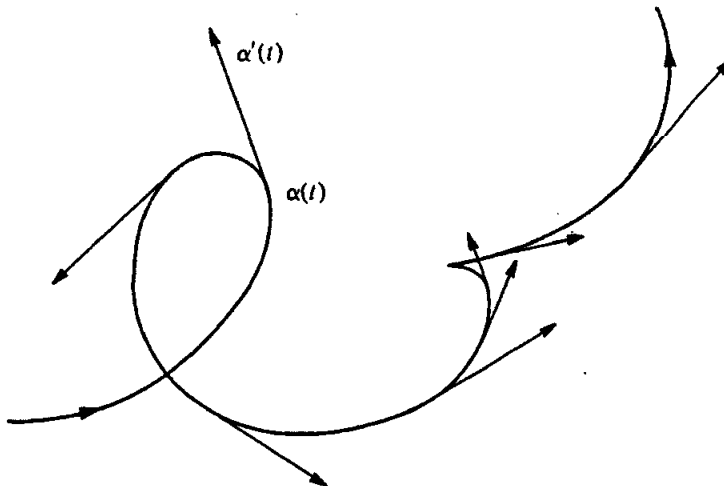



Figura 4-9. *O campo de vetores tangentes ao longo de uma curva.*

DEFINIÇÃO 4. *Seja* w *um campo diferenciável de vetores ao longo de* $\alpha : I \to S$. *A expressão (1) de* $(Dw/dt)(t)$, $t \in I$, *está bem definida e é chamada* derivada covariante *de* w *em* t.

De um ponto de vista externo à superfície, para obtermos a derivada covariante de um campo w ao longo de $\alpha : I \to S$ em $t \in I$ consideramos a derivada usual $(dw/dt)(t)$ de w em t e projetamos este vetor ortogonalmente sobre o plano tangente $T_{\alpha(t)}S$. Segue-se que, quando duas superfícies são tangentes ao longo de uma curva parametrizada α, a derivada covariante do campo w ao longo de α é a mesma para ambas as superfícies.

Se $\alpha(t)$ é uma curva em S, podemos imaginá-la como a trajetória de um ponto que se move sobre a superfície. O vetor $\alpha'(t)$ é então a velocidade e $\alpha''(t)$ a aceleração de α. A derivada covariante $D\alpha'/dt$ do campo $\alpha'(t)$ é a componente tangencial da aceleração $\alpha''(t)$. Intuitivamente, $D\alpha'/dt$ é a aceleração do ponto $\alpha(t)$ "como vista da superfície S".

DEFINIÇÃO 5. *Um campo de vetores w ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \to S$ é chamado* paralelo *se $Dw/dt = 0$ para todo $t \in I$.*

No caso particular do plano, a noção de campo paralelo ao longo de uma curva parametrizada reduz-se à noção de campo constante ao longo da curva; isto é, o comprimento do vetor e o ângulo que ele faz com uma direção fixa são constantes (Fig. 4.10). A proposição seguinte mostra que estas propriedades são parcialmente reobtidas em qualquer superfície.

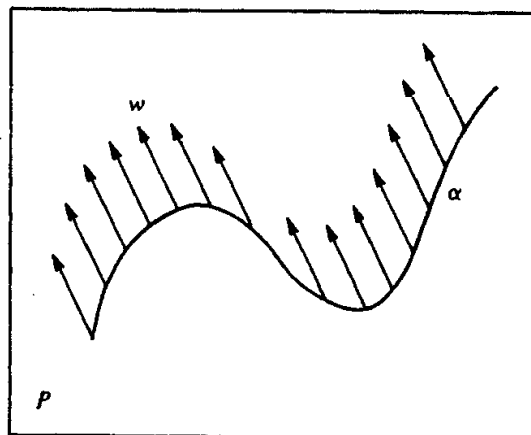



Figura 4-10

Proposição 1. *Sejam v e w campos de vetores paralelos ao longo de $\alpha : I \to S$. Então $\langle v(t), w(t)\rangle$ é constante. Em particular, $|w(t)|$ e $|v(t)|$ são contantes, e o ângulo entre $v(t)$ e $w(t)$ é constante.*

Demonstração. Dizer que o campo w é paralelo ao longo de α significa que dw/dt é normal ao plano que é tangente à superfície em $\alpha(t)$; isto é,

$$\langle v(t), w'(t)\rangle = 0, \qquad t \in I.$$

Por outro lado, $v'(t)$ também é normal ao plano tangente em $\alpha(t)$. Assim,

$$\langle v(t), w(t)\rangle' = \langle v'(t), w(t)\rangle + \langle v(t), w'(t)\rangle = 0;$$

isto é, $\langle v(t), w(t)\rangle$ é constante.

Q.E.D.

É claro que sobre uma superfície arbitrária campos paralelos podem parecer estranhos à nossa intuição euclidiana. Por exemplo, o campo de vetores tangente a um meridiano (parametrizado pelo comprimento de arco) de uma esfera unitária S^2 é um campo paralelo em S^2 (Fig. 4.11). De fato, como o meridiano é um grande círculo em S^2, a derivada usual de um tal campo é normal a S^2. Assim, a sua derivada covariante é nula.

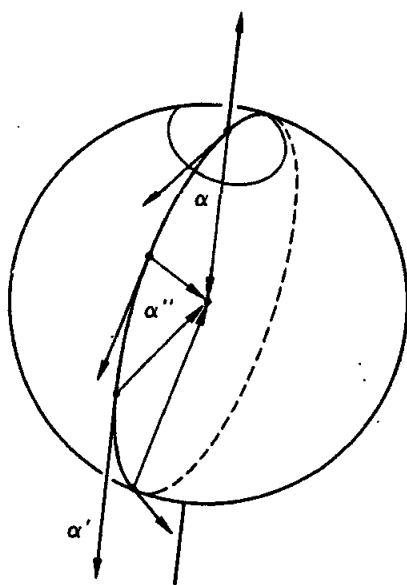



Figura 4-11. ***Um campo paralelo sobre a esfera.***

A proposição seguinte mostra que existem campos paralelos ao longo de uma curva parametrizada $\alpha(t)$ e que eles são completamente determinados por seus valores em um ponto t_0.

Proposição 2. *Seja $\alpha : I \to S$ uma curva parametrizada em S e seja $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, $t_0 \in I$. Então existe um único campo de vetores paralelo $w(t)$ ao longo de $\alpha(t)$, com $w(t_0) = w_0$.*

Uma demonstração elementar da Prop. 2 será apresentada mais adiante nesta seção. Entretanto, os leitores que conheçam o conteúdo da seção 3.4 poderão notar que a demonstração é uma consequência imediata do teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais.

A Proposição 2 nos permite falar de transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva parametrizada.

DEFINIÇÃO 6. *Seja $\alpha : I \to S$ uma curva parametrizada e $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, $t_0 \in I$. Seja w um campo paralelo ao longo de α, com $w(t_0) = w_0$. O vetor $w(t_1)$, $t_1 \in I$ é chamado* transporte paralelo *de w_0 ao longo de α no ponto t_1.*

Deve-se observar que se $\alpha : I \to S$, $t \in I$, é regular, então o transporte paralelo não depende da parametrização de $\alpha(I)$. Com efeito, se $\beta : J \to S$, $\sigma \in J$ é uma outra parametrização regular de $\alpha(I)$, segue-se da Eq. (1) que

$$\frac{Dw}{d\sigma} = \frac{Dw}{dt}\frac{dt}{d\sigma}, \qquad t \in I,\ \sigma \in J.$$

Como $dt/d\sigma \neq 0$, $w(t)$ é paralelo se e somente se $w(\sigma)$ é paralelo.

A Proposição 1 contém uma propriedade interessante do transporte paralelo. Fixe dois pontos $p, q \in S$ e uma curva parametrizada $\alpha : I \to S$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(l) = q$. Denote por $P_\alpha : T_pS \to T_qS$ a aplicação que associa a cada $v \in T_pS$ o seu transporte paralelo ao longo de α em q. A Proposição 1 afirma que esta aplicação é uma isometria linear.

Outra propriedade interessante do transporte paralelo é que se duas superfícies S e $\bar{S}$ são tangentes ao longo de uma curva parametrizada α e w_0 é um vetor de $T_{\alpha(t_0)}S = T_{\alpha(t_0)}\bar{S}$, então $w(t)$ é o transporte paralelo de w_0 relativo à superfície S se e somente se $w(t)$ é o transporte paralelo de w_0 relativo à superfície $\bar{S}$. De fato, a derivada covariante Dw/dt de w é a mesma para ambas as superfícies. A afirmativa segue-se então da unicidade do transporte paralelo.

A propriedade acima nos permite dar um exemplo simples e instrutivo de transporte paralelo.

Exemplo 1. Seja C um paralelo de colatitude φ (ver Fig. 4.12) de uma esfera unitária orientada e seja w_0 um vetor unitário, tangente a C em algum

ponto p de C. Vamos determinar o transporte paralelo de w_0 ao longo de C, parametrizado pelo comprimento de arco s, com $s = 0$ em p.

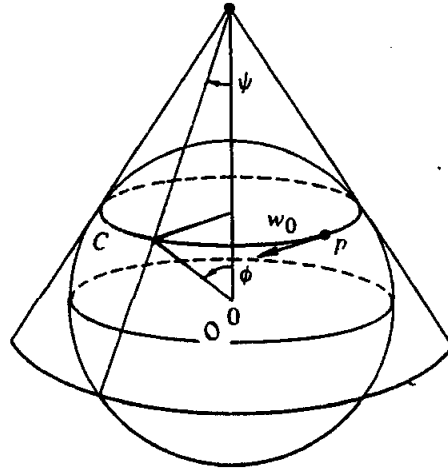



Figura 4-12

Considere o cone que é tangente à esfera ao longo de C. O ângulo ψ no vértice deste cone é dado por $\psi = (\pi/2) - \varphi$. Pela propriedade acima, o problema fica reduzido à determinação do transporte paralelo de w_0, ao longo de C, relativo ao cone tangente.

O cone menos uma geratriz é, contudo, isométrico a um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ (cf. Exemplo 3, seção 4.2), dado em coordenadas polares por

$$0 < \rho < +\infty, \qquad 0 < \theta < 2\pi \operatorname{sen} \psi.$$

Como no plano o transporte paralelo coincide com a noção usual, obtemos, para um deslocamento s de p, correspondendo ao ângulo central θ (ver Fig. 4.13), que o ângulo orientado formado pelo vetor tangente $t(s)$ com o transporte paralelo $w(s)$ é dado por $2\pi - \theta$.

Convém introduzir a noção de "curva quebrada," que pode ser expressa da seguinte maneira.

DEFINIÇÃO 7. *Uma aplicação* $\alpha : [0, l] \to S$ *é uma* curva parametrizada regular por partes *se* α *é contínua e se existe uma partição*

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = l$$

do intervalo $[0, l]$ *tal que a restrição* $\alpha | [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, ..., k$ *é uma curva parametrizada regular. Cada* $\alpha | [t_i, t_{i+1}]$ *é chamada um* arco regular *de* α.

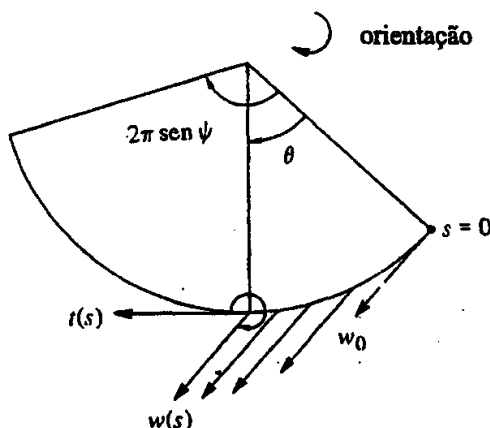



Figura 4-13

A noção de transporte paralelo pode ser facilmente estendida a curvas parametrizadas regulares por partes. Se, digamos, o valor inicial w_0 é tangente em $\alpha(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, realizamos o transporte paralelo ao longo do arco regular $\alpha|[t_i, t_{i+1}]$ da maneira usual; se $t_{i+1} \neq l$, tomamos $w(t_{i+1})$ como o valor inicial para o transporte paralelo ao longo do arco seguinte $\alpha|[t_{i+1}, t_{i+2}]$, e assim por diante.

Exemplo 2.* O exemplo anterior é um caso particular de uma interessante construção geométrica do transporte paralelo. Seja C uma curva regular sobre uma superfície S e suponha que C nunca é tangente a uma direção assintótica. Considere a envoltória da família de planos tangentes de S ao longo de C (cf. Exemplo 4, seção 3.5). Em uma vizinhança de C, esta envoltória é uma superfície regular Σ que é tangente a S ao longo de C. (No Exemplo 1, Σ pode ser tomada como uma faixa em torno de C sobre o cone que é tangente à esfera ao longo de C.) Assim, o transporte paralelo ao longo de C de qualquer vetor $w \in T_pS$, $p \in S$, coincide com o transporte paralelo ao longo de C relativo a S ou a Σ. Além disto, Σ é uma superfície desenvolvível; logo, a sua curvatura Gaussiana é identicamente nula.

Provaremos mais adiante (seção 4.6, teorema de Minding) que uma superfície de curvatura Gaussiana nula é localmente isométrica a um plano. Assim, podemos aplicar uma vizinhança $V \subset \Sigma$ de p sobre um plano P por meio de uma isometria $\varphi : V \to P$. Para obter o transporte paralelo de w ao longo de $V \cap C$, tomamos o transporte paralelo usual no plano do vetor $d\varphi_p(w)$ ao

* **Este exemplo utiliza o material sobre superfícies regradas da seção 3.5.**

longo de $\varphi(C)$ e olhamos para a sua imagem inversa pela aplicação $d\varphi$ (Fig. 4.14).

Isto nos fornece uma construção geométrica do transporte paralelo ao longo de pequenos arcos de C. Deixamos como exercício mostrar que esta construção pode ser estendida passo a passo para um dado arco de C. (Use o teorema de Heine-Borel e proceda como no caso das curvas quebradas.)

As curvas parametrizadas $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ do plano ao longo das quais o campo de vetores tangentes $\gamma'(t)$ é paralelo são precisamente as retas deste plano. As curvas parametrizadas que satisfazem uma condição análoga em uma superfície são chamadas geodésicas.

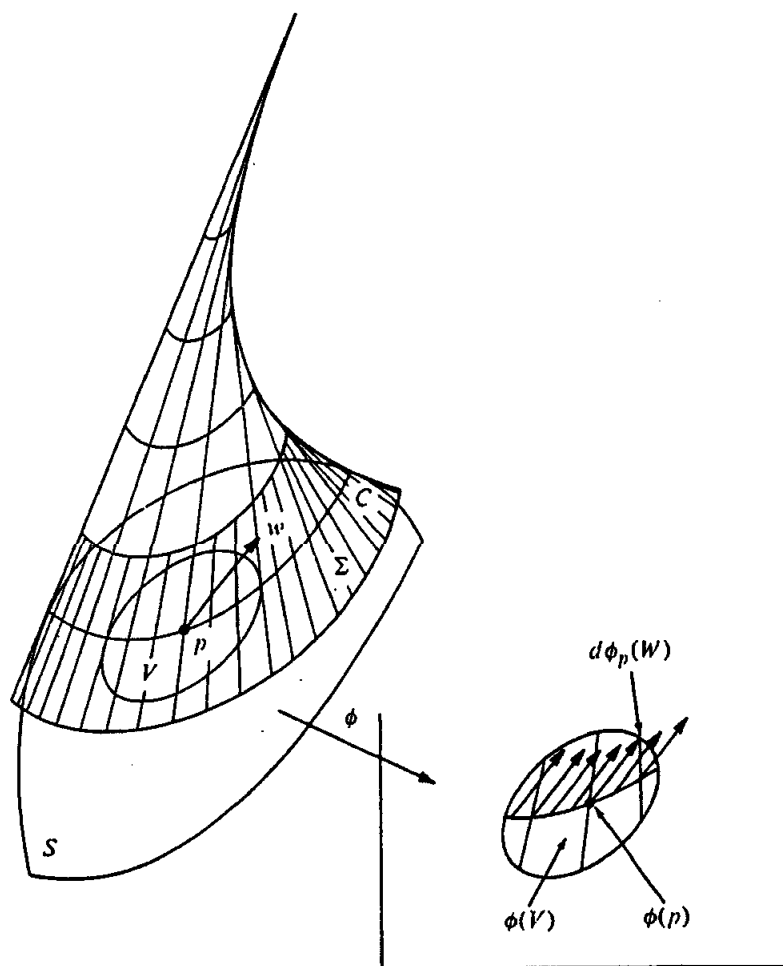



Figura 4-14. *Transporte paralelo ao longo de C.*

DEFINIÇÃO 8. *Uma curva parametrizada, não constante, $\gamma : I \to S$ é chamada* geodésica *em $t \in I$ se o seu campo de vetores tangentes $\gamma'(t)$ é*

paralelo ao longo de γ em t; isto é

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0;$$

γ é uma geodésica parametrizada *se é geodésica para todo $t \in I$.*

Pela Proposição 1, obtemos imediatamente que $|\gamma'(t)|$ =const.= $c \neq 0$. Portanto, podemos introduzir o comprimento de arco $s = ct$ como um parâmetro, e concluir que o parâmetro t de uma geodésica parametrizada γ é proporcional ao comprimento de arco de γ.

Observe que uma geodésica parametrizada pode admitir auto-interseções. (O Exemplo 6 ilustra isto; ver Fig. 4.20.) Contudo, o seu vetor tangente nunca se anula e, portanto, a parametrização é regular.

A noção de geodésica é evidentemente local. As considerações anteriores nos permitem estender a definição de geodésica a subconjuntos de S que são curvas regulares.

DEFINIÇÂO 8a. *Uma curva regular conexa C em S é chamada* geodésica *se, para cada $p \in C$, a parametização $\alpha(s)$ de uma vizinhança coordenada de p pelo comprimento de arco s é uma geodésica parametrizada; isto é, $\alpha'(s)$ é um campo de vetores paralelo ao longo de $\alpha(s)$.*

Observe que toda linha reta contida em uma superfície satisfaz a Def. 8a.

De um ponto de vista exterior à superfície, a Def. 8a é equivalente a dizer $\alpha'' = kn$ é normal ao plano tangente, isto é, paralela à normal da superfície. Em outras palavras, uma curva regular $C \subset S$ $(k \neq 0)$ é uma geodésica se e só se sua normal principal em cada $p \in C$ é paralela à normal de S em p.

A propriedade acima pode ser utilizada para identificar geometricamente algumas geodésicas, como mostramos nos exemplos abaixo.

Exemplo 3. Os grandes círculos de uma esfera S^2 são geodésicas. De fato, os grandes círculos C são obtidos intersectando a esfera com um plano que passa pelo centro O da esfera. A normal principal em um ponto $p \in C$ está na direção da reta que conecta p a O pois C é um círculo de centro O. Como S^2 é uma esfera, a normal está nesta mesma direção, o que verifica a nossa afirmação.

Mais adiante nesta seção provaremos o fato geral de que para cada ponto $p \in S$ e cada direção em T_pS existe exatamente uma geodésica $C \subset S$ passando

por p e tangente a esta direção. Para o caso da esfera, por cada ponto e tangente a cada direção passa um único grande círculo, que, como foi provado anteriormente, é uma geodésica. Portanto, pela unicidade, os grandes círculos são as únicas geodésicas de uma esfera.

Exemplo 4. Para um cilindro circular reto sobre um círculo $x^2 + y^2 = 1$, é claro que os círculos obtidos pela interseção do cilindro com planos normais ao eixo do cilindro são geodésicas. Com efeito, a normal principal a qualquer de seus pontos é paralela à normal à superfície neste ponto.

Por outro lado, pela observação que segue a definição 8a as retas do cilindro (geratrizes) também são geodésicas.

Para verificar a existência de outras geodésicas C sobre o cilindro consideramos a parametrização (cf. Exemplo 2, seção 2.5)

$$\mathbf{x}(u,v) = (\cos u,\ \operatorname{sen} u, v)$$

do cilindro em um ponto $p \in C$, com $\mathbf{x}(0,0) = p$. Nesta parametrização, uma vizinhança de p em C é expressa por $\mathbf{x}(u(s), v(s))$, onde s é o comprimento de arco de C. Como vimos anteriormente (cf. Exemplo1, seção 4.2), $\mathbf{x}$ é uma isometria local que aplica uma vizinhança U de $(0,0)$ do plano uv sobre o cilindro. Como a condição de ser geodésica é local e invariante por isometrias, a curva $(u(s), v(s))$ deve ser uma geodésica em U passando por $(0,0)$. Mas as geodésicas do planos são as retas. Portanto, excluíndo os casos já considerados,

$$u(s) = as, \qquad v(s) = bs, \qquad a^2 + b^2 = 1.$$

Segue-se que se uma curva regular C (que não é nem uma reta nem um círculo) é uma geodésica do cilindro então ela tem localmente a seguinte forma (Fig. 4.15)

$$(\cos as,\ \operatorname{sen} as, bs),$$

e, portanto, é uma hélice. Deste modo, todas as geodésicas de um cilindro circular reto ficam determinadas.

$$(\cos as, \operatorname{sen} as, bs),$$

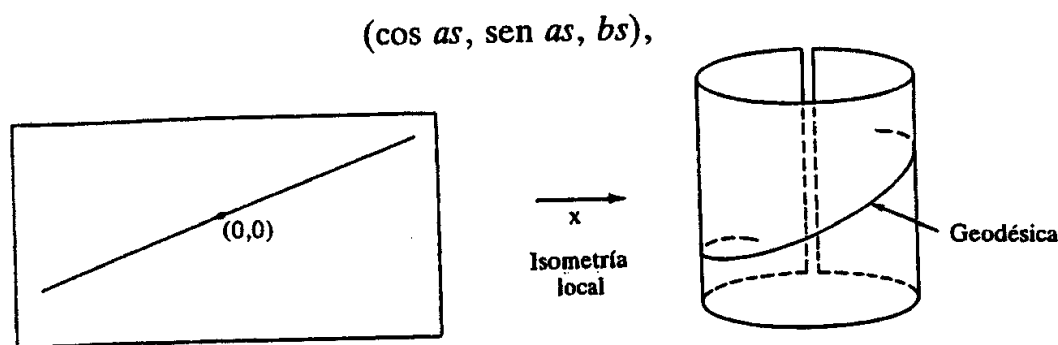



Figura 4-15. *Geodésicas em um cilindro.*

Observe que dados dois pontos sobre um cilindro que não estão sobre um círculo paralelo ao plano xy, é possível conectá-los por uma infinidade de hélices. Tal fato significa que dois pontos de um cilindro podem em geral ser conectados por uma infinidade de geodésicas, em contraste com a situação no plano. Note que tal situação pode acontecer somente com as geodésicas que dão uma "volta completa," já que o cilindro menos uma geratriz é isométrico a um aberto do plano (Fig. 4.16).

Procedendo por analogia com o plano, observamos que as retas, isto é, as geodésicas de um plano, também são caracterizadas como curvas regulares de curvatura zero. Note que, a curvatura de uma curva plana orientada é dada pelo valor absoluto da derivada do campo de vetores unitário tangente à curva, associado a um sinal que denota a concavidade da curva em relaçao à orientação do plano (cf. seção1.5, Observação 1). Para levar em consideração o sinal, convém introduzir a seguinte definição.

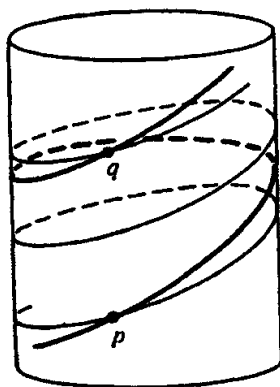



Figura 4-16. *Duas geodésicas sobre o cilindro que ligam p a q.*

DEFINIÇÃO 9. *Seja w um campo diferenciável e unitário de vetores ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \to S$ sobre uma superfície orientada S. Como $w(t)$, $t \in I$, é um campo de vetores unitário, $(dw/dt)(t)$ é normal a $w(t)$, e portanto*

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \wedge w(t)).$$

O número real $\lambda = \lambda(t)$, denotado por $[Dw/dt]$, é chamado valor algébrico da derivada covariante *de w em t.*

Observe que o sinal de $[Dw/dt]$ depende da orientação de S e que

$$[Dw/dt] = \langle dw/dt, N \wedge w \rangle.$$

Devemos também fazer a observação geral de que, a partir de agora, a orientação de S terá um papel essencial nos conceitos que serão introduzidos. O leitor atento deve ter notado que as definições de transporte paralelo e geodésica não dependem da orientação de S. Em contraste, a curvatura geodésica, definida a seguir, muda de sinal com uma mudança de orientação de S.

Definiremos agora, para uma curva sobre uma superfície, um conceito que é um análogo da curvatura de curvas planas.

DEFINIÇÃO 10. *Seja C uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada S, e seja $\alpha(s)$ uma parametrização de C, em uma vizinhança de $p \in S$, pelo comprimento de arco s. O valor algébrico $[D\alpha'(s)/ds] = k_g$ da derivada covariante de $\alpha'(s)$ é chamado* curvatura geodésica *de C em p.*

As geodésicas que são curvas regulares são assim caracterizadas como curvas cuja curvatura geodésica é nula.

De um ponto de vista externo à superfície, o valor absoluto da curvatura geodésica k_g de C em p é o valor absoluto da componente tangencial do vetor $\alpha''(s) = kn$, onde k é a curvatura de C em p e n é o vetor normal de C em p. Lembrando que o valor absoluto da componente normal do vetor kn é o valor absoluto da curvatura normal k_n de $C \subset S$ em p, temos imediatamente (Fig. 4.17)

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

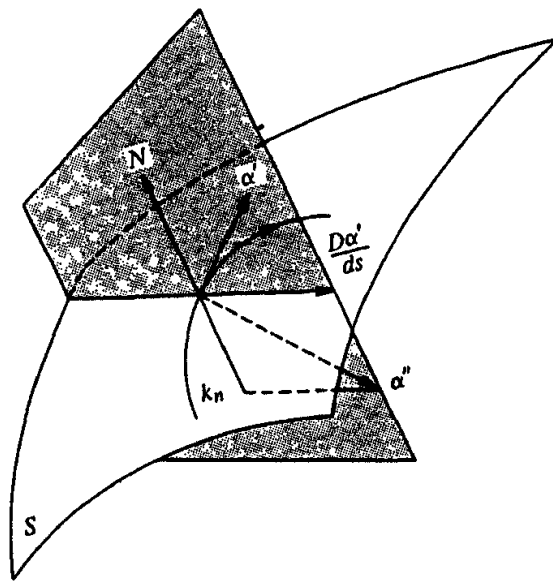



Figura 4-17

Por exemplo, o valor absoluto da curvatura geodésica k_g de um paralelo C de colatitude φ na esfera unitária S^2 pode ser calculado a partir da relação (Fig. 4.18)

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi} = k_n^2 + k_g^2 = 1 + k_g^2;$$

isto é,

$$k_g^2 = \operatorname{cotg}^2\varphi.$$

O sinal de k_g depende das orientações de S^2 e de C.

Uma outra consequência da interpretação externa é que quando duas superfícies são tangentes ao longo de uma curva regular C, o valor absoluto da curvatura geodésica de C é o mesmo relativo a qualquer uma das duas superfícies.

Observação. A curvatura geodésica de $C \subset S$ muda de sinal quando se muda a orientação de C ou de S.

Iremos agora obter uma expressão para o valor algébrico da derivada covariante (Proposição 3, abaixo). Para isto, precisamos de alguns preliminares.

Sejam v e w dois campos de vetores diferenciáveis ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \to S$, com $|v(t)| = |w(t)| = 1$, $t \in I$. Queremos definir uma função diferenciável $\varphi : I \to R$ de tal modo que $\varphi(t)$, $t \in I$, seja uma determinação diferenciável do ângulo de $v(t)$ a $w(t)$ na orientação de S. Para isto, consideramos o campo de vetores diferenciável $\bar{v}$ ao longo de α, definido pela condição de que $\{v(t), \bar{v}(t)\}$ é uma base ortonormal positiva para cada $t \in I$. Assim, $w(t)$ pode ser expresso como

$$w(t) = a(t)v(t) + b(t)\bar{v}(t),$$

onde a e b são funções diferenciáveis em I e $a^2 + b^2 = 1$.

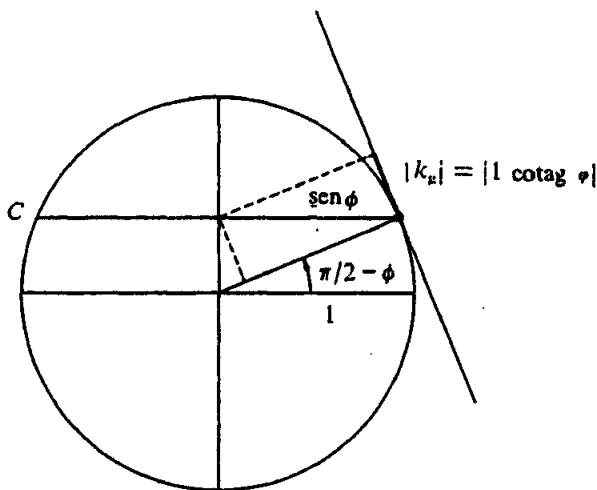



Figura 4-18. *Curvatura geodésica de um paralelo na esfera unitária.*

O lema 1 abaixo mostra que fixando uma determinação φ_0 do ângulo de $v(t_0)$ a $w(t_0)$ é possível "estendê-lo" diferenciavelmente em I, e isto nos fornece a função desejada.

Lema 1. *Sejam a e b funções diferenciáveis em I com $a^2 + b^2 = 1$ e φ_0 tal que $a(t_0) = \cos\varphi_0$ e $b(t_0) = sen\,\varphi_0$. Então a função diferenciável*

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} (ab' - ba')\, dt$$

é tal que $\cos\varphi(t) = a(t)$, $sen\,\varphi(t) = b(t)$, $t \in I$, e $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

Demonstração. Basta mostrar que a função

$$(a - \cos\varphi)^2 + (b - \operatorname{sen}\varphi)^2 = 2 - 2(a\cos\varphi + b\operatorname{sen}\varphi)$$

é identicamente nula, ou que

$$A = a\cos\varphi + b\operatorname{sen}\varphi = 1.$$

Utilizando o fato de que $aa' = -bb'$ e a definição de φ, obtemos facilmente

$$\begin{aligned} A' &= -a(\operatorname{sen}\varphi)\varphi' + b(\cos\varphi)\varphi' + a'\cos\varphi + b'\operatorname{sen}\varphi \\ &= -b'(\operatorname{sen}\varphi)(a^2+b^2) - a'(\cos\varphi)(a^2+b^2) + a'\cos\varphi + b'\operatorname{sen}\varphi = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $A(t) =$const., e como $A(t_0) = 1$, o lema está demonstrado.

Q.E.D.

Podemos agora relacionar a derivada covariante de dois campos de vetores unitários ao longo de uma curva com a variação do ângulo formado por eles.

Lema 2. *Sejam v e w dois campos diferenciáveis de vetores ao longo da curva $\alpha : I \to S$, com $|v(t)| = |w(t)| = 1$, $t \in I$. Então*

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] - \left[\frac{Dv}{dt}\right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

onde φ é uma das determinações diferenciáveis do ângulo de v a w, dadas no Lema 1.

Demonstração. Primeiro, provaremos o Lema para o caso em que $\varphi \neq 0$. Como $\cos\varphi = \langle v, w\rangle$, teremos, derivando em relação a t

$$\langle v', w\rangle + \langle v, w'\rangle = -\varphi'\operatorname{sen}\varphi,$$

que pode ser escrito

$$\langle\frac{Dv}{dt}, w\rangle + \langle v, \frac{Dw}{dt}\rangle = -\varphi'\operatorname{sen}\varphi,$$

donde

$$\left[\frac{Dv}{dt}\right]\langle N\wedge v, w\rangle + \left[\frac{Dw}{dt}\right]\langle v, N\wedge w\rangle = -\varphi'\operatorname{sen}\varphi,$$

ou seja

$$\left(\left[\frac{Dv}{dt}\right] - \left[\frac{Dw}{dt}\right]\right) \langle N \wedge v, w\rangle = -\varphi' \operatorname{sen} \varphi.$$

Decorre daí que

$$\left(\left[\frac{Dv}{dt}\right] - \left[\frac{Dw}{dt}\right]\right) \operatorname{sen} \varphi = -\varphi' \operatorname{sen} \varphi$$

e como $\varphi \neq 0$, isto demonstra o Lema neste caso.

Se $\varphi = 0$ em um ponto $p \in \alpha(I)$, ou $\varphi = 0$ em uma vizinhança V de p, ou existe uma sequência $p_n \to p$ com $\varphi(p_n) \neq 0$. No primeiro caso, $\varphi' = 0$ em V, $v = w$ e o Lema vale trivialmente. No segundo caso, o Lema vale por continuidade.

Q.E.D.

Uma consequência imediata do lema acima é a seguinte observação. Sejam C uma curva regular orientada em S, $\alpha(s)$ uma parametrização pelo comprimento de arco s de C em p, e $v(s)$ um campo paralelo ao longo de $\alpha(s)$. Então, tomando $w(s) = \alpha'(s)$, obtemos

$$k_g(s) = \left[\frac{D\alpha'(s)}{dt}\right] = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Em outras palavras, *a curvatura geodésica é a taxa de variação do ângulo que a tangente à curva faz com uma direção paralela ao longo da curva.* No caso do plano, a direção paralela é fixa e a curvatura geodésica reduz-se à curvatura usual.

Podemos agora obter a expressão prometida para o valor algébrico da derivada covariante. Sempre que falarmos de uma parametrização de uma superfície orientada, estaremos supondo que ela é compatível com a orientação dada, e quando falarmos do ângulo entre dois campos de vetores ao longo de uma curva, estaremos nos referindo a uma das determinações diferenciáveis dadas pelo Lema 1.

Proposição 3. *Sejam* $\mathbf{x}(u,v)$ *uma parametrização ortogonal (isto é,* $F = 0$*) de uma vizinhança de uma superfície orientada* S*, e* $w(t)$ *um campo de vetores unitário e diferenciável ao longo da curva* $x(u(t), v(t))$*. Então*

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u\frac{dv}{dt} - E_v\frac{du}{dt}\right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde $\varphi(t)$ é o ângulo de $\mathbf{x}_u$ a $w(t)$ na orientação dada.

Demonstração. Sejam $e_1 = \mathbf{x}_u/\sqrt{E}$, $e_2 = \mathbf{x}_v/\sqrt{G}$ vetores unitários tangentes às curvas coordenadas. Observe que $e_1 \wedge e_2 = N$, onde N é a orientação dada de S. Utilizando o Lema 2, podemos escrever

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \left[\frac{De_1}{dt}\right] + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde $e_1(t) = e_1(u(t), v(t))$ é o campo e_1 restrito à curva $\mathbf{x}(u(t), v(t))$. Mas

$$\left[\frac{De_1}{dt}\right] = \langle\frac{de_1}{dt}, N \wedge e_1\rangle = \langle\frac{de_1}{dt}, e_2\rangle = \langle(e_1)_u, e_2\rangle\frac{du}{dt} + \langle(e_1)_v, e_2\rangle\frac{dv}{dt}.$$

Por outro lado, como $F = 0$, temos

$$\langle\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v\rangle = -\frac{1}{2}E_v,$$

e portanto

$$\langle(e_1)_u, e_2\rangle = \langle\left(\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}\right)_u, \left(\frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}\right)\rangle = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}.$$

Analogamente,

$$\langle(e_1)_v, e_2\rangle = \frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}.$$

Introduzindo estas relações na expressão de $[Dw/dt]$, obtemos finalmente

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u\frac{dv}{dt} - E_v\frac{du}{dt}\right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

completando assim a demonstração.

Q.E.D.

Como aplicação da Prop. 3, provaremos a existência e unicidade do transporte paralelo (Prop. 2).

Demonstração da Prop. 2. Suponhamos inicialmente que a curva parametrizada $\alpha : I \to S$ esteja contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização ortogonal $\mathbf{x}(u, v)$. Então, com as notações da Prop. 3, a condição de paralelismo para o campo w fica

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt}\right\} = B(t).$$

Denotando por φ_0 a determinação do ângulo orientado de $\mathbf{x}_u$ a w_0, o campo é inteiramente determinado por

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} B(t)\, dt,$$

o que demonstra a existência e unicidade de w neste caso.

Caso $\alpha(I)$ não esteja contido em uma vizinhança coordenada, utilizamos a compacidade de I para dividir $\alpha(I)$ em um número finito de partes, cada uma delas contida em uma vizinhança coordenada. Utilizando a unicidade obtida na primeira parte da demonstração nas interseções não-vazias destas partes, é fácil estender o resultado para este caso.

Q.E.D.

Uma outra aplicação da Prop. 3 é a seguinte expressão para a curvatura geodésica, conhecida como *fórmula de Liouville.*

PROPOSIÇÃO 4 (Liouville). *Seja $\alpha(s)$ uma parametrização pelo comprimento de arco de uma vizinhança de um ponto $p \in S$ de uma curva regular orientada C sobre uma superfície orientada S. Seja $\mathbf{x}(u, v)$ uma parametização ortogonal de S em p e $\varphi(s)$ o ângulo que vai de $\mathbf{x}_u$ a $\alpha'(s)$ na orientação dada. Então*

$$k_g = (k_g)_1 \cos\varphi + (k_g)_2 \operatorname{sen}\varphi + \frac{d\varphi}{ds},$$

onde $(k_g)_1$ e $(k_g)_2$ são, respectivamente, as curvaturas geodésicas das curvas coordenadas $v =$ const. e $u =$ const.

Demonstração. Tomando $w = \alpha'(s)$ como na Prop. 3, obtemos

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds}\right\} + \frac{d\varphi}{ds}.$$

Ao longo da curva coordenada $v = \text{const.}$ $u = u(s)$, temos $dv/ds = 0$ e $du/ds = 1/\sqrt{E}$; portanto,

$$(k_g)_1 = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}.$$

Analogamente,

$$(k_g)_2 = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}.$$

Introduzindo estas relações na fórmula acima para k_g, obtemos

$$k_g = (k_g)_1\sqrt{E}\frac{du}{ds} + (k_g)_2\sqrt{G}\frac{dv}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}.$$

Como

$$\sqrt{E}\frac{du}{ds} = \langle \alpha'(s), \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}\rangle = \cos\varphi \quad \text{e} \quad \sqrt{G}\frac{dv}{ds} = \operatorname{sen}\varphi,$$

chegamos finalmente a

$$k_g = (k_g)_1 \cos\varphi + (k_g)_2 \operatorname{sen}\varphi + \frac{d\varphi}{ds},$$

que é a expressão desejada.

Q.E.D.

Introduziremos agora as equações de uma geodésica em uma vizinhança coordenada. Para isto, seja $\gamma : I \to S$ uma curva parametrizada de S e seja $x(u, v)$ uma parametrização de S em uma vizinhança V de $\gamma(t_0)$, $t_0 \in I$. Seja $J \subset I$ um intervalo aberto contendo t_0 tal que $\gamma(J) \subset V$. Seja $\mathbf{x}(u(t), v(t))$, $t \in J$, a expressão de $\gamma : J \to S$ na parametrização $\mathbf{x}$. Então, o campo de vetores tangente $\gamma'(t)$, $t \in J$, é dado por

$$w = u'(t)\mathbf{x}_u + v'(t)\mathbf{x}_v.$$

Portanto, o fato de w ser paralelo é equivalente ao sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma^1_{11}(u')^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}(v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma^2_{11}(u')^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}(v')^2 = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

obtido a partir da Eq. (1) fazendo $a = u'$ e $b = v'$, e igualando a zero os coeficientes de $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$.

Em outras palavras, $\gamma : I \to S$ é uma geodésica se e somente se o sistema (2) é satisfeito para todo intervalo $J \subset I$ tal que $\gamma(J)$ esteja contido em uma vizinhança coordenada. O sistema (2) é conhecido como as *equações diferenciais das geodésicas de* S.

Uma consequência importante do fato de que as geodésicas são caracterizadas pelo sistema (2) é a proposição seguinte.

Proposição 5. *Dado um ponto* $p \in S$ *e um vetor* $w \in T_pS$, $w \neq 0$, *existe um* $\varepsilon > 0$ *e uma única geodésica parametrizada* $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ *tal que* $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = w$.

Na seção 4.7 mostraremos como a Prop. 5 pode ser obtida a partir dos teoremas sobre campos de vetores.

Observação. A razão para tomarmos $w \neq 0$ na Prop. 5 vem do fato de termos excluído as curvas constantes na definição de geodésicas parametrizadas (cf. Def. 8).

Utilizaremos o resto desta seção para dar algumas aplicações geométricas das equações diferenciais (2). Este material pode ser omitido se assim o desejar o leitor. Neste caso, os Exercícios 18, 20 e 21 também devem ser omitidos.

Exemplo 5. Utilizaremos o sistema (2) para estudar localmente as geodésicas de uma superfície de revolução (cf. Exemplo 4, seção 2.3) com a parametrização

$$x = f(v)\cos u, \qquad y = f(v)\operatorname{sen} u, \qquad z = g(v).$$

Pelo Exemplo 1 da seção 4.3, os símbolos de Christoffel são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, \qquad \Gamma_{11}^2 = -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}, \qquad \Gamma_{12}^1 = \frac{ff'}{f^2}, \\ \Gamma_{12}^2 &= 0, \qquad \Gamma_{22}^1 = 0, \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}. \end{aligned}$$

Com os valores acima, o sistema (2) fica

$$\begin{aligned} u'' + \frac{2ff'}{f^2}u'v' &= 0, \\ v'' - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}(u')^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2a}$$

Vamos tirar algumas conclusões a partir destas equações.

Primeiro, como esperado, os meridianos $u =$ const. e $v = v(s)$ parametrizados pelo comprimento de arco s são geodésicas. De fato, a primeira das equações de (2a) é trivialmente satisfeita por $u =$const.. A segunda equação fica

$$v'' + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2 = 0.$$

Como a primeira forma fundamental ao longo do meridiano $u =$const. $v = v(s)$ nos dá

$$((f')^2 + (g')^2)(v')^2 = 1,$$

concluímos que

$$(v')^2 = \frac{1}{(f')^2 + (g')^2}.$$

Portanto, derivando,

$$2v'v'' = -\frac{2(f'f'' + g'g'')}{((f')^2 + (g')^2)^2}v' = -\frac{2(f'f'' + g'g'')}{((f')^2 + (g')^2)}(v')^3,$$

ou, já que $v' \neq 0$,

$$v'' = -\frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2;$$

isto é, ao longo do meridiano a segunda equação de (2a) também é satisfeita, o que mostra que de fato os meridianos são geodésicas.

Agora vamos determinar quais os paralelos $v =$ const. $u = u(s)$, parametrizados pelo comprimento de arco, são geodésicas. A primeira das equações (2a) fornece $u' =$ const. e a segunda fica

$$\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}(u')^2 = 0.$$

Para que o paralelo $v =$ const., $u = u(s)$ seja uma geodésica é necessário que $u' \neq 0$. Como $(f')^2 + (g')^2 \neq 0$ e $f \neq 0$, concluímos da equação acima que $f' = 0$.

Em outras palavras, uma condição necessária para que um paralelo de uma superfície de revolução seja uma geodésica é que tal paralelo seja gerado pela rotação de um ponto da curva geratriz onde a tangente é paralela ao eixo de revolução (Fig. 4.19). Esta condição é evidentemente suficiente, já que ela implica que a reta normal do paralelo coincide com a reta normal à superfície (Fig. 4.19).

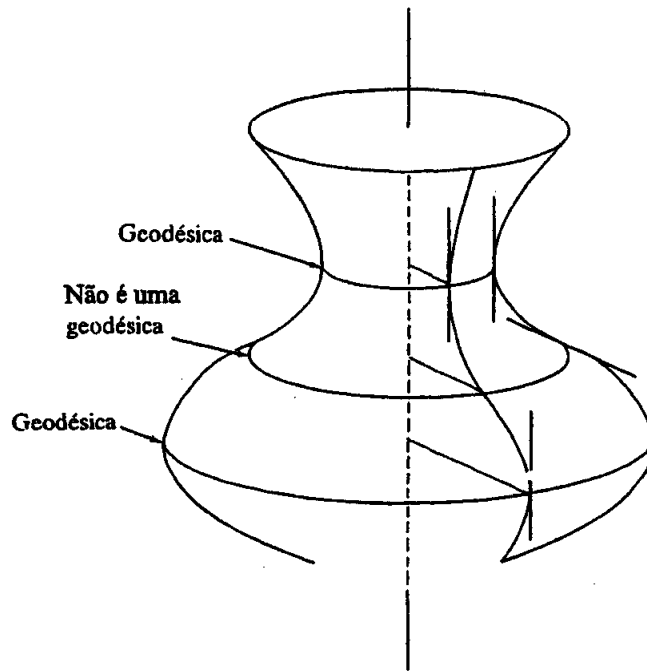



Figura 4-19

Para uso posterior iremos obter uma consequência geométrica interessante a partir da primeira das equações (2a), conhecida como relação de Clairaut. Observe que a primeira das equações (2a) pode ser escrita como

$$(f^2u')' = f^2u'' + 2ff'u'v' = 0;$$

logo,

$$f^2u' = \text{ const. } = c.$$

Por outro lado, o ângulo θ, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, de uma geodésica com um paralelo que a intersecta é dado por

$$\cos\theta = \frac{|\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'\rangle|}{|\mathbf{x}_u|} = |fu'|,$$

onde $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ é a base associada na parametrização dada. Como $f = r$ é o raio do paralelo no ponto de interseção, obtemos a *relação de Clairaut* :

$$r \cos \theta = \text{ const. } = |c|.$$

No exemplo seguinte mostraremos como esta relação pode ser útil. Veja também os exercícios 18, 20 e 21.

Finalmente, mostraremos que o sistema (2a) pode ser integrado por meio de primitivas. Seja $u = u(s)$, $v = v(s)$ uma geodésica parametrizada por comprimento de arco, que iremos supor não ser nem um meridiano nem um paralelo da superfície. A primeira das equações (2a) é escrita então como $f^2 u' = \text{const.} = c \neq 0$.

Observe inicialmente que a primeira forma fundamental ao longo de $(u(s), v(s))$,

$$1 = f^2 (\frac{du}{ds})^2 + ((f')^2 + (g')^2)(\frac{dv}{ds})^2, \tag{3}$$

junto com a primeira das equações (2a), é equivalente à segunda equação de (2a). De fato, substituindo $f^2 u' = c$ na Eq. (3), obtemos

$$(\frac{dv}{ds})((f')^2 + (g')^2) = -\frac{c^2}{f^2} + 1;$$

logo, derivando com relação a s,

$$2\frac{dv}{ds}\frac{d^2v}{ds^2}((f')^2 + (g')^2) + (\frac{dv}{ds})^2(2f'f'' + 2g'g'')\frac{dv}{ds} = \frac{2ff'c^2}{f^4}\frac{dv}{ds},$$

que é equivalente à segunda equação de (2a), uma vez que $(u(s), v(s))$ não é um paralelo. (É claro que a geodésica pode ser tangente a um paralelo que não seja uma geodésica e então $v'(s) = 0$. No entanto, a relação de Clairaut mostra que isto acontece somente em pontos isolados.)

Por outro lado, como $c \neq 0$ (pois a geodésica não é um meridiano), temos $u'(s) \neq 0$. Segue-se que podemos inverter $u = u(s)$, obtendo $s = s(u)$, e portanto $v = v(s(u))$. Multiplicando a Eq. (3) por $(ds/du)^2$, obtemos

$$(\frac{ds}{du})^2 = f^2 + ((f')^2 + (g')^2)(\frac{dv}{ds}\frac{ds}{du})^2,$$

ou, utilizando o fato de que $(ds/du)^2 = f^4/c^2$,

$$f^2 = c^2 + c^2\frac{(f')^2 + (g')^2}{f^2}(\frac{dv}{du,})^2,$$

isto é,

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{c} f \sqrt{\frac{f^2 - c^2}{(f')^2 + (g')^2}};$$

logo

$$u = c \int \frac{1}{f} \sqrt{\frac{(f')^2 + (g')^2}{f^2 - c^2}}\, dv + \text{const.}, \tag{4}$$

que é a equação de um segmento de geodésica de uma superfície de revolução que não é nem um paralelo nem um meridiano.

Exemplo 6. Iremos mostrar que qualquer geodésica do parabolóide de revolução $z = x^2 + y^2$ que não é um meridiano se auto-intersecta uma infinidade de vezes.

Sejam p_0 um ponto do parabolóide e P_0 o paralelo de raio r_0 passando por p_0. Seja γ a geodésica parametrizada passando por p_0 e fazendo um ângulo θ_0 com P_0. Como, pela relação de Clairaut,

$$r \cos\theta = \text{ const. } = |c|, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

concluímos que θ aumenta com r

Portanto, se seguimos na direção para a qual os paralelos crescem, θ cresce. Pode acontecer que em algumas superfícies de revolução γ se aproxime assintoticamente de um meridiano. Mostraremos em breve que isto não acontece para o parabolóide de revolução. Isto é, a geodésica γ intersecta todos os meridianos, e portanto ela dá uma infinidade de voltas em torno do parabolóide.

Por outro lado, se seguimos na direção para a qual os paralelos decrescem, o ângulo θ decresce e se aproxima de zero, que corresponde a um paralelo de raio $|c|$ (observe que se $\theta_0 \neq 0$, $|c| < r$). Iremos mostrar mais adiante neste livro que nenhuma geodésica de uma superfície de revolução pode ser assintótica a um paralelo a não ser que este paralelo seja uma geodésica (seção 4.7). Como nenhum paralelo do parabolóide é uma geodésica, a geodésica γ é em verdade tangente ao paralelo de raio $|c|$ em um ponto p_1. Como 1 é um máximo para $\cos\theta$, o valor de r irá crescer a partir de p_1. Estamos, portanto, em situação idêntica à anterior. A geodésica irá dar uma infinidade de voltas em torno do parabolóide, na direção de $\mathbb{R}'s$ crescentes, e evidentemente intersectará a outra parte da geodésica uma infinidade de vezes (Fig. 4.20).

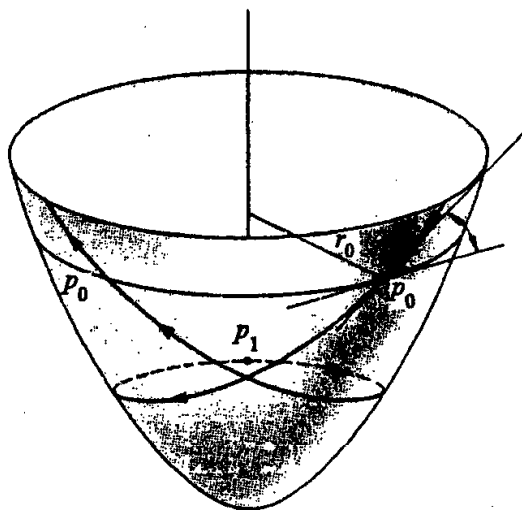



Figura 4-20

Observe que se $\theta_0 = 0$, a situação inicial é a do ponto p_1.

Resta mostrar que quando r aumenta a geodésica γ corta todos os meridianos do parabolóide. Observe inicialmente que a geodésica não pode ser tangente a um meridiano. Caso contrário, ela iria coincidir com o meridiano pela parte referente à unicidade da Prop. 5. Como o ângulo θ cresce com r, se γ não cortasse todos os meridianos, ela se aproximaria assintoticamente de um meridiano, digamos M.

Vamos supor que tal situação ocorra e escolhamos um sistema de coordenadas locais para o parabolóide $z = x^2 + y^2$, dado por

$$\begin{aligned} x &= v\cos u, \qquad y = v \operatorname{sen} u, \qquad z = v^2, \\ 0 &< v < +\infty, \qquad 0 < u < 2\pi, \end{aligned}$$

de modo que a correspondente vizinhança coordenada contenha M como $u = u_0$. Por hipótese, $u \to u_0$ quando $v \to \infty$. Por outro lado, a equação da geodésica γ neste sistema de coordenadas é dada por (cf. Eq. (4), Exemplo 5 e escolha uma orientação para γ tal que $c > 0$)

$$u = c\int \frac{1}{v}\sqrt{\frac{1+4v^2}{v^2-c^2}}\,dv + \text{const.} > c\int \frac{dv}{v} + \text{ const.},$$

já que

$$\frac{1+4v^2}{v^2-c^2} > 1.$$

Segue-se da desigualdade acima que à medida que $v \to \infty$, u cresce de maneira ilimitada, o que contradiz o fato de que γ se aproxima de M assintoticamente. Portanto, γ intersecta todos os meridianos, e isto completa a demonstração da afirmação feita no início deste exemplo.

Exercícios

1. **a.** Mostre que se uma curva $C \subset S$ é ao mesmo tempo uma linha de curvatura e uma geodésica, então C é uma curva plana.

   b. Mostre que se uma geodésica (que não seja uma reta) é uma curva plana, então ela é uma linha de curvatura.

   c. Dê um exemplo de uma linha de curvatura que é uma curva plana mas não é uma geodésica.

2. Prove que uma curva $C \subset S$ é ao mesmo tempo uma linha assintótica e uma geodésica se e somente se C é uma (ou um segmento de) reta.

3. Mostre, sem utilizar a Prop. 5, que as retas são as únicas geodésicas de um plano.

4. Sejam v e w campos de vetores ao longo de uma curva $\alpha : I \to S$. Prove que

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), w(t)\rangle = \left\langle \frac{Dv}{dt}, w(t)\right\rangle + \left\langle v(t), \frac{Dw}{dt}\right\rangle.$$

5. Considere o toro de revolução gerado pela rotação do círculo

$$(x-a)^2 + z^2 = r^2, \; y = 0,$$

   em torno do eixo z ($a > r > 0$). Os paralelos gerados pelos pontos $(a + r, 0)$, $(a - r, 0)$, (a, r) são chamados de *paralelo máximo, paralelo mínimo* e *paralelo superior*, respectivamente. Verifique quais destes paralelos é

   a. Uma geodésica.

   b. Uma linha assintótica.

   c. Uma linha de curvatura.

*6. Calcule a curvatura geodésica do paralelo superior do toro do Exercício 5.

7. Intersecte o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com um plano passando pelo eixo $0x$ e fazendo um ângulo $\theta \neq \pi/2$ com o plano xy.

   a. Mostre que a curva de interseção é uma elipse C.

   b. Calcule o valor absoluto da curvatura geodésica de C no cilindro nos pontos em que a elipse C encontra os seus eixos.

*8. Mostre que se todas as geodésicas de uma superfície conexa são curvas planas, então a superfície está contida em um plano ou em uma esfera.

*9. Considere dois meridianos de uma esfera C_1 e C_2 que fazem um ângulo φ em um ponto p_1. Tome o transporte paralelo do vetor w_0 tangente a C_1, ao longo de C_1 e C_2, partindo do ponto p_1 ao ponto p_2 no qual os meridianos se encontram novamente, obtendo, respectivamente, w_1 e w_2. Calcule o ângulo de w_1 a w_2.

*10. Mostre que a curvatura geodésica de uma curva orientada $C \subset S$ em um ponto $p \in C$ é igual à curvatura da curva plana obtida projetando-se C sobre o plano tangente T_pS ao longo da normal à superfície em p.

11. Enuncie com precisão e prove: O valor algébrico da derivada covariante é invariante por isometrias que preservam a orientação.

*12. Dizemos que um conjunto de curvas regulares em uma superfície S é uma *família diferenciável de curvas* em S se as retas tangentes às curvas do conjunto formam um campo diferenciável de direções (ver seção 3.4). Suponha que a superfície S admita duas famílias diferenciáveis ortogonais de geodésicas. Prove que a curvatura Gaussiana de S é zero.

*13. Seja V uma vizinhança conexa de um ponto p de uma superfície S, e suponha que o transporte paralelo entre quaisquer dois pontos de V não dependa da curva ligando estes dois pontos. Prove que a curvatura Gaussiana de V é zero.

14. Seja S uma superfície regular orientada e seja $\alpha : I \to S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. No ponto $p = \alpha(t)$ considere

os três vetores unitários (*triedro de Darboux*) $T(s) = \alpha'(s)$, $N(s) =$ vetor normal a S em p, $V(s) = N(s) \wedge T(s)$. Mostre que

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= 0 + aV + bN, \\ \frac{dV}{ds} &= -aT + 0 + cN, \\ \frac{dN}{ds} &= -bT - cV + 0, \end{aligned}$$

onde $a = a(s)$, $b = b(s)$, $c = c(s)$, $s \in I$. As fórmulas acima são análogas às de Frenet para o triedro T, V, N. Para estabelecer o significado geométrico dos coeficientes, prove que:

a. $c = -\langle dN/ds, V\rangle$; concluir disto que $\alpha(I) \subset S$ é uma linha de curvatura se e somente se $c \equiv 0$ ($-c$ é chamada *torção geodésica* de α; cf. Exercício 19, seção 3.2).

b. b é a curvatura normal de $\alpha(I) \subset S$ em p.

c. a é a curvatura geodésica de $\alpha(I) \subset S$ em p.

15. Sejam p_0 um pólo da esfera unitária S^2 e q, p dois pontos no equador correspondente de modo que os meridianos p_0q e p_0p façam um ângulo θ em p_0. Considere um vetor unitário v tangente ao meridiano p_0q em p_0, e tome o transporte paralelo de v ao longo da curva fechada constituida do meridiano p_0q,do paralelo qp e do meridiano pp_0 (Fig. 4.21).

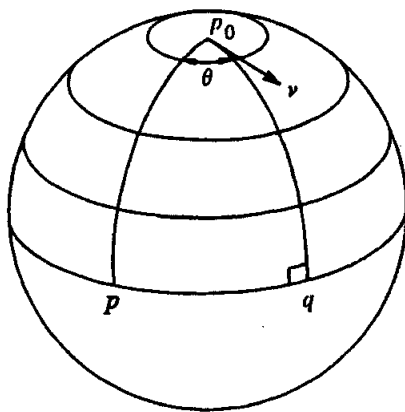



Figura 4-21

a. Determine o ângulo da posição final de v com v.

b. Faça a mesma coisa quando os pontos p e q, ao invés de estarem no equador, estejam em um paralelo de colatitude ϕ (cf. Exemplo 1).

***16.** Seja p um ponto de uma superfície orientada S e suponha que exista uma vizinhança de p em S cujos pontos sejam todos parabólicos. Mostre que a (única) linha assintótica passando por p é um segmento aberto de uma reta. Dê um exemplo mostrando que a condição de ter uma vizinhança de pontos parabólicos é essencial.

17. Seja $\alpha : I \to S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s, com curvatura não-nula por toda a parte. Considere a superfície parametrizada (seção 2.3)

$$\mathbf{x}(s,v) = \alpha(s) + vb(s), \qquad s \in I, \; -\varepsilon < v < \varepsilon, \; \varepsilon > 0,$$

onde b é o vetor binormal de α. Prove que se ε é pequeno, $\mathbf{x}(I \times (-\varepsilon, \varepsilon)) = S$ é uma superfície regular sobre a qual $\alpha((I)$ é uma geodésica (assim, *toda curva é uma geodésica sobre a superfície gerada pelas suas binormais*).

***18.** Considere a geodésica partindo de um ponto p na parte superior ($z > 0$) de um hiperbolóide de revoluçao $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ que faz um ângulo θ com o paralelo passando por p de tal modo que $\cos\theta = 1/r$, onde r é a distância de p ao eixo $0z$. Mostre que ao percorrer a geodésica na direção em que os paralelos decrescem, ela se aproxima assintoticamente do paralelo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ (Fig. 4.22).

***19.** Mostre que quando as equações diferenciais (2) das geodésicas são escritas usando o comprimento de arco como parâmetro então a segunda equação de (2) é, exceto para as curvas coordenadas, uma consequência da primeira equação de (2).

***20.** Seja T um toro de revolução que iremos supor parametrizado por (cf. Exemplo 6, seção 2.2)

$$\mathbf{x}(u,v) = ((r\cos u + a)\cos v, (r\cos u + a)\,\mathrm{sen}\, v, r\,\mathrm{sen}\, u).$$

Prove que

a. Se uma geodésica é tangente ao paralelo $u = \pi/2$, então ela está inteiramente contida na região T dada por

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

b. Uma geodésica que intersecta o paralelo $u = 0$ sob um ângulo θ $(0 < \theta < \pi/2)$ também intersecta o paralelo $u = \pi$ se

$$\cos\theta < \frac{a-r}{a+r}.$$

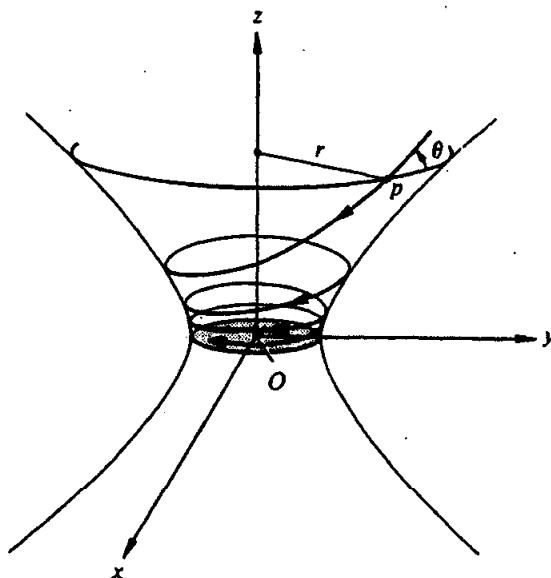



Figura 4-22

21. *Superfícies de Liouville* são aquelas superfícies para as quais é possível obter um sistema local de coordenadas $\mathbf{x}(u, v)$ tal que os coeficientes da primeira forma fundamental são escritos na forma

$$E = G = U + V, \qquad F = 0,$$

onde $U = U(u)$ é uma função apenas de u e $V = V(v)$ é uma função apenas de v. Observe que as superfícies de Liouville generalizam as superfícies de revolução e prove que (cf. Exemplo 5)

a. As geodésicas de uma superfície de Liouville podem ser obtidas por meio de primitivas na forma

$$\int \frac{du}{\sqrt{U-c}} = \pm \int \frac{dv}{\sqrt{V+c}} + c_1,$$

onde c e c_1 são constantes que dependem das condições iniciais.

b. Se θ, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, é o ângulo que a geodésica faz com a curva $v =$ const., então

$$U \operatorname{sen}^2 \theta - V \cos^2 \theta = \text{ const.}.$$

(Note que isto é o análogo da relação de Clairaut para as superfícies de Liouville.)

22. Seja $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 1\}$ e seja $p \in S^2$. Para cada curva parametrizada regular por partes $\alpha : [0, l] \to S^2$ com $\alpha(0) = \alpha(l) = p$, seja $P_\alpha : T_pS^2 \to T_pS^2$ a aplicação que associa a cada $v \in T_pS^2$ o seu transporte paralelo de volta a p ao longo de α. Pela Prop. 1, P_α é uma isometria linear. Prove que para qualquer rotação R de T_pS^2 existe uma α tal que $R = P_\alpha$.

23. Mostre que as isometrias da esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

são as restrições a S^2 das transformações lineares ortogonais de $\mathbb{R}^3$.

4.5 O Teorema de Gauss-Bonnet e suas Aplicações

Nesta seção, apresentaremos o teorema de Gauss-Bonnet e algumas de suas consequências. A geometria envolvida neste teorema é relativamente simples, e a dificuldade em prová-lo provém de certos fatos topológicos. Estes fatos serão apresentados sem demonstrações.

O teorema de Gauss-Bonnet é provavelmente o teorema mais profundo na geometria diferencial das superfícies. Uma primeira versão deste teorema foi apresentada por Gauss em um famoso artigo [1] e trata de triângulos geodésicos

em superfícies (isto é, triângulos cujos lados são arcos de geodésicas). A grosso modo, ele afirma que o excesso sobre π da soma dos ângulos internos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de um triângulo geodésico T é igual à integral da curvatura Gaussiana K sobre T; isto é (Fig. 4.23),

$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_i - \pi = \iint_T K \, d\sigma.$$

Por exemplo, se $K \equiv 0$, obtemos que $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i = \pi$, uma extensão do teorema de Tales do ensino médio para superfícies com curvatura nula. Caso tenhamos $K \equiv 1$, obtemos que $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i - \pi = \text{área } (T) > 0$.

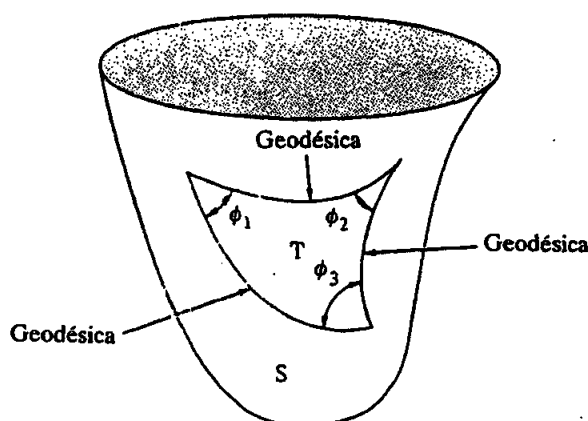
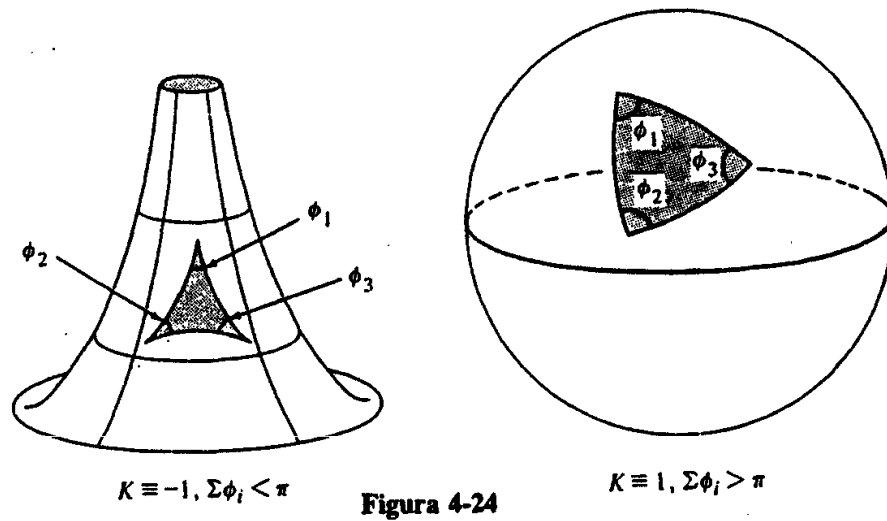



Figura 4-23. *Um triângulo geodésico.*

Assim, sobre uma esfera unitária a soma dos ângulos interiores de qualquer triângulo geodésico é maior que π, e o excesso sobre π é exatamente a área de T. Analogamente, sobre a pseudoesfera (Exercício 6, seção 3.3) a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo geodésico é menor que π (Fig. 4.24).

A extensão do teorema a uma região limitada por uma curva simples não-geodésica (ver Eq. (1) adiante deve-se a O. Bonnet. Para estendê-lo ainda mais, digamos, para superfícies compactas, algumas considerações topológicas entrarão em cena. Em verdade, uma das mais importantes características do teorema de Gauss-Bonnet é a de apresentar uma surpreendente relação entre a topologia de uma superfície compacta e a integral de sua curvatura (ver Corolário 2 adiante).

Figura 4-24

Começaremos agora a expor os detalhes da versão local do teorema de Gauss-Bonnet. Precisamos de algumas definições.

Seja $\alpha : [0, l] \to S$ uma aplicação contínua de um intervalo fechado $[0, l]$ sobre uma superfície regular S. Dizemos que α é uma *curva parametrizada simples, fechada e regular por partes* se:

1. $\alpha(0) = \alpha(l)$.
2. $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in [0, l)$, implica que $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$.
3. Existe uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = l,$$

de $[0, l]$ tal que α é diferenciável e regular em cada $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, k$.

Intuitivamente, isto significa que α é uma curva fechada (condição 1) sem auto-interseções (condição 2), que deixa de ter uma reta tangente bem definida apenas em um número finito de pontos (condição 3).

Os pontos $\alpha(t_i)$, $i = 0, \ldots, k$, são chamados *vértices* de α e os traços $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ são chamados *arcos regulares* de α. É comum dizer que o traço $\alpha([0, l])$ de α é uma *curva fechada simples regular por partes.*

Pela condição de regularidade, para cada vértice $\alpha(t_i)$ existe o limite à esquerda, i.e., para $t < t_i$,

$$\lim_{t \to t_i} \alpha'(t) = \alpha'(t_i - 0) \neq 0,$$

e o limite à direita, i.e., para $t > t_i$,

$$\lim_{t \to t_i} \alpha'(t) = \alpha'(t_i + 0) \neq 0.$$

Suponha agora que S está orientada e seja $|\theta_i|$, $0 < \theta_i \leq \pi$, a menor determinação do ângulo de $\alpha'(t_i - 0)$ a $\alpha'(t_i + 0)$. Se $|\theta_i| \neq \pi$, damos a θ_i o sinal do determinante $(\alpha'(t_i - 0), \alpha'(t_i + 0), N)$. Isto significa que se o vértice $\alpha(t_i)$ não é uma "cúspide" (Fig. 4.25), o sinal de θ_i é dado pela orientação de S. O ângulo com sinal θ_i, $-\pi < \theta_i < \pi$, é chamado *ângulo externo* no vértice $\alpha(t_i)$.

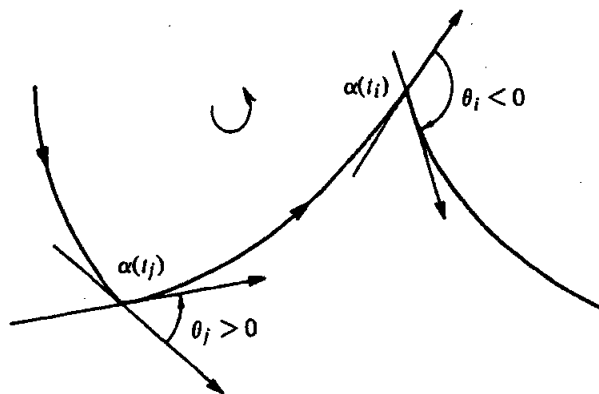



Figura 4-25

No caso em que o vértice é uma cúspide, isto é, $|\theta_i| = \pi$, escolhemos o sinal de θ_i do seguinte modo. Usando uma parametrização, o problema fica reduzido ao caso no qual α está contido em $\mathbb{R}^2$, com $\alpha(t_i) = 0$, e $\alpha'(t_i - 0)$ está na parte negativa do eixo Ox (logo $\alpha'(t_i + 0)$ está na parte positiva). Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o traço de α restrito a $(t_i - \varepsilon, t_i)$ é o gráfico de uma função $f : (0, \varepsilon') \to \mathbb{R}$ e o traço de α restrito a $(t_i, t_i + \varepsilon)$ é o gráfico de uma função $g : (0, \varepsilon'') \to \mathbb{R}$. Como α não tem auto-interseções, ou $f(x) > g(x)$, ou $f(x) < g(x)$, para todo x em que ambas f e g estão definidas. No primeiro caso, defina $\theta_i = \pi$ e no segundo, defina $\theta_i = -\pi$ (Fig. 4.26).

Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ uma parametrização compatível com a orientação de S. Suponha também que U é homeomorfo a um disco aberto no plano.

Seja $\alpha : [0, l] \to \mathbf{x}(U) \subset S$ uma curva parametrizada simples, fechada e regular por partes, com vértices $\alpha(t_i)$ e ângulos externos θ_i, $i = 0, \ldots, k$.

Sejam $\varphi_i : [t_i, t_i + 1] \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis que medem em cada $t \in [t_i, t_{i+1}]$ o ângulo positivo de $\mathbf{x}_u$ a $\alpha'(t)$ (cf. Lema 1, seção 4.4).

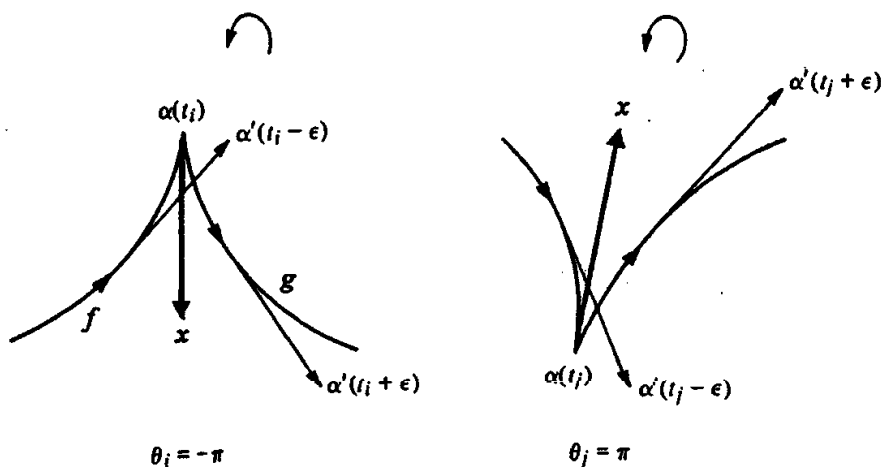



Figura 4-26. *O sinal do ângulo externo no caso de uma cúspide.*

O primeiro fato topológico que apresentaremos sem demonstração é o seguinte.

Teorema (do Índice de Rotação). *Com a notação acima*

$$\sum_{i=0}^{k}(\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^{k}\theta_i = \pm 2\pi,$$

onde o sinal positivo ou negativo depende da orientação de α.

O Teorema afirma que a variação total do ângulo do vetor tangente a α com uma dada direção mais os "saltos" nos vértices é igual a 2π.

Uma demonstração elegante deste teorema foi dada por H. Hopf, *Compositio Math.* 2 (1935), 50-62. Para o caso em que α não tem vértices e limita uma região homeomorfa a um plano a demonstração de Hopf pode ser encontrada na seção 5.7 (Teorema 2) deste livro.

Antes de enunciarmos a versão local do teorema de Gauss-Bonnet precisaremos de alguma terminologia.

Seja S uma superfície orientada. Dizemos que uma região $R \subset S$ (união de um conjunto aberto conexo com a sua fronteira) é uma *região simples* se R é homeomorfa a um disco e a fronteira ∂R de R é o traço de uma curva parametrizada simples, fechada e regular por partes $\alpha : I \to S$. Dizemos então que α é *orientada positivamente* se para cada $\alpha(t)$, pertencente a um arco

regular, a base positiva ortogonal $\{\alpha'(t), h(t)\}$ satisfaz a condição de que $h(t)$ "aponta para dentro" de R; mais precisamente, para qualquer curva $\beta : I \to R$ com $\beta(0) = \alpha(t)$ e $\beta'(0) \neq \alpha'(t)$, temos que $\langle \beta'(0), h(t) \rangle > 0$. Intuitivamente, isto significa que ao andarmos pela curva α na direção positiva com a cabeça apontando para N, a região R estará à nossa esquerda (Fig. 4.27). Pode-se mostrar que uma das duas orientações possíveis de α faz com que ela fique orientada positivamente.

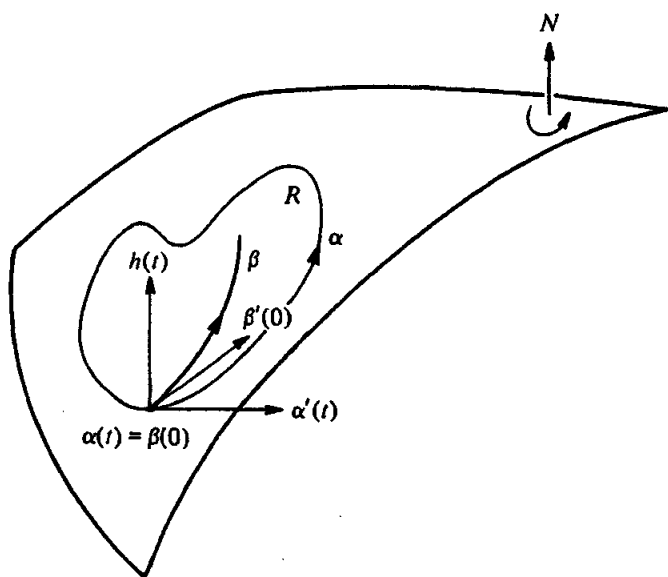



Figura 4-27. *Uma curva da fronteira orientada positivamente.*

Sejam agora $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ uma parametrização de S compatível com a sua orientação e $R \subset \mathbf{x}(U)$ uma região limitada de S. Se f é uma função difrenciável em S, então se vê facilmente que a integral

$$\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} f(u,v)\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

não depende da parametrização $\mathbf{x}$, escolhida na classe de orientação de $\mathbf{x}$. (A demonstração é a mesma que apresentamos na definição de área; cf. seção 2.5.) Esta integral tem, portanto, um significado geométrico e é chamada *integral de f sobre a região R*. É comum denotá-la por

$$\iint_R f\, d\sigma.$$

Com estas definições, enunciamos agora o

Teorema de Gauss-Bonnet (Local) *Seja* $\mathbf{x} : U \to S$ *uma parametrização ortogonal (isto é,* $F = 0$*), de uma superfície orientada* S*, onde* $U \subset \mathbb{R}^2$ *é homeomorfo a um disco aberto e* x *é compatível com a orientação de* S*. Seja* $R \subset \mathbf{x}(U)$ *uma região simples de* S *e seja* $\alpha : I \to S$ *tal que* $\partial R = \alpha(I)$*. Suponha que* α *é orientada positivamente, parametrizada pelo comprimento de arco* s*, e sejam* $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$ *e* $\theta_0, \dots, \theta_k$*, respectivamente, os vértices e os ângulos externos de* α*. Então*

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\, ds + \iint_R K\, d\sigma + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 2\pi, \tag{1}$$

onde $k_g(s)$ *é a curvatura geodésica dos arcos regulares de* α *e* K *é a curvatura Gaussiana de* S*.*

Observação. A restrição da região R estar contida no conjunto imagem de uma parametrização ortogonal é necessária apenas para simplificar a demonstração. Como veremos a seguir (Corolário 1 do teorema de Gauss Bonnet global) o resultado acima permanece válido para qualquer região simples de uma superfície regular. Isto é bastante plausível, pois a Eq. (1) não envolve de maneira alguma uma parametrização particular* .

Demonstração. Seja $u = u(s)$, $v = v(s)$ a expressão de α na parametização $\mathbf{x}$. Utilizando a Prop. 3 da seção 4.4, temos

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_i}{ds},$$

onde $\varphi_i = \varphi_i(s)$ é uma função diferenciável que mede o ângulo positivo de $\mathbf{x}_u$ a $\alpha'(s)$ em $[s_i, s_{i+1}]$. Integrando a expressão acima em todos os intervalos $[s_i, s_{i+1}]$ e somando os resultados,

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\, ds$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds}\, ds.$$

---

* Aceitando esta afirmação como verdadeira, as aplicações 2 e 6 dadas abaixo podem ser apresentadas agora.

Agora utilizaremos o teorema de Gauss-Green no plano uv que afirma o seguinte: *Se $P(u,v)$ e $Q(u,v)$ são funções diferenciáveis em uma região simples $A \subset \mathbb{R}^2$, cuja fronteira é dada por $u = u(s)$, $v = v(s)$, então*

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(P\frac{du}{ds} + Q\frac{dv}{ds} \right) ds = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du\, dv.$$

Segue-se que

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\, ds$$

$$= \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \left\{ \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} du\, dv + \sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds}\, ds.$$

A partir da fórmula de Gauss para $F = 0$ (Exercício 1, seção 4.3), sabemos que

$$\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \left\{ \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} du\, dv = -\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K\sqrt{EG}\, du\, dv = \iint_R K\, d\sigma.$$

Por outro lado, pelo teorema do índice de rotação,

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds}\, ds = \sum_{i=0}^{k} (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)) = \pm 2\pi - \sum_{i=0}^{k} \theta_i.$$

Como a curva α é orientada positivamente, o sinal na expressão acima deve ser positivo, como se pode ver facilmente no caso particular de um círculo em um plano.

Utilizando os fatos acima, obtemos

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\, ds + \iint_R K\, d\sigma + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 2\pi.$$

Q.E.D.

Antes de passarmos à versão global do teorema de Gauss-Bonnet, gostaríamos de mostrar como as técnicas utilizadas na demonstração do teorema acima podem também ser usadas para obter uma interpretação da curvatura Gaussiana em termos de paralelismo.

Para fazer isto, seja $\mathbf{x} : U \to S$ uma parametrização ortogonal em um ponto $p \in S$, e seja $R \subset \mathbf{x}(U)$ uma região simples sem vértices, contendo p em seu interior. Seja $\alpha : [0, l] \to \mathbf{x}(U)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s tal que o traço de α seja a fronteira de R. Seja w_0 um vetor unitário tangente a S em $\alpha(0)$ e seja $w(s)$, $s \in [0, l]$, o transporte paralelo de w_0 ao longo de α (Fig. 4.28).

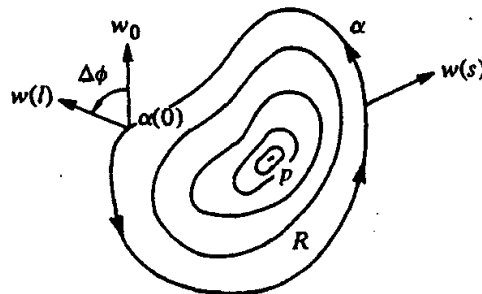



Figura 4-28

Utilizando a Prop. 3 da seção 4.4 e o teorema de Gauss-Green no plano uv, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l \left[\frac{Dw}{ds}\right] ds \\ &= \int_0^l \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} ds + \int_0^l \frac{d\varphi}{ds} ds \\ &= -\iint_R K \, d\sigma + \varphi(l) - \varphi(0), \end{aligned}$$

onde $\varphi = \varphi(s)$ é uma determinação diferenciável do ângulo de $\mathbf{x}_u$ a $w(s)$. Segue-se que $\varphi(l) - \varphi(0) = \Delta\varphi$ é dado por

$$\Delta\varphi = \iint_R K \, d\sigma. \tag{2}$$

Ora, $\Delta\varphi$ não depende da escolha de w_0, e segue-se da expressão acima que $\Delta\varphi$ também não depende da escolha de $\alpha(0)$. Tomando o limite (como na Prop. 2, seção 2.3)

$$\lim_{R\to p} \frac{\Delta\varphi}{A(R)} = K(p),$$

onde $A(R)$ denota a área da região R, obtemos a interpretação de K que desejávamos.

Para globalizar o teorema de Gauss-Bonnet, precisamos de mais alguns preliminares topológicos.

Seja S uma superfície regular. Dizemos que uma região (conexa) $R \subset S$ é *regular* se R é compacta e a sua fronteira ∂R é uma união finita de curvas regulares por partes fechadas (e simples) que não se intersectam (a região na Fig. 4.29 (a) é regular, mas a da Fig. 4.29 (b) não é). Por conveniência, iremos considerar uma superfície compacta como uma região regular, cuja fronteira é o conjunto vazio.

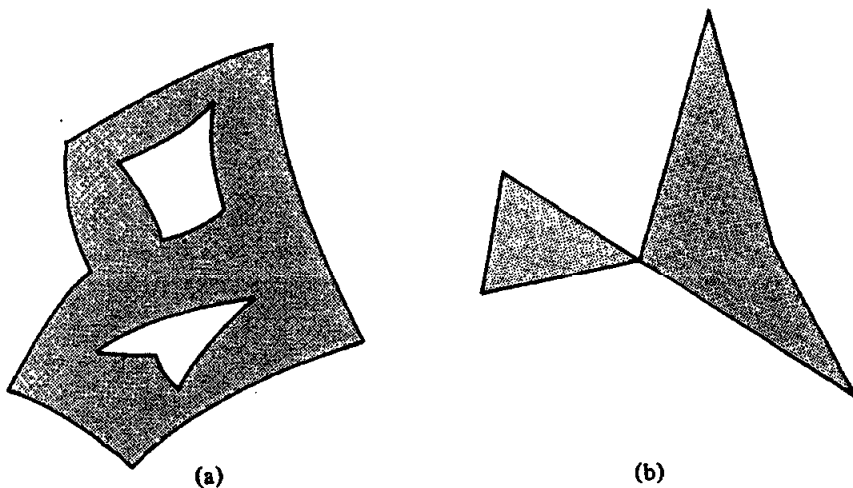



Figura 4-29

Dizemos que uma região simples que tem apenas três vértices com ângulos externos $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$ é um *triângulo*.

Uma triangulação de uma região regular $R \subset S$ é uma família finita $\mathcal{T}$ de triângulos T_i, $i = 1, \ldots, n$, tal que

1. $\cup_{i=1}^{n} T_i = R$.

2. Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou um vértice comum de T_i e T_j.

Dada uma triangulação $\mathcal{T}$ de uma região regular $R \subset S$ de uma superfície S, denotaremos por F o número de triângulos (faces), por E o número de lados (arestas),e por V o número de vértices da triangulação. O número

$$F - E + V = \chi$$

é chamado *característica de Euler-Poincaré* da triangulação.

As proposições abaixo serão apresentadas sem demonstrações. Uma exposição destes fatos pode ser encontrada, por exemplo, em L.Ahlfors e L. Sario, *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, N.J., 1960, Cap. 1.

Proposição 1. *Toda região regular de uma superfície regular admite uma triangulaçâo.*

Proposição 2. *Seja S uma superfície orientada e $\{\mathbf{x}_\alpha\}$, $\alpha \in A$, uma família de parametrizações compatíveis com a orientação de S. Seja $R \subset S$ uma região regular de S. Então existe uma triangulação $\mathcal{T}$ de R tal que todo triângulo $T \in \mathcal{T}$ está contido em alguma vizinhança coordenada da família $\{\mathbf{x}_\alpha\}$. Além disto, se a fronteira de todo triângulo de $\mathcal{T}$ for orientada positivamente, triângulos adjacentes determinam orientações opostas na aresta comum a eles* (Fig. 4.30).

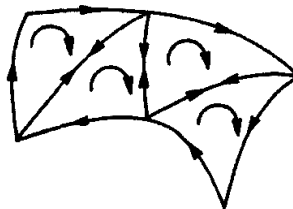



Figura 4-30

Proposição 3. *Se $R \subset S$ é uma região regular de uma superfície S, a característica de Euler-Poincaré não depende da triangulaçao de R. Convém, portanto, denotá-la por $\chi(R)$.*

A proposição anterior mostra que a característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico de uma região regular R. Tendo em vista as aplicações do teorema de Gauss-Bonnet, mencionaremos o importante fato de que este invariante possibilita uma classificação topológica das superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$.

Deve-se observar que um cálculo direto mostra que a característica de Euler-Poincaré da esfera é 2, a do toro (esfera com uma "alça"; ver Fig.4.31) é zero, a do bi-toro (esfera com duas alças) é -2, e, em geral a de um $n-$toro (esfera com n alças) é -2(n-1).

A proposição seguinte mostra que esta é a "lista topológica" de todas as superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$.

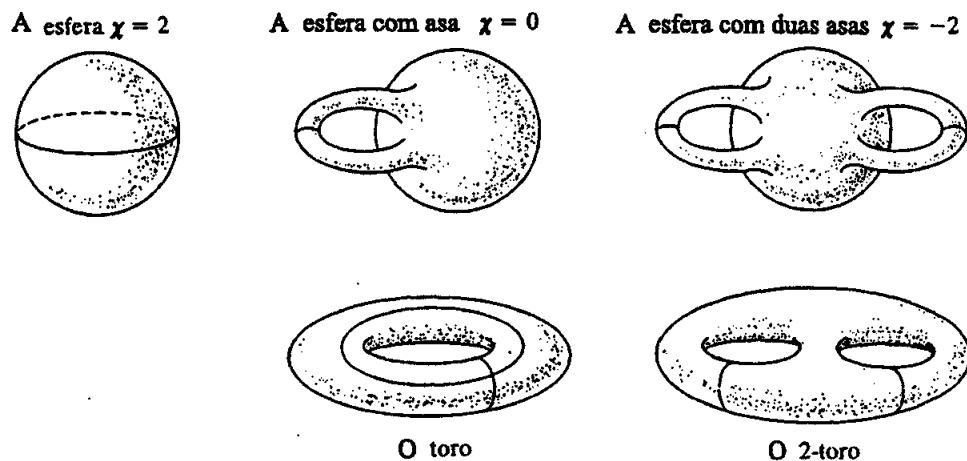



Figura 4-31

Proposição 4. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfíce compacta e conexa; então um dos valores $2, 0, -2, \dots, -2n, \dots$ é assumido pela característica de Euler-Poincaré $\chi(S)$. Além disto, se $S' \subset \mathbb{R}^3$ é uma outra superfície compacta e conexa e $\chi(S) = \chi(S')$, então S é homeomorfa a S'.*

Em outras palavras, toda superfície compacta e conexa $S \subset \mathbb{R}^3$ é homeomorfa a uma esfera com um número g de alças. O número

$$g = \frac{2 - \chi(S)}{2}$$

é chamado o *gênero* de S.

Finalmente, seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada S e seja $\mathcal{T}$ uma triangulação de R tal que todo triângulo de $T_j \in \mathcal{T}$, $j = 1, \ldots k$ esteja contido em uma vizinhança coordenada $\mathbf{x}_j(U_j)$ de uma família de parametrizações $\{\mathbf{x}_\alpha\}$, $\alpha \in A$, compatíveis com a orientação de S. Seja f uma função diferenciável em S. A proposição seguinte mostra que faz sentido falar sobre a integral de f sobre a região R.

Proposição 5. *Com a notação acima, a soma*

$$\sum_{j=1}^{k} \iint_{\mathbf{x}_j^{-1}(T_j)} f(u_j, v_j)\sqrt{E_j G_j - F_j^2}\, du_j\, dv_j$$

não depende da triangulação $\mathcal{T}$ *nem da família* $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ *de parametrizações de* S.

Esta soma tem, portanto, um significado geométrico e é chamada a integral de f sobre a região regular R. É comum denotá-la por

$$\iint_R f\, d\sigma.$$

Estamos agora preparados para enunciar e demonstrar o

Teorema de Gauss-Bonnet Global. *Seja* $R \subset S$ *uma região regular de uma superfície orientada e sejam* $C_1, \ldots, C_n$ *as curvas fechadas, simples e regulares por partes que formam a fronteira* ∂R *de* R. *Suponha que cada* C_i *é orientada positivamente e sejam* $\theta_1, \cdots, \theta_p$ *o conjunto de ângulos externos das curvas* $C_1, \ldots, C_n$. *Então*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g(s)\, ds + \iint_R K\, d\sigma + \sum_{l=1}^{p} \theta_l = 2\pi\chi(R),$$

onde s *denota o comprimento de arco de* C_i, *e a integral sobre* C_i *significa a soma das integrais em todos os arcos regulares de* C_i.

Demonstração. Considere uma triangulação $\mathcal{T}$ da região R tal que qualquer triângulo T_j esteja contido em uma vizinhança coordenada da família

de parametrizações ortogonais compatíveis com a orientação de S. Tal triangulação existe pela Prop. 2. Além disto, se a fronteira de cada triângulo de $\mathcal{T}$ for orientada positivamente, obtemos orientações opostas nas arestas que são comuns a triângulos adjacentes (Fig. 4.32).

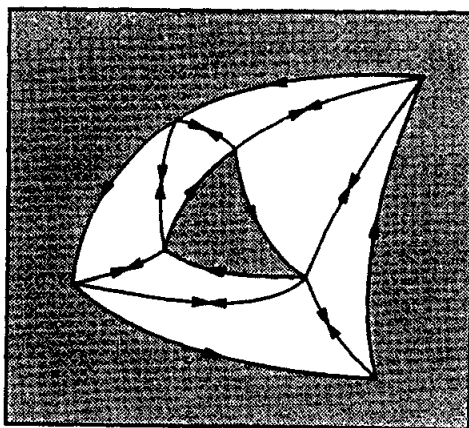



Figura 4-32

Aplicando o teorema de Gauss-Bonnet local a cada triângulo e somando os resultados obtemos, utilizando a Prop. 5 e o fato de que cada aresta "interior" é contada duas vezes com orientações opostas,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g(s)\, ds + \iint_R K\, d\sigma + \sum_{j,k=1}^{F,\,3} \theta_{jk} = 2\pi F,$$

onde F denota o número de triângulos de $\mathcal{T}$ e $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$ são os ângulos externos do triângulo T_j.

Iremos agora introduzir os ângulos *internos* de um triângulo T_j, dados por $\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$. Assim,

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = \sum_{j,k} \pi - \sum_{j,k} \varphi_{jk} = 3\pi F - \sum_{j,k} \varphi_{jk}.$$

Utilizaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} E_e &= \text{número de arestas externas de } \mathcal{T}, \\ E_i &= \text{número de arestas internas de } \mathcal{T}, \\ V_e &= \text{número de vértices externos de } \mathcal{T}, \\ V_i &= \text{número de vértices externos de } \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Como as curvas C_i são fechadas, $E_e = V_e$. Além disto, é fácil mostrar por indução que

$$3F = 2E_i + E_e$$

e, portanto, que

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j,k} \varphi_{jk}.$$

Observamos agora que os vértices externos podem ser vértices de alguma curva C_i ou vértices introduzidos pela triangulação. Colocamos $V_e = V_{ec} + V_{et}$, onde V_{ec} é o número de vértices das curvas C_i e V_{et} é o número de vértices externos da triangulação que não são vértices de alguma das curvas C_i. Como a soma dos ângulos em torno de cada vértice interno é 2π, obtemos

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_{l} (\pi - \theta_l).$$

Somando e subtraindo πE_e na expressão acima e levando em conta que $E_e = V_e$, concluímos que

$$\begin{aligned}\sum_{j,k} \theta_{jk} &= 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum_{l} \theta_l \\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_{l} \theta_l.\end{aligned}$$

Juntando estes resultados, obtemos finalmente

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g(s)\, ds + \iint_R K\, d\sigma + \sum_{l=1}^{p} \theta_l = 2\pi(F - E + V) = 2\pi\chi(R). \quad \textbf{Q.E.D.}$$

Como a característica de Euler-Poincaré de uma região simples é evidentemente igual a 1, obtemos (cf. Observação 1)

Corolário 1. *Se R é uma região simples de S, então*

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\, ds + \iint_R K\, d\sigma + \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 2\pi.$$

Levando em conta o fato de que uma superfície compacta pode ser considerada uma região com fronteira vazia, obtemos

Corolário 2. *Seja S uma superfície compacta e orientável; então*

$$\iint_S K\, d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

O corolário 2 é realmente notável. Basta pensarmos em todas as formas possíveis de uma superfície homeomorfa a uma esfera para vermos como é surpreendente que, em cada caso, a função curvatura se distribui de tal maneira que a "curvatura total", i.e., $\iint K\, d\sigma$, é a mesma para todos os casos.

Iremos apresentar abaixo algumas aplicações do teorema de Gauss-Bonnet. Para estas aplicações (e para os exercícios no final desta seção), convém supor um fato básico da topologia do plano (o teorema da curva de Jordan) que utilizaremos na seguinte forma: *Toda curva fechada regular por partes do plano (logo sem auto-interseções) é a fronteira de uma região simples.*

1. *Uma superfície compacta com curvatura positiva é homeomorfa a uma esfera.*

A característica de Euler-Poincaré de uma tal superfície é positiva e, pela Proposição 4, a esfera é a única superfíce compacta de $\mathbb{R}^3$ que satisfaz esta condição.

2. *Seja S uma superfície orientável com curvatura não-positiva. Então, duas geodésicas γ_1 e γ_2 que partem de um ponto $p \in S$ não podem se encontrar novamente em um ponto $q \in S$ de tal forma que os traços de γ_1 e γ_2 constituam a fronteira de uma região simples R de S.*

Suponha que o contrário seja verdade. Pelo teorema de Gauss-Bonnet (R é simples)

$$\iint_R K\, d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi,$$

onde θ_1 e θ_2 são os ângulos externos da região R. Como as geodésicas γ_1 e γ_2 não podem ser tangentes uma a outra, temos $\theta_i < \pi$, $i = 1, 2$. Por outro lado, $K \leq 0$, donde a contradição.

Quando $\theta_1 = \theta_2 = 0$, os traços das geodésicas γ_1 e γ_2 constituem uma geodésica simples e fechada de S (isto é, uma curva regular fechada que é uma geodésica). Segue-se que sobre uma superfície de curvatura negativa ou nula, não existe uma geodésica simples e fechada que seja fronteira de uma região simples de S.

3. *Seja S uma superfície homeomorfa a um cilindro com curvatura Gaussana $K < 0$. Então, S tem no máximo uma geodésica fechada simples.*

Suponha que S contenha uma geodésica simples e fechada Γ. Pela aplicação 2, e como existe um homeomorfismo φ entre uma região de S limitada por Γ e um plano P menos um ponto $q \in P$, $\varphi(\Gamma)$ é a fronteira de uma região simples de P contendo q.

Suponha agora que S contenha outra geodésica simples e fechada Γ'. Afirmamos que Γ' não intersecta Γ. Caso contrário, os arcos $\varphi(\Gamma)$ e $\varphi(\Gamma')$ entre dois pontos "consecutivos" de interseção, r_1 e r_2, seriam a fronteira de uma região simples, contradizendo a aplicação 2 (ver Fig. 4.33). Pelo argumento acima, $\varphi(\Gamma')$ é novamente a fronteira de uma região simples de P contendo q. Seja R a região anular limitada por Γ e Γ' cujo interior é homeomorfo a um cilindro. Assim, $\chi(R) = 0$. Por outro lado, pelo teorema de Gauss-Bonnet,

$$\iint_{\varphi^{-1}(R)} K \, d\sigma = 2\pi\chi(R) = 0,$$

o que é uma contradição, já que $K < 0$.

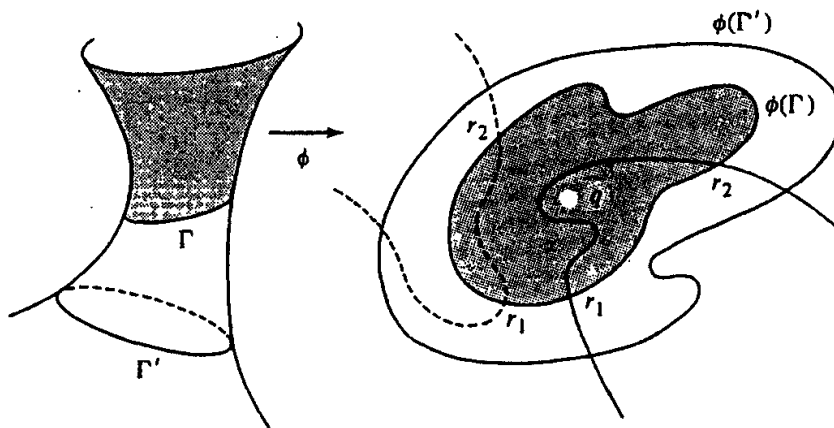



Figura 4-33

4. *Se existem duas geodésicas simples e fechadas Γ_1 e Γ_2 em uma superfície S compacta, conexa e com curvatura positiva, então Γ_1 e Γ_2 se intersectam.*

Pela aplicação 1, S é homeomorfa a uma esfera. Se Γ_1 e Γ_2 não se intersectam, então o conjunto formado por Γ_1 e Γ_2 é a fronteira de uma região R, cuja característica de Euler-Poincaré é $\chi(R) = 0$. Pelo teorema de Gauss-Bonnet,

$$\iint_R K \, d\sigma = 0,$$

o que é uma contradição, já que $K > 0$.

5. Iremos provar o seguinte resultado, devido a Jacobi: *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular e fechada, com curvatura diferente de zero por toda a parte. Suponha que a curva descrita pelo vetor normal $n(s)$ na esfera unitária S^2 (a indicatriz normal) é simples. Então $n(I)$ divide S^2 em duas regiões com áreas iguais.*

Podemos supor que α é parametrizada pelo comprimento de arco. Denotamos por $\bar{s}$ o comprimento de arco da curva $n = n(s)$ em S^2. A curvatura geodésica $\bar{k}_g$ de $n(s)$ é

$$\bar{k}_g = \langle \ddot{n}, n \wedge \dot{n} \rangle,$$

onde os pontos denotam derivada em relação a $\bar{s}$. Como

$$\begin{aligned} \dot{n} &= \frac{dn}{ds}\frac{ds}{d\bar{s}} = (-kt - \tau b)\frac{ds}{d\bar{s}}, \\ \ddot{n} &= (-kt - \tau b)\frac{d^2 s}{d\bar{s}^2} + (-k't - \tau' b)\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right) - (k^2 + \tau^2) n \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2, \end{aligned}$$

e

$$\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 = \frac{1}{k^2 + \tau^2},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \bar{k}_g &= \langle \ddot{n}, n \wedge \dot{n} \rangle = \frac{ds}{d\bar{s}} \langle (kb - \tau t), \ddot{n} \rangle = \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^3 (-k't - \tau' b) \\ &= -\frac{\tau' k - k' \tau}{k^2 + \tau^2}\frac{ds}{d\bar{s}} = -\frac{d}{ds}\text{arctg}\left(\frac{\tau}{k}\right)\frac{ds}{d\bar{s}}. \end{aligned}$$

Assim, aplicando o teorema de Gauss-Bonnet a uma das regiões R limitadas por $n(I)$ e usando o fato de que $K \equiv 1$, obtemos

$$2\pi = \iint_R K\, d\sigma + \int_{\partial R} \bar{k}_g\, d\bar{s} = \int_R d\sigma = \text{ área de } R.$$

Como a área de S^2 é 4π, temos o resultado afirmado.

6. Seja T um triângulo geodésico (isto é, os lados de T são geodésicas) em uma superfície orientada S. Sejam $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ os ângulos externos de T e $\varphi_1 = \pi - \theta_1$, $\varphi_2 = \pi - \theta_2$, $\varphi_3 = \pi - \theta_3$ os ângulos internos. Pelo teorema de Gauss-Bonnet,

$$\iint_T K\, d\sigma + \sum_{i=1}^{3} \theta_i = 2\pi.$$

Assim,

$$\iint_T K\, d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^{3}(\pi - \varphi_i) = -\pi + \sum_{i=1}^{3} \varphi_i.$$

Segue-se que a soma dos ângulos internos $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i$, de um triângulo geodésico é

1. Igual a π se $K = 0$.
2. Maior do que π se $K > 0$.
3. Menor do que π se $K < 0$.

Além disto, a diferença $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i - \pi$ (o *excesso* de T) é dada precisamente por $\iint_T K\, d\sigma$. Se $K \neq 0$ em T, e a restrição de N a T é injetiva, esta integral é a área da imagem $N(T)$ de T pela aplicação de Gauss $N : S \to S^2$ (cf. Eq. (12), seção 3.3). Esta foi a forma como o próprio Gauss enunciou seu teorema: *O excesso de um triângulo geodésico T é igual a área de sua imagem esférica $N(T)$.*

O fato acima está relacionado com uma controvérsia histórica sobre a possibilidade de provar o quinto axioma de Euclides (o axioma das paralelas), a partir do qual decorre que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo

é igual a π. Considerando as geodésicas como retas, é possível mostrar que as superfícies com curvatura negativa constante constituem um modelo (local) de uma geometria onde valem os axiomas de Euclides, exceto o quinto e o axioma que garante a possibilidade de estender retas indefinidamente. Em verdade, Hilbert mostrou que não existe em $\mathbb{R}^3$ uma superfície com curvatura negativa constante cujas geodésicas possam ser estendidas indefinidamente (a pseudoesfera do Exercício 6, seção 3.3, tem uma aresta circular de pontos singulares). Portanto, as superfícies em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana negativa constante não fornecem um modelo para testar a independência do quinto axioma. No entanto, utilizando a noção de superfície abstrata, é possível contornar esta inconveniência e construir um modelo de geometria onde *todos* os axiomas de Euclides menos o quinto são válidos. Este axioma é, portanto, independente dos demais.

Nas seções 5.10 e 5.11, demonstraremos o resultado de Hilbert citado acima e daremos uma descrição do modelo abstrato de uma geometria não-euclideana.

7. *Campos de vetores sobre superfícies**. Seja v um campo diferenciável de vetores em uma superfície orientada S. Dizemos que $p \in S$ é um *ponto singular* de v se $v(p) = 0$. O ponto singular é *isolado* se existe uma vizinhança V de p em S tal que v não tem pontos singulares em V além de p.

Vamos associar a cada ponto singular isolado p de um campo de vetores v um número inteiro, o índice de v, definido da seguinte maneira. Seja $\mathbf{x} : U \to S$ uma parametrização ortogonal em $p = \mathbf{x}(0,0)$ compatível com a orientação de S, e seja $\alpha : [0,l] \to S$ uma curva parametrizada simples, fechada, regular por partes e orientada positivamente tal que $\alpha([0,l]) \subset \mathbf{x}(U)$ é a fronteira de uma região simples R contendo p como único ponto singular. Seja $v = v(t)$, $t \in [0,l]$, a restrição de v ao longo de α, e seja $\varphi = \varphi(t)$ uma determinação diferenciável do ângulo de $\mathbf{x}_u$ a $v(t)$, dado pelo Lema 1 da seção 4.4 (que pode ser facilmente estendido a curvas regulares por partes). Como α é fechada, existe um inteiro I definido por

$$2\pi I = \phi(l) - \varphi(0) = \int_0^l \frac{d\varphi}{dt}\, dt.$$

I é chamado o *índice de v em p*.

---

* Esta aplicação utiliza o material da seção 3.4. Caso seja omitida, os Exercícios 6-9 desta seção também devem ser omitidos.

Precisamos mostrar que esta definição é independente das escolhas feitas, a primeira delas sendo a parametrização $\mathbf{x}$. Seja $w_0 \in T_{\alpha(0)}S$ e seja $w(t)$ o transporte paralelo de w_0 ao longo de α. Seja $\psi(t)$ uma deteminação diferenciável do ângulo de $\mathbf{x}_u$ a $w(t)$. Então, como vimos na interpretação de K em termos do transporte paralelo (cf. Eq. (2)),

$$\psi(l) - \psi(0) = \iint_R K \, d\sigma.$$

Subtraindo as relações acima, obtemos

$$\iint_T K \, d\sigma - 2\pi I = (\psi - \varphi)(l) - (\psi - \varphi)(0) = \Delta(\psi - \varphi) \qquad (3)$$

Como $\psi - \varphi$ não depende de $\mathbf{x}_u$, o índice I independe da parametrização $\mathbf{x}$.

A prova de que o índice não depende da escolha de α é mais técnica (embora intuitiva) e faremos apenas um esboço.

Sejam α_0 e α_1 duas curvas como na definição do índice. Vamos mostrar que o índice de v é o mesmo para ambas as curvas. Suponhamos primeiro que os traços de α_0 e α_1 não se intersectam. Então existe um homeomorfismo de uma região limitada pelos traços de α_0 e α_1 sobre uma região do plano limitada por dois círculos concêntricos C_0 e C_1 (um anel). Como podemos obter uma família de círculos concêntricos C_t que dependem continuamente de t e deformam C_0 em C_1, obtemos uma família de curvas α_t, que dependem continuamente de t e deformam α_0 em α_1 (Fig. 4.34). Denote por I_t o índice de v calculado com a curva α_t. Como o índice é uma integral, I_t depende continuamente de t, $t \in [0, 1]$. Sendo um inteiro, I é constante ao longo da deformação, e $I_0 = I_1$, como desejado. Se os traços de α_0 e α_1 se intersectam, escolhemos um curva suficientemente pequena cujo traço não tem interseção com ambas α_0 e α_1 e aplicamos o resultado anterior.

Deve-se observar que a definição de índice também pode ser aplicada quando p não é um ponto singular de v. Resulta, no entanto, que neste caso o índice é nulo. Isto decorre do fato de que, já que I não depende de $\mathbf{x}_u$, podemos $\mathbf{x}_u$ como sendo o próprio v; assim, $\varphi(t) \equiv 0$.

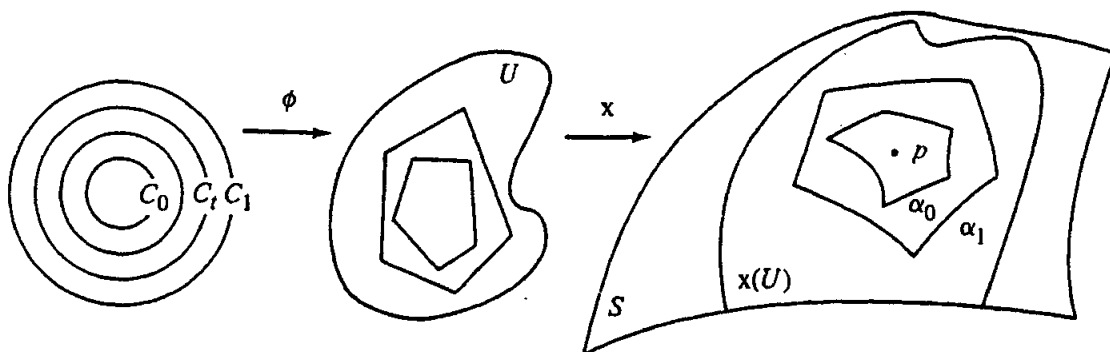



Figura 4-34

Na Fig. 4.35 mostramos alguns exemplos de índices de campos de vetores no plano xy que têm $(0, 0)$ como ponto singular. As curvas que aparecem nos desenhos são as trajetórias dos campos de vetores.

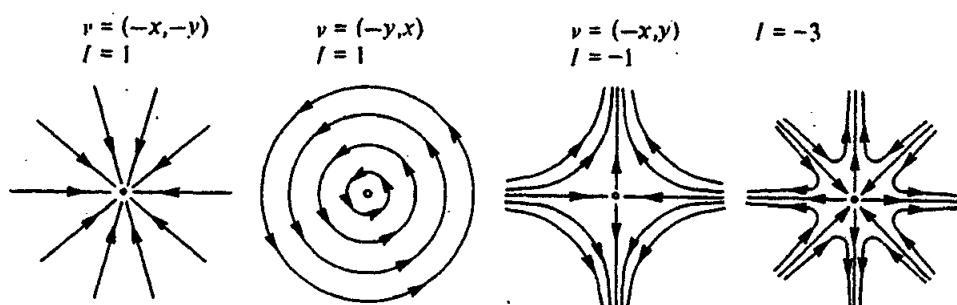



Figura 4-35

Sejam agora $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta e orientada e v um campo de vetores diferenciável tendo apenas singularidades isoladas. Observamos que temos um número finito delas. Caso contrário, por compacidade (cf. seção 2.7, Propriedade 1), elas teriam um ponto de acumulação que seria uma singularidade não isolada. Seja $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ uma família de parametrizações ortogonais compatíveis com a orientação de S. Seja $\mathcal{T}$ uma triangulação de S tal que

1. Todo triângulo $T \in \mathcal{T}$ está contido em alguma vizinhança coordenada da família $\{\mathbf{x}_\alpha\}$.

2. Todo triângulo $T \in \mathcal{T}$ contém no máximo um ponto singular.

3. A fronteira de qualquer $T \in \mathcal{T}$ não contém pontos singulares e está orientada positivamente.

Aplicando a Eq. (3) a todos os triângulos $T \in \mathcal{T}$, somando os resultados, e levando em conta que a aresta de cada $T \in \mathcal{T}$ aparece duas vezes com orientações opostas, obtemos

$$\iint_S K \, d\sigma - 2\pi \sum_{i=1}^{k} I_i = 0,$$

onde I_i é o índice do ponto singular p_i, $i = 1, \dots, k$. Juntando isto ao teorema de Gauss-Bonnet (cf. corolário 2), chegamos finalmente a

$$\sum I_i = \frac{1}{2\pi} \iint_S K \, d\sigma = \chi(S).$$

Assim, acabamos de mostrar o seguinte:

Teorema de Poincaré. *A soma dos índices de um campo de vetores diferenciável v com singularidades isoladas em uma superfície compacta S é igual a característica de Euler-Poincaré de S.*

Este resultado é notável. ele implica que $\sum I_i$ não depende de v mas apenas da topologia de S. Por exemplo, em qualquer superfície homeomorfa a uma esfera, todos os campos vetoriais com singularidades isoladas devem ter a soma de seus índices igual a 2. Em particular, nenhuma destas superfícies pode ter um campo de vetores diferenciável sem pontos singulares; em outras palavras, uma esfera coberta de pelos não pode ser penteada.

Exercícios

1. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta conexa e orientável que não é homeomorfa a uma esfera. Prove que que existem pontos de S onde a curvatura Gaussiana é positiva, negativa e zero.

2. Seja T um toro de revolução. Descreva a imagem da aplicação de Gauss de T e mostre, sem utilizar o teorema de Gauss-Bonnet, que

$$\iint_T K \, d\sigma = 0.$$

Calcule a característica de Euler-Poincaré de T e verifique o resultado acima com o teorema de Gauss-Bonnet.

3. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular homeomorfa a uma esfera. Seja $\Gamma \subset S$ uma geodésica simples e fechada em S, e sejam A e B as regiões de S que têm Γ como fronteira. Seja $N : S \to S^2$ a aplicação de Gauss de S. Prove que $N(A)$ e $N(B)$ têm a mesma área.

4. Calcule a característica de Euler-Poincaré de

a. Um elipsóide.

***b.** A superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^{10} + z^6 = 1\}$.

5. Seja C um paralelo de colatitude φ em uma esfera unitária orientada S^2, e seja w_0 um vetor unitário tangente a C em um ponto $p \in C$ (cf. Exemplo 1, seção 4.4). Tome o transporte paralelo de w_0 ao longo de C e mostre que a sua posição, após uma volta completa, faz um ângulo $\Delta\theta = 2\pi(1 - \cos\varphi)$ com a posição inicial w_0. Verifique que

$$\lim_{A \to 0} \frac{\Delta\theta}{A} = 1 = \text{ curvatura de } S^2,$$

onde A é a área da região R de S^2 limitada por C.

6. Mostre que $(0, 0)$ é um ponto singular isolado e calcule o índice em $(0, 0)$ dos seguintes campos de vetores no plano:

***a.** $v = (x, y)$.

b. $v = (-x, y)$.

c. $v = (x, -y)$.

***d.** $v = (x^2 - y^2, -2xy)$.

e. $v = (x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y)$.

7. O índice de um ponto singular pode ser zero? No caso afirmativo, dê um exemplo.

8. Mostre que uma superfície compacta e orientável $S \subset \mathbb{R}^3$ admite um campo diferenciável de vetores sem pontos singulares se e somente se S é homeomorfa a um toro.

9. Seja C uma curva regular simples e fechada sobre a esfera S^2. Seja v um campo de vetores diferenciável em S^2 com singularidades isoladas tal que as trajetórias de v nunca são tangentes a C. Prove que cada uma das regiões determinadas por C contém ao menos um ponto singular de v.

4.6 Aplicação Exponencial. Coordenadas Polares Geodésicas

Nesta seção vamos introduzir alguns sistemas de coordenadas especiais tendo em vista suas aplicações geométricas. A maneira natural de introduzir tais coordenadas é através da aplicação exponencial, que agora passamos a descrever.

Como aprendemos na seção 4.4, Prop. 5, dado um ponto p de uma superfície regular S e um vetor não-nulo $v \in T_pS$ existe uma única geodésica parametrizada $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Para indicar a dependência desta geodésica em relação ao vetor v, convém denotá-la por $\gamma(t, v) = \gamma$.

Lema 1. *Se a geodésica $\gamma(t, v)$ é definida para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, então a geodésica $\gamma(t, \lambda v)$, $\lambda \in R$, $\lambda > 0$, é definida para $t \in (-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda)$, e $\gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v)$.*

Demonstração. Seja $\alpha : (-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda) \to S$ a curva parametrizada definida por $\alpha(t) = \gamma(\lambda t)$. Então $\alpha(0) = \gamma(0)$, $\alpha'(0) = \lambda\gamma'(0)$, e, pela linearidade de D (cf. Eq. (1), seção 4.4),

$$D_{\alpha'(t)}\alpha'(t) = \lambda^2 D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0.$$

Segue-se que α é a geodésica com condições iniciais $\gamma(0)$, $\lambda\gamma'(0)$, e por unicidade

$$\alpha(t) = \gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v). \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Intuitivamente, o Lema 1 significa que como a velocidade (em módulo) de uma geodésica é constante, podemos percorrer o seu traço em um tempo prescrito ajustando a velocidade de maneira apropriada.

Vamos agora introduzir a seguinte notação. Se $v \in T_pS$, $v \neq 0$, é tal que $\gamma(|v|, v/|v|) = \gamma(1, v)$ está definido, escrevemos

$$\exp_p(v) = \gamma(1, v) \qquad \text{e} \qquad \exp_p(0) = p.$$

Geometricamente, a construção corresponde a percorrer (se possível) um comprimento igual a $|v|$ ao longo da geodésica passando por p na direção de v; o ponto assim obtido é denotado por $\exp_p(v)$ (Fig. 4.36).

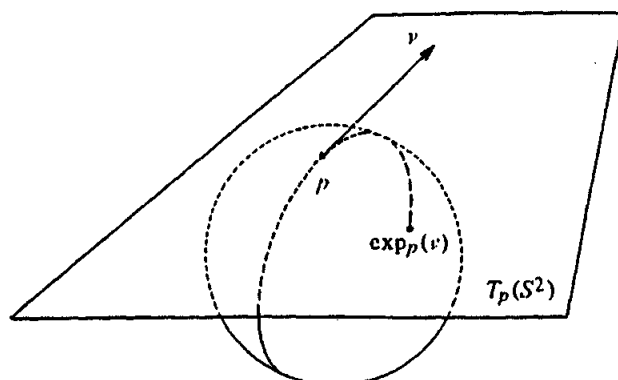



Figura 4-36

Por exemplo, $\exp_p(v)$ está definida sobre a esfera unitária S^2 para todo $v \in T_pS^2$. Os pontos dos círculos com raios $\pi, 3\pi, \dots, (2n+1)\pi$ são aplicados sobre o ponto q, o antípoda de p. Os pontos dos círculos de raio $2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi$ são aplicados no próprio p.

Por outro lado, em uma superfície regular C formada pelo cone de uma folha menos o vértice, $\exp_p(v)$ não está definida para um vetor $v \in T_pC$ na direção de um meridiano que conecta p ao vértice, quando $|v| \geq d$ e d é a distância de p ao vértice (Fig. 4.37).

Se, no exemplo da esfera, removemos de S^2 o antípoda de p, então $\exp_p$ fica definida apenas no interior de um disco de T_pS com raio π e centro na origem.

O fato fundamental é que $\exp_p$ sempre está definida e é diferenciável em alguma vizinhança da origem de T_pS .

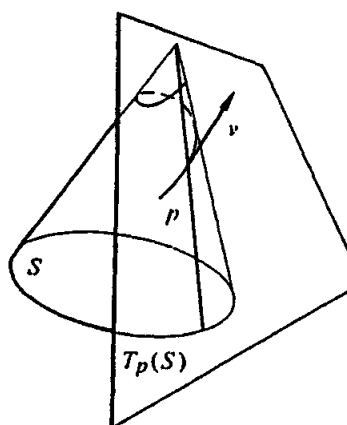



Figura 4-37

Proposição 1. *Dado $p \in S$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_p$ é definida e diferenciável no interior de um disco de raio ε de T_pS, com centro na origem.*

Demonstração. É claro que para cada direção de T_pS é possível, pelo Lema 1, tomar v suficientemente pequeno para que o intervalo de definição de $\gamma(t,v)$ contenha 1, e assim $\gamma(1,v) = \exp_p(v)$ está definida. Para mostrar que esta redução pode ser feita de maneira uniforme em todas as direções, precisamos do teorema da dependência de uma geodésica em relação às condições iniciais (ver seção 4.7, Teorema 1) na seguinte forma: *Dado $p \in S$ existem números $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ e uma aplicação diferenciável*

$$\gamma : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times B_{\varepsilon_1} \to S$$

tais que, para cada $v \in B_{\varepsilon_1}$, $v \neq 0$, $t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$, a curva $\gamma(t,v)$ é a geodésica de S com $\gamma(0,v) = p$, $\gamma'(0,v) = v$ e para $v = 0$, $\gamma(t,0) = p$.

A partir deste enunciado e do Lema 1, segue-se a nossa afirmação. De fato, como $\gamma(t,v)$ está definida para $|t| < \varepsilon_2$, $|v| < \varepsilon_1$, obtemos, fazendo $\lambda = \varepsilon_2/2$ no Lema 1, que $\gamma(t, (\varepsilon_2/2)v)$ está definida para $|t| < 2$, $|v| < \varepsilon_1$. Portanto, tomando um disco $B_\varepsilon \subset T_pS$, com centro na origem e de raio $\varepsilon < \varepsilon_1\varepsilon_2/2$, temos que $\gamma(1,w) = \exp_p w$, $w \in B_\varepsilon$, está definida. A diferenciabilidade de $\exp_p$ em B_ε segue-se da diferenciabilidade de γ.

Q.E.D.

Um complemento importante deste resultado é o seguinte:

Proposição 2. $\exp_p : B_\varepsilon \subset T_pS \to S$ *é um difeomorfismo em uma vizinhança $U \subset B_\varepsilon$ da origem O de T_pS.*

Demonstração. Vamos mostrar que a diferencial $d(\exp_p)$ é não-singular em $O \in T_pS$. Para isto, identificamos o espaço de vetores tangentes a T_pS em O com o próprio T_pS. Considere a curva $\alpha(t) = tv$, $v \in T_pS$. É obvio que $\alpha(0) = 0$ e $\alpha'(0) = v$. A curva $(\exp_p \circ \alpha)(t) = \exp_p(tv)$ tem, em $t = 0$, o vetor tangente

$$\frac{d}{dt}\exp_p(tv)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t,v))\Big|_{t=0} = v.$$

Segue-se que

$$d(\exp_p)_0(v) = v,$$

o que mostra que $d(\exp_p)$ é não-singular em O. Aplicando o teorema da função inversa (cf. Prop. 3, seção 2.4), completamos a demonstração da proposição.

Q.E.D.

Convém chamar $V \subset S$ uma *vizinhança normal* de $p \in S$ se V é a imagem $V = \exp_p(U)$ de uma vizinhança U da origem de T_pS restrita a qual $\exp_p$ é um difeomorfismo.

Como a aplicação exponencial em $p \in S$ é um difeomorfismo em U, ela pode ser usada para introduzir coordenadas em V. Entre os sistemas de coordenadas introduzidos deste modo, os mais comuns são:

1. As *coordenadas normais* que correspondem a um sistema de coordenadas retangulares no plano tangente T_pS.

2. As *coordenadas polares geodésicas* que correspondem a coordenadas polares no plano tangente T_pS. (Fig. 4.38).

Estudaremos primeiro as coordenadas normais, que são obtidas através da escolha no plano T_pS, $p \in S$, de dois vetores unitários ortogonais e_1 e e_2. Como $\exp_p : U \to V \subset S$ é um difeomorfismo, ela satisfaz as condições para uma parametrização em p. Se $q \in V$, então $q = \exp_p(w)$, onde $w = ue_1 + ve_2 \in U$, e dizemos que q tem coordenadas (u, v). É claro que as coordenadas normais assim obtidas dependem da escolha de e_1, e_2.

Em um sistema de coordenadas normais centrado em p, as geodésicas que passam por p são imagens pela $\exp_p$ de retas $u = at$, $v = bt$ que passam pela origem de T_pS. Observe também que em p os coeficientes da primeira forma fundamental em um tal sistema são dados por $E(p) = G(p) = 1$, $F(p) = 0$.

Agora passamos às coordenadas polares geodésicas. Escolha no plano T_pS, $p \in S$, um sistema de coordenadas polares (ρ, θ), onde ρ é o raio polar e θ, $0 < \theta < 2\pi$, o ângulo polar, cujo pólo é a origem O de T_pS. Observe que as coordenadas polares no plano não são definidas na semi-reta fechada l que corresponde a $\theta = 0$. Façamos $\exp_p(l) = L$. Como $\exp_p : U - l \to V - L$ ainda é um difeomorfismo, podemos parametrizar os pontos de $V - L$ pelas coordenadas (ρ, θ) que são chamadas coordenadas polares geodésicas.

Vamos utilizar a seguinte terminologia. As imagens por $\exp_p : U \to V$ de círculos em U centrados em O serão chamadas de *círculos geodésicos* de V, e as imagens por $\exp_p$ de retas passando por O serão chamadas de *geodésicas radiais* de V. Em $V - L$ estas são as curvas $\rho =$ const. e $\theta =$ const. , respectivamente.

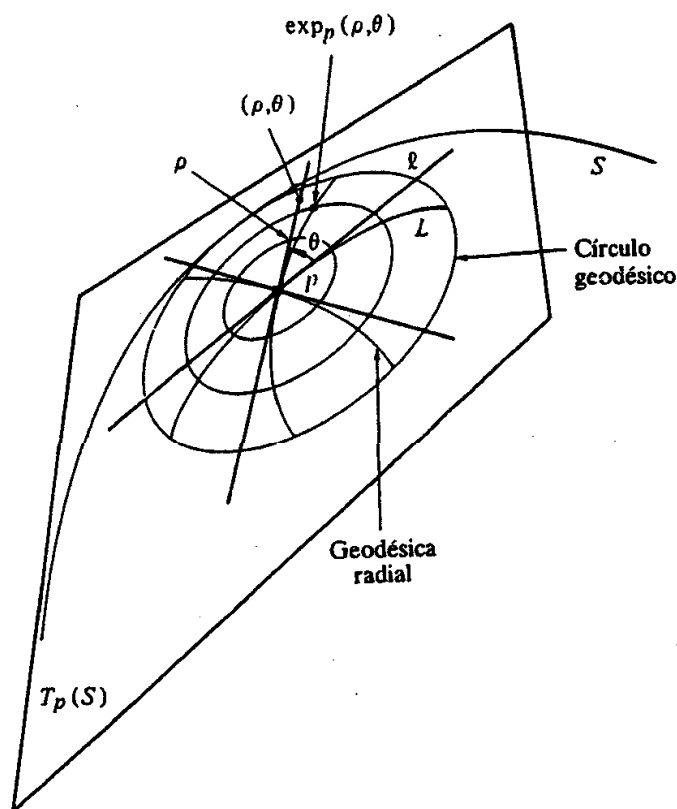



Figura 4-38. *Coordenadas polares.*

Vamos agora determinar os coeficientes da primeira forma fundamental em um sistema de coordenadas polares geodésicas.

Proposição 3. *Seja* $\mathbf{x} : U - l \to V - L$ *um sistema de coordenadas polares geodésicas* (ρ, θ). *Então os coeficientes* $E = E(\rho,\theta)$, $F = F(\rho,\theta)$ *e* $G = G(\rho,\theta)$ *da primeira forma fundamental satisfazem as condições*

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad \lim_{\rho\to 0} G = 0, \qquad \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = 1.$$

Demonstração. Pela definição da aplicação exponencial, ρ mede o comprimento de arco ao longo da curva $\theta =$ const.. Segue-se imediatamente que $E = 1$.

Por outro lado, como $F = \langle \partial\mathbf{x}/\partial\rho, \partial\mathbf{x}/\partial\theta\rangle$, temos

$$F_\rho = \langle \frac{D}{\partial\rho}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\rho}, \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\theta}\rangle + \langle \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\rho}, \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\theta}\rangle.$$

Como $\theta =$ const. é uma geodésica parametrizada por ρ, $D/\partial\rho(\partial\mathbf{x}/\partial\rho) = 0$. Logo,

$$F_\rho = \langle \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\rho}, \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\theta}\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\langle \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\rho}, \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\rho}\rangle = 0,$$

donde $F(\rho,\theta)$ não depende de ρ.

Para cada $q \in V$, denotaremos por $\alpha(\sigma)$ o círculo geodésico que passa por q, onde $\sigma \in [0, 2\pi]$ (se $q = p$, $\alpha(\sigma)$ é a curva constante $\alpha(\sigma) = p$). Denotaremos por $\gamma(s)$, onde s é o comprimento de arco de γ, a geodésica radial que passa por q. Com esta notação podemos escrever

$$F(\rho,\theta) = \left\langle \frac{d\alpha}{d\sigma}, \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle.$$

O coeficiente $F(\rho,\theta)$ não está definido em p. No entanto, se fixarmos a geodésica radial $\theta =$ const., o segundo membro da equação acima está definido para qualquer ponto desta geodésica. Como em p, $\alpha(\sigma) = p$, isto é, $d\alpha/d\sigma = 0$, obtemos

$$\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = \lim_{\rho\to 0} \left\langle \frac{d\alpha}{d\sigma}, \frac{d\gamma}{ds} \right\rangle = 0.$$

Junto com o fato de que F não depende de ρ, isto implica que $F = 0$.

Para provar a última afirmação da proposição, escolhemos um sistema de coordenadas normais $(\bar{u}, \bar{v})$ em p de tal forma que a mudança de coordenadas é dada por

$$\bar{u} = \rho\cos\theta, \qquad \bar{v} = \rho \operatorname{sen}\theta, \qquad \rho \neq 0, \qquad 0 < \theta < 2\pi.$$

Lembrando que

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(\rho,\theta)},$$

onde $\partial(\bar{u},\bar{v})/\partial(\rho,\theta)$ é o Jacobiano da mudança de coordenadas e $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ são os coeficientes da primeira forma fundamental nas coordenadas normais $(\bar{u}, \bar{v})$, temos

$$\sqrt{G} = \rho\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}, \qquad \rho \neq 0 \tag{1}$$

Como em p, $\bar{E} = \bar{G} = 1$ e $\bar{F} = 0$ (as coordenadas normais são definidas em p), concluímos que

$$\lim_{\rho\to 0} \sqrt{G} = 0, \qquad \lim_{\rho\to 0} (\sqrt{G})_\rho = 1,$$

finalizando assim a demonstração da proposição.

Q.E.D.

Observação 1. O significado geométrico do fato de que $F = 0$ é que em uma vizinhança normal a família de círculos geodésicos é ortogonal à família de geodésicas radiais. Tal fato é conhecido como o *lema de Gauss*.

Apresentaremos agora algumas aplicações geométricas das coordenadas polares geodésicas.

Primeiro, vamos estudar superfícies com curvatura Gaussiana constante. Como em um sistema polar $E = 1$ e $F = 0$, a curvatura Gaussiana K pode ser escrita

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}.$$

Esta expressão pode ser considerada como uma equação diferencial a ser satisfeita por $\sqrt{G}(\rho, \theta)$ se queremos que a superfície tenha (na vizinhança coordenada em questão) curvatura $K(\rho, \theta)$. Se K é constante, a expressão acima, ou de forma equivalente,

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} + K\sqrt{G} = 0, \tag{2}$$

é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes.

Vamos provar o

Teorema (Minding) *Quaisquer duas superfícies com a mesma curvatura Gaussiana constante são localmente isométricas. Mais precisamente, sejam* S_1, S_2 *duas superfícies regulares com a mesma curvatura constante* K. *Escolha pontos* $p_1 \in S_1$, $p_2 \in S_2$, *e bases ortonormais* $\{e_1, e_2\} \subset T_{p_1}S_1$, $\{f_1, f_2\} \subset T_{p_2}S_2$. *Então existem vizinhanças* V_1 *de* p_1 *e* V_2 *de* p_2 *e uma isometria* $\psi : V_1 \to V_2$ *tal que* $\psi(p_1) = p_2$, $d\psi(e_1) = f_1$ *e* $d\psi(e_2) = f_2$.

Demonstração. Vamos primeiro considerar a Eq. (2) e estudar separadamente os casos (1) $K = 0$, (2) $K > 0$ e (3) $K < 0$.

1. Se $K = 0$, $(\sqrt{G})_{\rho\rho} = 0$. Logo, $(\sqrt{G})_\rho = g(\theta)$, onde g é uma função de θ. como

$$\lim_{\rho \to 0} (\sqrt{G})_\rho = 1,$$

concluímos que $(\sqrt{G})_\rho \equiv 1$. Portanto, $\sqrt{G} = \rho + f(\theta)$, onde $f(\theta)$ é uma função de θ. Como

$$f(\theta) = \lim_{\rho \to 0} \sqrt{G} = 0,$$

finalmente temos, neste caso,

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G(\rho, \theta) = \rho^2.$$

2. Se $K > 0$, a solução geral da Eq. (2) é dada por

$$\sqrt{G} = A(\theta)\cos(\sqrt{K}\rho) + B(\theta)\,\mathrm{sen}(\sqrt{K}\rho),$$

onde $A(\theta)$ e $B(\theta)$ são funções de θ. A verificação de que esta expressão é uma solução da Eq. (2) pode ser feita facilmente por derivação.

Como $\lim_{\rho \to 0} \sqrt{G} = 0$, obtemos $A(\theta) = 0$. Assim,

$$(\sqrt{G})_\rho = B(\theta)\sqrt{K}\cos(\sqrt{K}\rho),$$

e como $\lim_{\rho \to 0}(\sqrt{G})_\rho = 1$, concluímos que

$$B(\theta) = \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Portanto, neste caso

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G(\rho, \theta) = \frac{1}{K}\,\mathrm{sen}^2(\sqrt{K}\rho).$$

3. Finalmente, se $K < 0$, a solução geral da Eq. (2) é

$$\sqrt{G} = A(\theta)\cosh(\sqrt{-K}\rho) + B(\theta)\,\mathrm{senh}(\sqrt{-K}\rho).$$

Usando as condições iniciais, verifica-se que neste caso

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G(\rho, \theta) = \frac{1}{-K}\,\mathrm{senh}^2(\sqrt{-K}\rho).$$

Estamos agora preparados para provar o teorema de Minding. SejamV_1 e V_2 vizinhanças normais de p_1 e p_2, respectivemente. Seja φ a isometria linear de $T_{p_1}S_1$ sobre $T_{p_2}S_2$ dada por $\varphi(e_1) = f_1$ e $\varphi(e_2) = f_2$. Tome um sistema de

coordenadas polares (ρ, θ) em $T_{p_1}S_1$ com eixo l e faça $L_1 = \exp_{p_1}(l)$, $L_2 = \exp_{p_2}(\varphi(l))$. Seja $\psi : V_1 \to V_2$ definida por

$$\psi = \exp_{p_2} \circ \varphi \circ \exp_{p_1}^{-1}.$$

Afirmamos que ψ é a isometria desejada.

De fato, a restrição $\bar{\psi}$ de ψ a $V - L_1$ aplica uma vizinhança em coordenadas polares (ρ, θ) centrada em p_1 sobre uma vizinhança em coordenadas polares (ρ, θ) centrada em p_2. Pelo estudo da Eq. (2) feito acima, os coeficientes das primeiras formas fundamentais em pontos correspondentes são iguais. Pela Prop. 1 da seção 4.2, $\bar{\psi}$ é uma isometria. Por continuidade, ψ ainda preserva os produtos internos em pontos de L_1 e assim é uma isometria. É imediato verificar que $d\psi(e_1) = f_1$, $d\psi(e_2) = f_2$, e isto conclui a demonstração.

Q.E.D.

Observação 2. No caso em que K não é constante mas mantém seu sinal, a expressão $\sqrt{G}K = -(\sqrt{G})_{\rho\rho}$ tem um belo significado intuitivo. Considere o comprimento de arco $L(\rho)$ da curva $\rho =$ const. entre duas geodésicas próximas $\theta = \theta_0$, e $\theta = \theta_1$:

$$L(\rho) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{G((\rho, \theta)}\, d\theta.$$

Suponha que $K < 0$. como

$$\lim_{\rho \to 0} (\sqrt{G})_\rho = 1 \qquad \text{e} \qquad (\sqrt{G})_{\rho\rho} = -K\sqrt{G} > 0,$$

a função $L(\rho)$ tem comportamento como na Fig. 4.39 (a). Isto significa que $L(\rho)$ aumenta com ρ; isto é, quando ρ cresce, as geodésicas $\theta = \theta_0$ e $\theta = \theta_1$ afastam-se cada vez mais (é claro que devemos permanecer na vizinhança coordenada em questão).

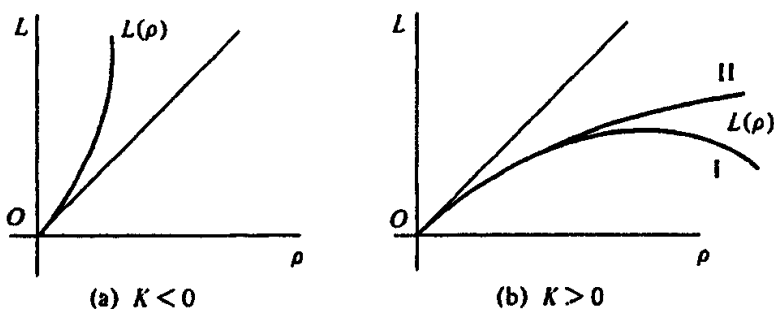



Figura 4-39. *Distribuição de geodésicas próximas em uma vizinhança normal.*

Por outro lado, se $K > 0$, $L(\rho)$ tem comportamento como na Fig. 4.39 (b). As geodésicas $\theta = \theta_0$ e $\theta = \theta_1$ podem (caso 1) ou não (caso 2) se aproximar após um certo valor de ρ, e isto depende da curvatura Gaussiana. Por exemplo, no caso da esfera duas geodésicas partindo de um pólo começam a se aproximar depois do equador (Fig. 4.40).

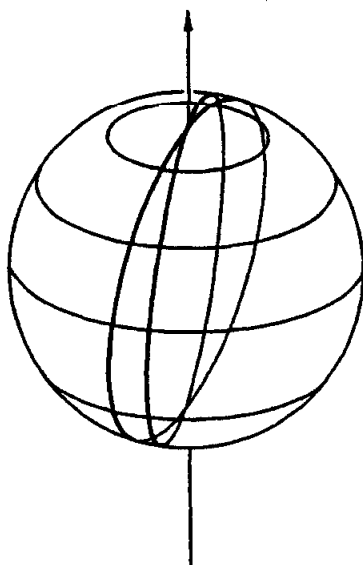



Figura 4-40

No Capítulo 5 (seções 5.4 e 5.5) voltaremos a este assunto e tornaremos esta observação mais precisa.

Uma outra aplicação das coordenadas geodésicas polares consiste de uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana K.

Para obtê-la, observamos primeiro que a expressão de K em coordenadas geodésicas polares (ρ, θ), com centro em $p \in S$, é dada por

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}},$$

e, portanto,

$$\frac{\partial^3(\sqrt{G})}{\partial\rho^3} = -K(\sqrt{G})_\rho - K_\rho(\sqrt{G}).$$

Assim, lembrando que

$$\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G}=0,$$

obtemos

$$-K(p)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial\rho^3}.$$

Por outro lado, definindo $\sqrt{G}$ e suas derivadas sucessivas com relação a ρ em p pelos seus valores limite (cf. Eq. (1)), podemos escrever

$$\begin{aligned}\sqrt{G}(\rho,\theta) &= \sqrt{G}(0,\theta)+\rho(\sqrt{G})_\rho(0,\theta)+\frac{\rho^2}{2!}(\sqrt{G})_{\rho\rho}(0,\theta)\\ &\quad+\frac{\rho^3}{3!}(\sqrt{G})_{\rho\rho\rho}(0,\theta)+R(\rho,\theta),\end{aligned}$$

onde

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{R(\rho,\theta)}{\rho^3}=0,$$

uniformemente em θ. Substituindo na expressão acima os valores já conhecidos, obtemos

$$\sqrt{G}(\rho,\theta)=\rho-\frac{\rho^3}{3!}K(p)+R.$$

Com este valor de $\sqrt{G}$, calculamos o comprimento de arco L de um círculo geodésico de raio $\rho=r$:

$$L=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\sqrt{G}(r,\theta)\,d\theta=2\pi r-\frac{\pi}{3}\mathbb{R}^3K(p)+R_1,$$

onde

$$\lim_{r\to 0}\frac{R_1}{\mathbb{R}^3}=0.$$

Segue-se que

$$K(p)=\lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\frac{2\pi r-L}{\mathbb{R}^3},$$

o que nos dá uma interpretação intrínseca de $K(p)$ em termos do raio r de um círculo geodésico $S_r(p)$ em torno de p e dos comprimentos de arco L e $2\pi r$ de $S_r(p)$ e $\exp_p^{-1}(S_r(p))$, respectivamente.

Uma interpretação de $K(p)$ envolvendo a área da região limitada por $S_r(p)$ é obtida facilmente pelo procedimento acima (ver Exercício 3).

Como última aplicação das coordenadas polares geodésicas, vamos estudar algumas propriedades minimizantes das geodésicas. Uma propriedade fundamental de uma geodésica é o fato de que, localmente, ela minimiza o comprimento de arco. Mais precisamente, temos

Proposição 4. *Seja p um ponto em uma superfície S. Então existe uma vizinhança $W \subset S$ de p tal que se $\gamma : I \to W$ é uma geodésica parametrizada com $\gamma(0) = p$, $\gamma(t_1) = q$, $t_1 \in I$, e $\alpha : [0, t_1] \to S$ é uma curva parametrizada regular ligando p a q, temos*

$$l_\gamma \leq l_\alpha,$$

onde l_α denota o comprimento da curva α. Além disto, se $l_\gamma = l_\alpha$, então o traço de γ coincide com o traço de α entre p e q.

Demonstração. Seja V uma vizinhança normal de p, e seja $\bar{W}$ a região fechada limitada por um círculo geodésico de raio r contido em V. Sejam (ρ, θ) coordenadas polares geodésicas em $\bar{W} - L$ centradas em p.

Primeiro, consideramos o caso em que $\alpha([0, t_1]) \subset \bar{W}$ (Fig. 4.41). Seja $0 < \beta_0 < \beta_1 < t_1$. Como α tem comprimento finito, podemos escolher L de modo que $\alpha([\beta_0, \beta_1])$ intersecta L em apenas um número finito de pontos, digamos $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{k-1}$. Faça $\beta_0 = \tau_0$ e $\beta_1 = \tau_k$, e escreva $\alpha(t) = (\rho(t), \theta(t))$ em cada intervalo (τ_i, τ_{i+1}), $i = 0, \ldots, k-1$. Note que

$$\sqrt{(\rho')^2 + G(\theta')^2} \geq \sqrt{(\rho')^2},$$

e a igualdade ocorre se e somente se $\theta' \equiv 0$; isto é , $\theta =$ const. em (τ_i, τ_{i+1}). Afirmamos que o comprimento de α entre β_0 e β_1 é maior ou igual do que $|\rho(\beta_1) - \rho(\beta_0)|$ e que a igualdade se verifica se e só se α é a geodésica radial com uma parametrização $\rho(t)$, $\rho'(t) > 0$.

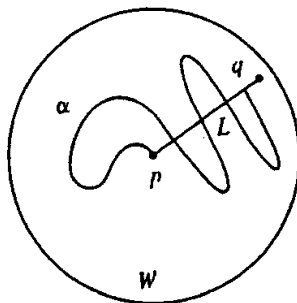



Figura 4-41

Para provar esta afirmação, note que o comprimento referido é dado pela integral

$$\sum_{i=0} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sqrt{(\rho')^2 + G(\theta')^2}\, dt \geq \sum_{i=0}^{k} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sqrt{(\rho')^2}\, dt$$

$$= \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\rho'|\, dt = |\rho(\beta_1) - \rho(\beta_0)|\,,$$

onde a integral entre τ_i e τ_{i+1} é obtida como limite, quando $\varepsilon \to 0$, da integral entre $\tau_i + \varepsilon$ e $\tau_{i+1} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Além disto, a igualdade se verifica em ambas as desigualdades acima se e só se $\rho'(t) > 0$ e $\theta(t) =$ const. em cada intervalo (τ_i, τ_{i+1}), isto é, $\alpha(t_i)$ e $\alpha(t_{i+1})$ pertencem, em verdade, a uma geodésica radial. Isto prova a afirmação feita.

A prova da Proposição para o caso em que $\alpha([0, t_1]) \subset \bar{W}$ segue-se imediatamente da afirmação acima, fazendo $\beta_0 \to 0$ e $\beta_1 \to t_1$

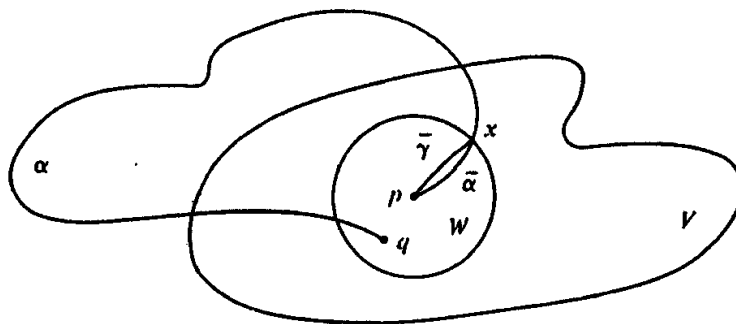



Figura 4-42

Suponha agora que $\alpha([0,t_1])$ não esteja inteiramente contida em $\bar{W}$. Seja $t_0 \in [0,t_1]$ o primeiro valor para o qual $\alpha(t_0) = x$ pertence à fronteira de $\bar{W}$. Seja $\bar{\gamma}$ a geodésica radial px e seja $\bar{\alpha}$ a restrição da curva α ao intervalo $[0,t_0]$. É claro então que $l_\alpha \geq l_{\bar{\alpha}}$ (ver Fig. 4.42).

Pelo argumento anterior, $l_{\bar{\alpha}} \geq l_{\bar{\gamma}}$. Como q é um ponto interior de $\bar{W}$, $l_{\bar{\gamma}} > l_\gamma$. Concluímos que $l_\alpha > l_\gamma$, encerrando assim a demonstração.

Q.E.D.

Observação 3. Por simplicidade, provamos a proposição para curvas regulares. Contudo, ela continua válida para curvas regulares por partes (cf. Def. 7, seção 4.4); a demonstração é inteiramente análoga e será deixada como exercício.

Observação 4. A prova também mostra que a recíproca da última afirmação da Prop. 4 é verdadeira. No entanto, esta recíproca não se generaliza para as curvas regulares por partes.

As proposições anteriores não são válidas globalmente, como ilustra o exemplo da esfera. Dois pontos que não são antípodas de uma esfera podem ser conectados por dois meridianos de comprimentos diferentes e apenas o menor deles satisfaz as conclusões da proposição. Em outras palavras, uma geodésica, se suficientemente estendida, pode não ser o menor caminho entre seus pontos extremos. A proposição seguinte mostra, no entanto, que quando uma curva regular é o menor caminho entre quaisquer dois de seus pontos, esta curva é necessariamente uma geodésica.

Proposição 5. *Seja $\alpha : I \to S$ uma curva parametrizada regular com um parâmetro proporcional ao comprimento de arco. Suponha que o comprimento de α entre dois pontos quaisquer $t, \tau \in I$ é menor ou igual ao comprimento de qualquer curva parametrizada regular ligando $\alpha(t)$ a $\alpha(\tau)$. Então α é uma geodésica.*

Demonstração. Seja $t_0 \in I$ um ponto arbitrário de I e seja W a vizinhança de $\alpha(t_0)$ dada pela Prop. 4. Seja $q = \alpha(t_1) \in W$. Do caso da igualdade na Prop. 4, segue-se que α é uma geodésica em (t_0, t_1). Caso contrário teríamos, entre t_0 e t_1, um comprimento maior do que o da geodésica radial ligando $\alpha(t_0)$ a $\alpha(t_1)$, contradizendo a hipótese. Como α é regular, temos, por continuidade, que α também é uma geodésica em t_0.

Q.E.D.

Exercícios

1. Prove que em uma superfície com curvatura constante os círculos geodésicos têm curvatura geodésica constante.

2. Mostre que as equações das geodésicas em coordenads polares geodésicas ($E = 1$, $F = 0$) são dadas por

$$\begin{aligned} \rho'' - \frac{1}{2} G_\rho (\theta')^2 &= 0, \\ \theta'' + \frac{G_\rho}{G} \rho' \theta' + \frac{1}{2} \frac{G_\theta}{G} (\theta')^2 &= 0. \end{aligned}$$

3. Se p é um ponto de uma superfície regular, prove que

$$K(p) = \lim_{r \to 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A}{r^4},$$

onde $K(p)$ é a curvatura Gaussiana de S em p, r é o raio de um círculo geodésico $S_r(p)$ centrado em p, e A é a área da região limitada por $S_r(p)$.

4. Mostre que em um sistema de coordenadas normais centrado em p, todos os símbolos de Christoffel são nulos em p.

5. Para quais dos pares de superfícies dados abaixo existe uma isometria local?

   a. Toro de revolução e cone.

   b. Cone e esfera.

   c. Cone e cilindro.

6. Seja S uma superfície, seja p um ponto de S, e seja $S^1(p)$ um círculo geodésico em torno de p, suficientemente pequeno para estar contido em uma vizinhança normal. Sejam r e s dois pontos de $S^1(p)$, e C um arco de $S^1(p)$ entre r e s. Considere a curva $\exp_p^{-1}(C) \subset T_pS$. Prove que $S^1(p)$ pode ser escolhido suficientemente pequeno tal que

   a. Se $K > 0$, então $l(\exp_p^{-1}(C)) > l(C)$, onde $l(\ )$ denota o comprimento de arco da curva correspondente.

   b. Se $K < 0$, então $l(\exp_p^{-1}(C)) < l(C)$.

7. Seja (ρ, θ) um sistema de coordenadas geodésicas polares ($E = 1$, $F = 0$) em uma superfície, e seja $\gamma(\rho(s), \theta(s))$ a geodésica que faz um ângulo $\varphi(s)$ com as curvas $\theta =$ const.. Para fixar idéias, as curvas $\theta =$ const. estão orientadas no sentido em que ρ é crescente e φ é medido de $\theta =$ const. a γ na orientação dada pela parametrização (ρ, θ). Mostre que

$$\frac{d\varphi}{ds} + \left(\sqrt{G}\right)_\rho \frac{d\theta}{ds} = 0.$$

*8. (*Teorema de Gauss sobre a Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo Geodésico "Pequeno".*) Seja Δ um triângulo geodésico (isto é, seus lados são segmentos de geodésicas) em uma superfície S. Suponha que Δ seja suficientemente pequeno para estar contido em uma vizinhança normal de algum de seus vértices. Prove diretamente (i.e. sem utilizar o teorema de Gauss-Bonnet) que

$$\iint_\Delta K\,dA = \left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i\right) - \pi,$$

onde K é a curvatura Gaussiana de S, e $0 < \alpha_i < \pi$, $i = 1, 2, 3$, são os ângulos internos do triângulo Δ.

9. (*Uma Desigualdade Isoperimétrica Local para Círculos Geodésicos*) Seja $p \in S$ e seja $S_r(p)$ um círculo geodésico de centro p e raio r. Seja L o comprimento de arco de $S_r(p)$ e A a área da região limitada por $S_r(p)$. Prove que

$$4\pi A - L^2 = \pi^2 r^4 K(p) + R,$$

onde $K(p)$ é a curvatura Gaussiana de S em p e

$$\lim_{r \to 0} \frac{R}{r^4} = 0.$$

Assim, se $K(p) > 0$ (ou < 0) e r é pequeno, $4\pi A - L^2 > 0$ (ou < 0). Compare com a desigualdade isoperimétrica da seção 1.7.

10. Seja S uma superfície conexa e sejam $\varphi, \psi : S \to S$ duas isometrias de S. Suponha que existe um ponto $p \in S$ tal que $\varphi(p) = \psi(p)$ e que $d\varphi_p(v) = d\psi_p(v)$ para todo $v \in T_pS$. Prove que $\varphi(q) = \psi(q)$ para todo $q \in S$.

11. (*Mobilidade Livre para Triângulos Geodésicos Pequenos.*) Seja S uma superfície com curvatura Gaussiana constante. Escolha pontos $p_1, p'_1 \in S$ e sejam V, V' vizinhanças normais de p_1, p'_1, respectivamente. Escolha triângulos geodésicos p_1, p_2, p_3 em V (geodésico significa que os lados $\widehat{p_1p_2}$, $\widehat{p_2p_3}$, $\widehat{p_3p_1}$ são arcos geodésicos) e p'_1, p'_2, p'_3 em V' de tal modo que

$$\begin{aligned} l(p_1,p_2) &= l(p'_1,p'_2), \\ l(p_2,p_3) &= l(p'_2,p'_3), \\ l(p_3,p_1) &= l(p'_3,p'_1) \end{aligned}$$

(aqui l denota o comprimento de um arco geodésico). Mostre que existe uma isometria $\theta : V \to V'$ que aplica o primeiro triângulo sobre o segundo. (Esta é a versão local, para superfícies com curvatura constante, do teorema da geometria do ensino médio que afirma que dois triângulos quaisquer no plano com lados correspondentes iguais são congruentes.)

12. Um difeomorfismo $\varphi : S_1 \to S_2$ é chamado uma *aplicação geodésica* se para toda geodésica $C \subset S_1$ de S_1, a curva $\varphi(C) \subset S_2$ é uma geodésica de S_2. Se U é uma vizinhança de p em S_1, então $\varphi : U \to S_2$ é chamada uma *aplicação geodésica local* em p se existe uma vizinhança de $\varphi(p)$ em S_2 tal que $\varphi : U \to V$ seja uma aplicação geodésica.

a. Mostre que se $\varphi : S_1 \to S_2$ é ao mesmo tempo uma aplicação geodésica e conforme, então φ é uma *semelhança;* isto é,

$$\langle v, w\rangle_p = \lambda \langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w)\rangle_{\varphi(p)}, \qquad p \in S_1,\ v, w \in T_pS_1,$$

onde λ é uma constante.

b. Sejam $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ a esfera unitária, $S^- = \{(x,y,z) \in S^2;\ z < 0\}$ o seu hemisfério inferior, e P o plano $z = -1$. Prove que a aplicação (projeção central) $\varphi : S^- \to P$ que leva um ponto $p \in S^-$ na interseção de P com a reta que liga p ao centro de S^2 é uma aplicação geodésica.

***c.** Mostre que uma superfíe com curvatura constante admite uma aplicação geodésica local sobre o plano para todo $p \in S$.

13. (*Teorema de Beltrami.*) No Exercício 12, parte c, foi mostrado que uma superfície S com curvatura constante K admite uma aplicação geodésica

local sobre o plano para todo $p \in S$. Para provar a recíproca (teorema de Beltrami)– *Se uma superfície regular e conexa S admite para todo $p \in S$ uma aplicação geodésica local sobre o plano, então S tem curvatura Gaussiana constante*, as seguintes afirmações devem ser provadas:

a. Se $v = v(s)$ é uma geodésica, em uma vizinhança coordenada de uma superfície parametrizada por (u, v), que não coincide com $u =$ const., então

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + (2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})\left(\frac{dv}{du}\right) - \Gamma^2_{11}.$$

***b.** Se S admite uma aplicação geodésica local $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ de uma vizinhança V de um ponto $p \in S$ no plano $\mathbb{R}^2$, então é possível parametrizar uma vizinhança V por (u, v) de tal maneira que

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{11} = 0, \qquad \Gamma^2_{22} = 2\Gamma^1_{12}, \qquad \Gamma^1_{11} = 2\Gamma^2_{12}.$$

***c.** Se existe uma aplicação geodésica de uma vizinhança V de $p \in S$ sobre um plano, então a curvatura K em V satisfaz as relações

$$KE = \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - (\Gamma^2_{12})_u \qquad \text{(a)}$$

$$KF = \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - (\Gamma^2_{12})_v \qquad \text{(b)}$$

$$KG = \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} - (\Gamma^1_{12})_v \qquad \text{(c)}$$

$$KE = \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - (\Gamma^1_{12})_u \qquad \text{(d)}$$

***d.** Se existe uma aplicação geodésica de uma vizinhança V de $p \in S$ sobre um plano, então a curvatura K em V é constante.

e. Use o resultado acima, e um argumento canônico envolvendo conexidade, para provar o teorema de Beltrami.

14. (*Grupo de Holonomia*) Seja S uma superfície regular e $p \in S$. Para cada curva parametrizada regular por partes $\alpha : [0, l] \to S$ com $\alpha(0) = \alpha(l) = p$, seja $P_\alpha : T_pS \to T_pS$ a aplicação que associa a cada $v \in T_pS$ o seu transporte paralelo ao longo de α de volta a p. Pela Prop. 1 da seção 4.4, P_α é uma isometria linear de T_pS. Se $\beta : [l, \tilde{l}] \to S$ é uma outra curva parametrizada regular por partes com $\beta(l) = \beta(\tilde{l}) = p$, defina a curva $\beta \circ \alpha : [0, \tilde{l}] \to S$ percorrendo sucessivamente primeiro α e depois β; isto é, $\beta \circ \alpha(s) = \alpha(s)$ se $s \in [0, l]$, e $\beta \circ \alpha(s) = \beta(s)$ se $s \in [l, \tilde{l}]$.

   a. Considere o conjunto

   $$H_p(S) = \{P_\alpha : T_pS \to T_pS; \text{ para todo } \alpha \text{ ligando } p \text{ a } p\},$$

   onde α é regular por partes. Defina neste conjunto a operação $P_\beta \circ P_\alpha = P_{\beta \circ \alpha}$; isto é, $P_\beta \circ P_\alpha$ é a composição usual de aplicar primeiro P_α e depois P_β. Prove que, com esta operação, $H_p(S)$ é um grupo (em verdade, um subgrupo do grupo de isometrias lineares de T_pS). $H_p(S)$ é chamado *grupo de holonomia* de S em p.

   b. Mostre que o grupo de holonomia em qualquer ponto de uma superfície homeomorfa a um disco com $K \equiv 0$ se reduz à identidade.

   c. Prove que se S é conexa, os grupos de holonomia $H_p(S)$ e $H_q(S)$ em dois pontos quaisquer $p, q \in S$ são isomorfos. Assim, podemos falar sobre o *grupo (*abstrato*) de holonomia de uma superfície.*

   d. Prove que o grupo de holonomia de uma esfera é isomorfo ao grupo de matrizes de rotação 2×2 (cf. Exercício 22, seção 4.4).

4.7 Outras Propriedades das Geodésicas; Vizinhanças Convexas*

Nesta seção mostraremos como alguns fatos sobre geodésicas (em particular, a Prop. 5 da seção 4.4) seguem do teorema geral de existência, unicidade e dependência das condições iniciais de campos de vetores.

---

* Esta seção pode ser omitida em uma primeira leitura. Contudo, as Proposições 1 e 2 (cujos enunciados podem ser entendidos sem a leitura da seção) serão utilizadas no Capítulo 5.

As geodésicas em uma parametrização (u, v) são dadas pelo sistema

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma^1_{11}(u')^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}(v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma^2_{11}(u')^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}(v')^2 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

onde Γ^k_{ij} são funções das coordenadas locais u e v. Colocando $u' = \xi$ e $v' = \eta$, podemos escrever o sistema acima na forma geral

$$\begin{aligned} \xi' &= F_1(u, v, \xi, \eta) \\ \eta' &= F_2(u, v, \xi, \eta) \\ u' &= F_3(u, v, \xi, \eta) \\ v' &= F_4(u, v, \xi, \eta) \end{aligned} \tag{2}$$

onde $F_3(u, v, \xi, \eta) = \xi$ e $F_4(u, v, \xi, \eta) = \eta$.

Convém utilizar a seguinte notação: (u, v, ξ, η) denotará um ponto de $\mathbb{R}^4$ que será considerado como o produto Cartesiano $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$; (u, v) denotará um ponto do primeiro fator e (ξ, η) um ponto do segundo fator.

O sistema (2) é equivalente a um campo vetorial em um conjunto aberto do $\mathbb{R}^4$ que é definido de modo inteiramente análogo aos campos de vetores em $\mathbb{R}^2$ (cf. seção 3.4). O teorema de existência e unicidade das trajetórias (Teorema 1, seção 3.4) continua valendo neste caso (em verdade, o teorema vale para $\mathbb{R}^n$; cf. S. Lang, Analysis 1, Addison-Wesley, Reading,Mass., 1968, pp. 383-386) e é enunciado da seguinte maneira:

Dado o sistema (2) em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^4$ e dado um ponto

$$(u_0, v_0, \xi_0, \eta_0) \in U$$

existe uma única trajetória $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ da Eq. (2), com

$$\alpha(0) = (u_0, v_0, \xi_0, \eta_0).$$

Para aplicar este resultado a uma superfície regular S, devemos observar que, dada uma parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ em $p \in S$, com vizinhança coordenada V, o conjunto de pares (q, v), $q \in V$, $v \in T_qS$, pode ser identificado a um conjunto aberto $V \times \mathbb{R}^2 = U \subset \mathbb{R}^4$. Para isto, identificamos cada T_qS, $q \in V$, com $\mathbb{R}^2$ por meio da base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$. Sempre que falarmos de diferenciabilidade e continuidade em um conjunto de pares (q, v) significa diferenciabilidade e continuidade induzidas por esta identificação.

Admitindo o teorema acima, a prova da Prop. 5 da seção 4.4 é trivial. Com efeito, as equações das geodésicas na parametrização $\mathbf{x}(u,v)$ em $p \in S$ fornecem um sistema na forma (2) em $U \subset \mathbb{R}^4$. O teorema fundamental implica então que dado um ponto $q = (u_0, v_0) \in V$ e um vetor não-nulo $v = (\xi_0, \eta_0) \in T_qS$ existe uma única geodésica parametrizada

$$\gamma = \pi \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$$

em V (onde $\pi(q,v) = q$ é a projeção $V \times \mathbb{R}^2 \to V$).

O teorema da dependência em relação às condições iniciais para o campo de vetores definido pela Eq. (2) também é importante. Ele é essencialmente o mesmo que o teorema para campos de vetores em $\mathbb{R}^2$: *Dado um ponto $p = (u_0, v_0, \xi_0, \eta_0) \in U$, existem uma vizinhança $V = V_1 \times V_2$ de p (onde V_1 é uma vizinhança de (u_0, v_0) e V_2 é uma vizinhança de (ξ_0, η_0)), um intervalo aberto I, e uma aplicação diferenciável $\alpha : I \times V_1 \times V_2 \to U$ tais que, fixado $(u, v, \xi, \eta) = (q, v) \in V$, então $\alpha(t, q, v)$, $t \in I$, é a trajetória de (2) passando por (q, v).*

Para aplicar este resultado a uma superfície regular S, introduzimos uma parametrização em $p \in S$, com vizinhança coordenada V, e identificamos, como acima, o conjunto de pares (q, v), $q \in V$, $v \in T_qS$, com $V \times \mathbb{R}^2$. Tomando como condição inicial o par $(p, 0)$, obtemos um intervalo $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$, uma vizinhança $V_1 \subset V$ de p em S, uma vizinhança V_2 da origem em $\mathbb{R}^2$, e uma aplicação diferenciável

$$\gamma : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times V_1 \times V_2 \to V$$

tal que se $(q, v) \in V_1 \times V_2$, $v \neq 0$, a curva

$$t \to \gamma(t, q, v), \qquad t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2),$$

é a geodésica de S satisfazendo $\gamma(0, q, v) = q$ e $\gamma'(0, q, v) = v$, e, se $v = 0$, esta curva se reduz ao ponto q. Aqui $\gamma = \pi \circ \alpha$, onde $\pi(q, v) = q$ é a projeção $U = V \times \mathbb{R}^2 \to V$ e α é a aplicação dada acima.

Na superfície S, o conjunto $V_1 \times V_2$ tem a seguinte forma

$$\{(q, v), \; q \in V_1, \; v \in V_q(0) \subset T_qS\},$$

onde $V_q(0)$ denota uma vizinhança da origem em T_qS. Assim, restringindo γ a $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times \{p\} \times V_2$, podemos escolher $\{p\} \times V_2 = B_{\varepsilon_1} \subset T_pS$, e obter

Teorema 1. *Dado $p \in S$ existem números $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ e uma aplicação diferenciável*

$$\gamma : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times B_{\varepsilon_1} \to S, \qquad B_{\varepsilon_1} \subset T_pS$$

tal que para $v \in B_{\varepsilon_1}$, $v \neq 0$, $t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ a curva $t \to \gamma(t, v)$ é a geodésica de S com $\gamma(0, v) = p$, $\gamma'(0, v) = v$, e para $v = 0$, $\gamma(t, 0) = p$.

Este resultado foi usado na demonstração da Prop. 1 da seção 4.6.

O teorema acima corresponde ao caso no qual p está fixo. Para lidar com o caso geral, vamos denotar por $B_r(q)$ o domínio limitado por um círculo geodésico (pequeno) de raio r e centro q, e por $\bar{B}_r(q)$ a união de $B_r(q)$ com a sua fronteira.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{B}_\varepsilon(q) \subset V_1$. Seja $B_{\delta(q)}(0) \subset \bar{V}_q(0)$ o maior disco aberto no conjunto $\bar{V}_q(0)$ formado pela união de V_q com seus pontos de acumulação, e tome $\varepsilon_1 = \inf \delta(q)$, $q \in \bar{B}_\varepsilon(q)$. É claro que $\varepsilon_1 > 0$. Assim, o conjunto

$$\mathcal{U} = \{(q, v);\ q \in B_\varepsilon(p),\ v \in B_{\varepsilon_1}(0) \subset T_qS\}$$

está contido em $V_1 \times V_2$, e obtemos

Teorema 1a. *Dado $p \in S$, existem números positivos ε, ε_1, ε_2 e uma aplicação diferenciável*

$$\gamma : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times \mathcal{U} \to S,$$

onde

$$\mathcal{U} = \{(q, v);\ q \in B_\varepsilon(p),\ v \in B_{\varepsilon_1}(0) \subset T_qS\},$$

tal que $\gamma(t, q, 0) = q$, e para $v \neq 0$ a curva

$$t \longrightarrow \gamma(t, q, v), \qquad t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$$

é a geodésica de S com $\gamma(0, q, v) = q$, $\gamma'(0, q, v) = v$.

Vamos aplicar o Teorema 1a para obter o seguinte refinamento da existência de vizinhanças normais.

Proposição 1. *Dado* $p \in S$ *existe uma vizinhança* W *de* p *em* S *e um número* $\delta > 0$ *tais que para todo* $q \in W$, $\exp_q$ *é um difeomorfismo em* $B_\delta(0) \subset T_qS$ *e* $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$; *isto é,* W *é uma vizinhança normal de todos os seus pontos.*

Demonstração. Seja V uma vizinhança coordenada de p. Sejam ε, ε_1, ε_2 e $\gamma : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times \mathcal{U} \to V$ como no Teorema 1a. Escolhendo $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, podemos garantir que, para $(q,v) \in \mathcal{U}$, $\exp_q(v) = \gamma(|v|, q, v/|v|)$ está bem definida. Assim, podemos definir a aplicação diferenciável $\varphi : \mathcal{U} \to V \times V$ por

$$\varphi(q,v) = (q, \exp_q(v)).$$

Mostraremos primeiro que $d\varphi$ é não-singular em $(p,0)$. Para isto, investigamos como φ transforma as curvas em $\mathcal{U}$ dadas por

$$t \longrightarrow (p, tw), \qquad t \longrightarrow (\alpha(t), 0),$$

onde $w \in T_pS$ e $\alpha(t)$ é uma curva em S com $\alpha(0) = p$. Observe que os vetores tangentes a estas curvas em $t = 0$ são $(0,w)$ e $(\alpha'(0), 0)$, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} d\varphi_{(p,0)}(0,w) &= \frac{d}{dt}(p, \exp_p(wt))\bigg|_{t=0} = (0,w), \\ d\varphi_{(p,0)}(\alpha'(0),0) &= \frac{d}{dt}(\alpha(t), \exp_{\alpha(t)}(0))\bigg|_{t=0} = (\alpha'(0), \alpha'(0)), \end{aligned}$$

e $d\varphi_{(p,0)}$ leva vetores linearmente independentes em vetores linearmente independentes. Logo, $d\varphi_{(p,0)}$ é não-singular.

Segue-se que podemos aplicar o teorema da função inversa, e concluir a existência de uma vizinhança $\mathcal{V}$ de $(p,0)$ em $\mathcal{U}$ tal que φ aplica $\mathcal{V}$ difeomorficamente sobre uma vizinhança de (p,p) em $V \times V$. Sejam $U \subset B_\varepsilon(p)$ e $\delta > 0$ tais que

$$\mathcal{V} = \{(q,v) \in \mathcal{U};\ q \in U,\ v \in B_\delta(0) \subset T_qS\}.$$

Finalmente, seja $W \subset U$ uma vizinhança de p tal que $W \times W \subset \varphi(\mathcal{V})$.

Afirmamos que δ e W assim obtidos satisfazem o enunciado do teorema. De fato, como φ é um difeomorfismo em $\mathcal{V}$, $\exp_q$ é um difeomorfismo em $B_\delta(0)$, $q \in W$. Além disto, se $q \in W$,então

$$\varphi(\{q\} \times B_\delta(0)) \supset \{q\} \times W,$$

e, por definição de φ, $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$.

Q.E.D.

Observação 1. Segue-se da proposição anterior que dados dois pontos quaisquer $q_1, q_2 \in W$ existe uma única geodésica γ de comprimento menor que δ ligando q_1 a q_2. Além disto, a prova também mostra que γ "depende diferenciavelmente" de q_1 e q_2 no seguinte sentido: Dado $(q_1, q_2) \in W \times W$, fica determinado um único $v \in T_{q_1}S$ (precisamente, o v dado por $\varphi^{-1}(q_1, q_2) = (q_1, v)$) que depende diferenciavelmente de (q_1, q_2) e é tal que $\gamma'(0) = v$.

Uma das aplicações do resultado anterior consiste em provar que uma curva que minimiza localmente o comprimento de arco não pode ser "quebrada". Mais precisamente, temos

Proposição 2. *Seja $\alpha : I \to S$ uma curva parametrizada, regular por partes tal que em cada arco regular o parâmetro é proporcional ao comprimento de arco. Suponha que o comprimento de arco entre quaisquer dois de seus pontos seja menor do que ou igual ao comprimento de arco de qualquer curva parametrizada regular ligando estes pontos. Então α é uma geodésica; em particular, α é regular por toda a parte.*

Demonstração. Seja $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq t_{k+1} = l$ uma partição de $[0, l] = I$ tal que $\alpha|\,[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, k$, seja regular. Pela Prop. 5 da seção 4.6, α é geodésica em pontos de (t_i, t_{i+1}). Para provar que α é geodésica em t_i, considere a vizinhança W, dada pela Prop. 1, de $\alpha(t_i)$. Sejam $q_1 = \alpha(t_i - \varepsilon)$, $q_2 = \alpha(t_i + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, dois pontos de W, e seja γ a geodésica radial de $B_\delta(q_1)$ ligando q_1 a q_2 (Fig. 4.43). Pela Prop. 4 da seção 4.6, estendida para curvas regulares por partes, $l(\gamma) \leq l(\alpha)$ entre q_1 e q_2. Em conjunto com a hipótese da proposição, isto implica que $l(\gamma) = l(\alpha)$. Assim, novamente pela Prop. 4 da seção 4.6, os traços de γ e α coincidem. Portanto, α é geodésica em t_i, e a demontração está encerrada.

Q.E.D.

No exemplo 6 da seção 4.4 utilizamos o seguinte fato: *Uma geodésica $\gamma(t)$ de uma superfície de revolução não pode ser assintótica a um paralelo P_0 que não seja ele mesmo uma geodésica.* Como outra aplicação da Prop. 1, iremos esboçar a demonstração deste fato (os detalhes podem ser completados como um exercício).

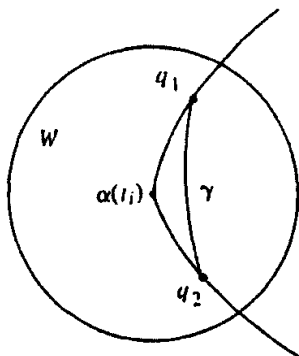



Figura 4-43

Suponha a negação da afirmação acima, e seja p um ponto do paralelo P_0. Sejam W e δ a vizinhança e o número dados pela Prop. 1, e seja $q \in P_0 \cap W$, $q \neq p$. Como $\gamma(t)$ é assintótica a P_0, o ponto p é um limite de pontos $\gamma(t_i)$, onde $\{t_i\} \to \infty$, e as tangentes de γ em t_i convergem para a tangente de P_0 em p. Pela Observação 1, a geodésica $\bar{\gamma}(t)$ com comprimento menor que δ ligando p a q tem que ser tangente a P_0 em p. Pela relação de Clairaut (cf. Exemplo 5, seção 4.4), um pequeno arco de $\bar{\gamma}(t)$ em torno de p estará na região de W onde está $\gamma(t)$. Segue-se que, suficientemente próximo a p, existe um par de pontos em W ligados por duas geodésicas de comprimento menor do que δ (ver Fig. 4.44). Isto é uma contradição, o que prova a nossa afirmação.

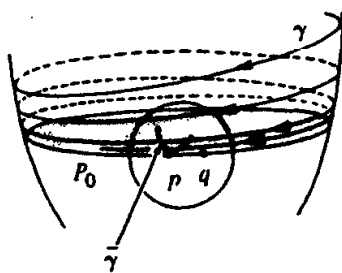



Figura 4-44

Uma questão natural sobre a Prop. 1 é se a geodésica de comprimento menor que δ ligando dois pontos q_1, q_2 de W está contida em W. Se este for o caso para qualquer par de pontos em W, dizemos que W é *convexa.*

Dizemos que uma geodésica parametrizada ligando dois pontos é *minimizante* se o seu comprimento é menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva parametrizada regular por partes ligando estes dois pontos.

Quando W é convexa, temos pela Prop. 4 (ver também a Observação 3) da seção 4.6 que a geodésica ligando $q_1 \in W$ a $q_2 \in W$ é minimizante. Assim, neste caso, podemos dizer que quaisquer dois pontos de W são ligados por uma única geodésica minimizante em W. Contudo, em geral, W não é convexa.

Vamos agora provar que podemos escolher W de tal maneira que ela seja convexa. O ponto crucial da demonstração é a proposição seguinte, que é interessante em si mesma. Como de costume, denotaremos por $B_r(p)$ o interior da região limitada por um círculo geodésico $S_r(p)$ de raio r e centro p.

Proposição 3. *Para cada ponto $p \in S$ existe um número positivo ε com a seguinte propriedade: Se uma geodésica $\gamma(t)$ é tangente a um círculo geodésico $S_r(p)$, $r < \varepsilon$, em $\gamma(0)$, então, para $t \neq 0$ pequeno, $\gamma(t)$ está fora de $B_r(p)$* (Fig. 4.45).

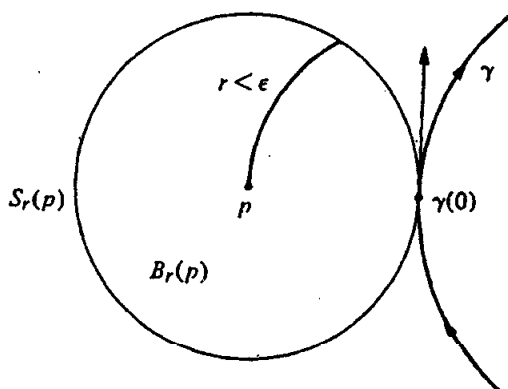



Figura 4-45

Demonstração. Seja W a vizinhança de p dada pela Prop. 1. Para cada par (q, v), $q \in W$, $v \in T_qS$, $|v| = 1$, considere a geodésica $\gamma(t, q, v)$ e faça, para um par fixo (q, v) (Fig. 4.46),

$$\exp_p^{-1} \gamma(t, q, v) = u(t),$$

$$F(t, q, v) = |u(t)|^2 = F(t).$$

Assim, para (q, v) fixado, $F(t)$ é o quadrado da distância do ponto $\gamma(t, q, v)$ a p. É claro que $F(t, q, v)$ é diferenciável. Observe que $F(t, p, v) = |vt|^2$.

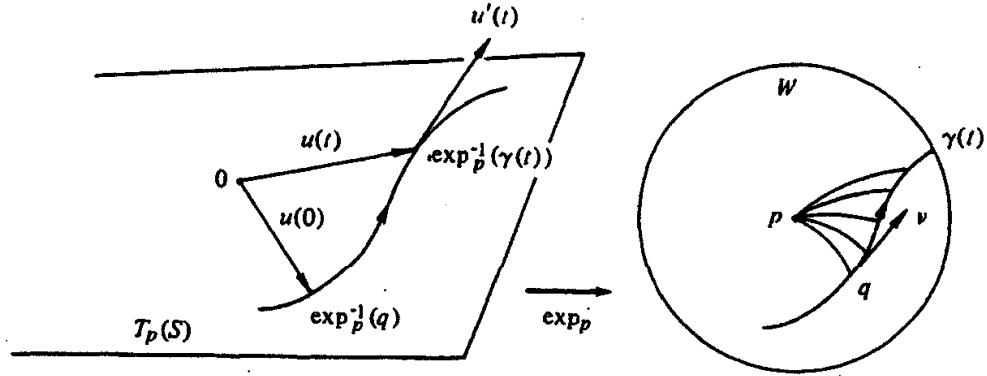



Figura 4-46

Agora denote por $\mathcal{U}^1$ o conjunto

$$\mathcal{U}^1 = \{(q, v);\ q \in W,\ v \in T_q S,\ |v| = 1\},$$

e defina a função $Q : \mathcal{U}^1 \to \mathbb{R}$ por

$$Q(q, v) = \left.\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right|_{t=0}.$$

Como F é diferenciável, Q é contínua. Além disto, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= 2\langle u(t), u'(t)\rangle, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= 2\langle u(t), u''(t)\rangle + 2\langle u'(t), u'(t)\rangle, \end{aligned}$$

e em (p, v)

$$u'(t) = v, \qquad u''(t) = 0,$$

obtemos

$$Q(p, v) = 2|v|^2 = 2 > 0, \qquad \text{para todo } v \in T_p S,\ |v| = 1.$$

Segue-se, por continuidade, que existe uma vizinhança $V \subset W$ de p tal que $Q(q, v) > 0$ para todo $q \in V$ e $v \in T_q S$ com $|v| = 1$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subset V$. Afirmamos que este ε satisfaz o enunciado da proposição.

De fato, seja $r < \varepsilon$ e seja $\gamma(t, q, v)$ uma geodésica tangente a $S_r(p)$ em $\gamma(0) = q$. Introduzindo coordenadas polares geodésicas em torno de p, vê-se que $\langle u(0), u'(0) \rangle = 0$ (ver Fig. 4.47). Assim, $\partial F/\partial t(0) = 0$. Como $F(0, q, v) = r^2$, e $(\partial^2 F/\partial t^2)(0) > 0$, temos que $F(t) > r^2$ para $t \neq 0$ pequeno; donde, $\gamma(t)$ está fora de $B_r(p)$.

Q.E.D.

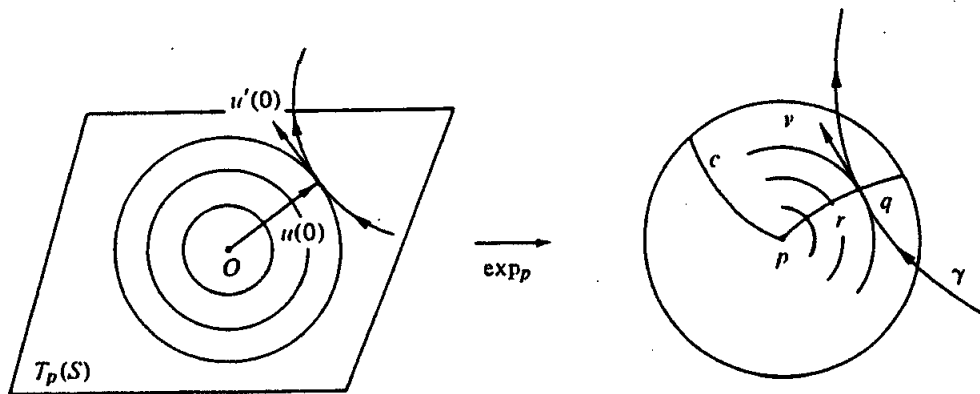



Figura 4-47

Podemos agora provar a

Proposição 4 (Existência de Vizinhanças Convexas). *Para cada ponto $p \in S$ existe um número $c > 0$ tal que $B_c(p)$ é convexa; isto é, quaisquer dois pontos de $B_c(p)$ podem ser ligados por uma única geodésica minimizante contida em $B_c(p)$.*

Demonstração. Seja ε dado como na Prop. 3. Escolha δ e W na Prop. 1 de tal maneira que $\delta < \varepsilon/2$. Escolha $c < \delta$ e tal que $B_c(p) \subset W$. Vamos provar que $B_c(p)$ é convexa.

Sejam $q_1, q_2 \in B_c(p)$ e seja $\gamma : I \to S$ a geodésica com comprimento menor do que $\delta < \varepsilon/2$ ligando q_1 a q_2. $\gamma(I)$ evidentemente está contida em $B_\varepsilon(p)$, e queremos mostrar que $\gamma(I)$ está contida em $B_c(p)$. Suponha o contrário. Então existe um ponto $m \in B_\varepsilon(p)$ onde a distância máxima r de $\gamma(I)$ a p é atingida (Fig. 4.48). Em uma vizinhança de m, os pontos de $\gamma(I)$ estarão em $B_r(p)$. Mas, isto contradiz a Prop. 3.

Q.E.D.

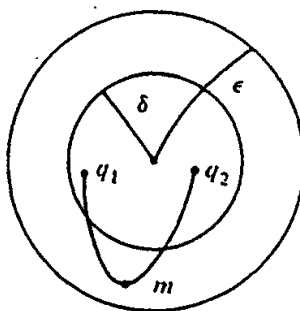



Figura 4-48

Exercícios

*1. Sejam γ e w campos diferenciáveis de vetores em um conjunto aberto $U \subset S$. Sejam $p \in S$ e $\alpha : I \to U$ uma curva tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = y$. Denote por $P_{\alpha,t} : T_{\alpha(0)}S \to T_{\alpha(t)}S$ o transporte paralelo ao longo de α de $\alpha(0)$ a $\alpha(t)$, $t \in I$. Prove que

$$(D_y w)(p) = \frac{d}{dt}\left(P_{\alpha,t}^{-1}(w(\alpha(t)))\right)\bigg|_{t=0},$$

onde o segundo membro é o vetor velocidade da curva $P_{\alpha,t}^{-1}(w(\alpha(t)))$ em T_pS em $t = 0$. (Assim, a noção de derivada covariante pode ser obtida a partir da noção de transporte paralelo.)

2. a. Mostre que a derivada covariante tem as seguintes propriedades. Sejam v, w, e y campos de vetores diferenciáveis em $U \subset S$, $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em S, $y(f)$ a derivada de f na direção de y (cf. Exercício 7, seção 3.4), e λ, μ números reais. Então

1. $D_y(\lambda v + \mu w) = \lambda D_y(v) + \mu D_y(w)$; $D_{\lambda y + \mu v}(w) = \lambda D_y(w) + \mu D_v(w)$.
2. $D_y(fv) = y(f)v + fD_y(v)$; $D_{fy}(v) = fD_y(v)$.
3. $y(\langle v, w\rangle) = \langle D_y v, w\rangle + \langle v, D_y w\rangle$.
4. $D_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_v = D_{\mathbf{x}_v}\mathbf{x}_u$.

*b. Mostre que a propriedade 3 é equivalente ao fato de que o transporte paralelo ao longo de uma dada curva parametrizada regular por partes $\alpha : I \to S$ ligando dois pontos $p, q \in S$ é uma isometria linear entre T_pS

e T_qS. Mostre que a propriedade 4 é equivalente à simetria dos índices inferiores dos símbolos de Christoffel.

***c.** Seja $\mathcal{V}(U)$ o espaço de campos de vetores (diferenciáveis) em $U \subset S$ e seja $D : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ (onde denotamos $D(y, v) = D_y(v)$) uma aplicação satisfazendo as propriedades 1-4. Verifique que $D_y(v)$ coincide com a derivada covariante do texto. (Em geral, um D satisfazendo as propriedades 1 e 2 é chamado uma *conexão* em U. O objetivo do exercício é provar que sobre uma superfície com um produto escalar dado existe uma única conexão com as propriedades adicionais 3 e 4).

***3.** Seja $\alpha : I = [0, l] \to S$ uma curva parametrizada regular e simples. Considere um campo de vetores unitários $v(t)$ ao longo de α, com $\langle \alpha'(t), v(t) \rangle = 0$ e uma aplicação $\mathbf{x} : \mathbb{R} \times I \to S$ dada por

$$\mathbf{x}(s, t) = \exp_{\alpha(t)}(sv(t)), \qquad s \in \mathbb{R}, \ t \in I.$$

a. Mostre que $\mathbf{x}$ é diferenciável em uma vizinhança de I em $\mathbb{R} \times I$ e que $d\mathbf{x}$ é não-singular em $(0, t)$, $t \in I$.

b. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbf{x}$ é injetiva no retângulo $t \in I$, $|s| < \varepsilon$.

c. Mostre que em no conjunto aberto $t \in (0, l)$, $|s| < \varepsilon$, $\mathbf{x}$ é uma parametrização de S, cuja vizinhança coordenada contém $\alpha((0, l))$. As coordenadas assim obtidas são chamadas *coordenadas geodésicas* (ou coordenadas de Fermi) com base α. Mostre que em um tal sistema $F = 0$, $E = 1$. Além disto, se α é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, $G(0, t) = 1$ e $G_s(0, t) = 0$.

d. Estabeleça o seguinte análogo do lema de Gauss (Observação 1, após a Prop.3, seção 4.6). Seja $\alpha : I \to S$ uma curva parametrizada regular e seja $\gamma_t(s)$, $t \in I$, uma família de geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco s e tais que: $\gamma_t(0) = \alpha(t)$, $\{\gamma_t'(0), \alpha'(t)\}$ é uma base ortogonal positiva. Então, para um $\bar{s}$ fixado, suficientemente pequeno, a curva $t \to \gamma_t(\bar{s})$, $t \in I$, intersecta ortogonalmente todas γ_t (tais curvas são chamadas *paralelas geodésicas*).

4. A *energia* E de uma curva $\alpha : [a, b] \to S$ é definida por

$$E(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|^2 \, dt.$$

*a. Mostre que $(l(\alpha))^2 \leq (b-a)E(\alpha)$ e que vale a igualdade se e somente se t é proporcional ao comprimento de arco.

b. Conclua a partir da parte a que se $\gamma : [a,b] \to S$ é uma geodésica minimizante com $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$, então para qualquer curva $\alpha : [a,b] \to S$, ligando p a q, temos $E(\gamma) \leq E(\alpha)$ e a igualdade vale se e somente se α é uma geodésica minimizante.

5. Seja $\gamma : [0,l] \to S$ uma geodésica *simples*, parametrizada pelo comprimento de arco, e denote por u e v as coordenadas de Fermi em uma vizinhança de $\gamma([0,l])$ que é dada por $u = 0$ (cf. Exercício 3). Seja $u = \gamma(v,t)$ uma família de curvas dependendo de um parâmetro t, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, tal que γ seja diferenciável e

$$\gamma(0,t) = \gamma(0) = p, \qquad \gamma(l,t) = \gamma(l) = q, \qquad \gamma(v,0) = \gamma(v) \equiv 0.$$

Uma tal família é chamada uma *variação* de γ com extremos p e q fixos. Seja $E(t)$ a energia da curva $\gamma(v,t)$ (cf. Exercício 4); isto é

$$E(t) = \int_0^l \left(\frac{\partial \gamma}{\partial v}(v,t)\right)^2 dv.$$

*a. Mostre que

$$\begin{aligned} E'(0) &= 0, \\ \frac{1}{2}E''(0) &= \int_0^l \left\{ \left(\frac{d\eta}{dv}\right)^2 - K\eta^2 \right\} dv, \end{aligned}$$

onde $\eta(v) = \partial\gamma/\partial t|_{t=0}$, $K = K(v)$ é a curvatura Gaussiana ao longo de γ, e $'$ denota a derivada em relaçao a t (as fórmulas acima são chamadas de *primeira e segunda variações*, respectivamente, da energia de γ; um tratamento mais completo destas fórmulas, incluindo o caso onde γ não é simples, será dado na seção 5.4).

b. Conclua a partir da parte a que se $K \leq 0$, então qualquer geodésica simples $\gamma : [0,l] \to S$ é minimizante em relação a curvas suficientemente próximas a γ ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(l)$.

6. Seja S o cone $z = k\sqrt{x^2+y^2}$, $k > 0$, $(x,y) \neq (0,0)$, e seja V o conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ dado em coordenadas polares por $0 < \rho < \infty$, $0 < \theta <$

$2\pi n \operatorname{sen}\beta$, onde $\operatorname{cotg}\beta = k$ e n é o maior inteiro tal que $2\pi n \operatorname{sen}\beta < 2\pi$ (cf. Exemplo 3, seção 4.2). Seja $\varphi : V \to S$ a aplicação

$$\varphi(\rho, \theta) = \left(\rho \operatorname{sen}\beta \cos\left(\frac{\theta}{\operatorname{sen}\beta}\right), \rho \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{\operatorname{sen}\beta}\right), \rho\cos\beta\right).$$

a. Prove que φ é uma isometria local.

***b.** Seja $q \in S$. Suponha que $\beta < \pi/6$ e seja k o maior inteiro tal que $2\pi k \operatorname{sen}\beta < \pi$. Prove que existem, pelo menos, k geodésicas que partem de q e retornam a q. Mostre que estas geodésicas são quebradas em q e que, portanto, nenhuma delas é uma geodésica fechada (Fig. 4.49).

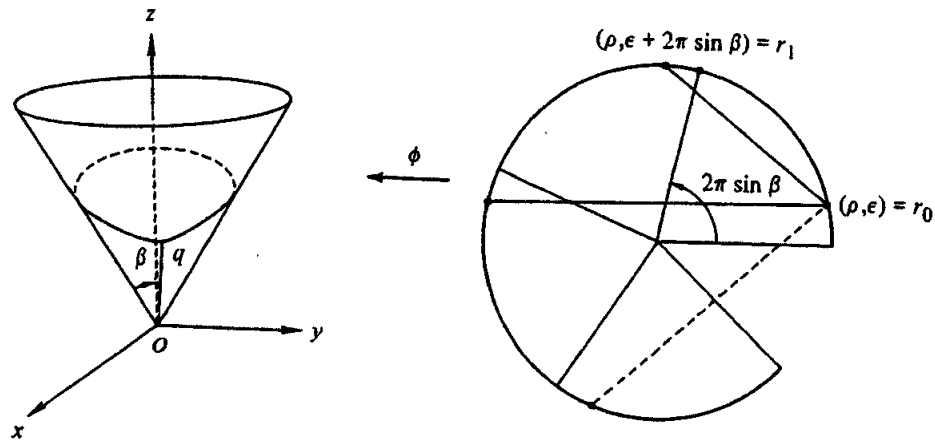



Figura 4-49

***c.** Supondo as condições da parte **b**, prove que existem exatamente k tais geodésicas.

7. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular. Para cada $t \in I$, seja $P(t) \subset \mathbb{R}^3$ um plano passando por $\alpha(t)$ que contém $\alpha'(t)$. Quando o vetor normal unitário $N(t)$ de $P(t)$ é uma função diferenciável de t e $N'(t) \neq 0$, $t \in I$, dizemos que a aplicação $t \to \{\alpha(t), N(t)\}$ é *uma família diferenciável de planos tangentes*. Dada uma tal família, determinamos uma superfície parametrizada (cf. Def. 2, seção 2.3) por

$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\frac{N(t) \wedge N'(t)}{|N'(t)|}.$$

A superfície parametrizada $\mathbf{x}$ é chamada *envoltória da família* $\{\alpha(t), N(t)\}$ (cf. Exemplo 4, seção 3.5).

a. Seja S uma superfície orientada e seja $\gamma : I \to S$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco com $k(s) \neq 0$ e $\tau(s) \neq 0$, $s \in I$. Seja $N(s)$ o campo de vetores unitário normal a S ao longo de γ. Prove que a envoltória da família de planos tangentes $\{\gamma(s), N(s)\}$ é regular em uma vizinhança de γ, tem curvatura Gaussiana $K \equiv 0$, e é tangente a S ao longo de γ. (*Assim, obtivemos uma superfície localmente isométrica ao plano que contém γ como uma geodésica.*)

b. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $k(s) \neq 0$ e $\tau(s) \neq 0$, $s \in I$, e seja $\{\alpha(s), n(s)\}$ a família de seus planos retificantes. Prove que a envoltória desta família é regular em uma vizinhança de α, tem curvatura Gaussiana $K \equiv 0$, e contém α como uma geodésica. (*Assim, toda curva é uma geodésica na envoltória de seus planos retificantes; como esta envoltória é localmente isométrica ao plano, isto justifica o nome plano retificante.*)

Apêndice: Demonstrações dos Teoremas Fundamentais da Teoria Local das Curvas e Superfícies

Neste apêndice vamos mostrar como os teoremas fundamentais de existência e unicidade de curvas e superfícies (seções 1.5 e 4.2) podem ser obtidos a partir de teoremas sobre equações diferenciais.

Demonstração do Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas (cf. enunciado na seção 1.5). O ponto de partida é observar que as equações de Frenet.

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= kn, \\ \frac{dn}{ds} &= -kt - \tau b, \\ \frac{db}{ds} &= \tau n \end{aligned} \tag{1}$$

podem ser consideradas como um sistema diferencial em $I \times \mathbb{R}^9$,

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{d\xi_1}{ds} &= f_1(s, \xi_1, \dots, \xi_9) \\ &\;\,\vdots \\ \tfrac{d\xi_9}{ds} &= f_9(s, \xi_1, \dots, \xi_9) \end{aligned}\right\}, \qquad s \in I, \tag{1a}$$

onde $(\xi_1, \xi_2\xi_3) = t$, $(\xi_4, \xi_5, \xi_6) = n$, $(\xi_7, \xi_8, \xi_9) = b$, e f_i, $i = 1, \dots, 9$, são funções lineares (com coeficientes que dependem de s) das coordenadas ξ_i.

Em geral, um sistema diferencial do tipo (1a) não pode ser associado a um campo de vetores "estacionário" (como na seção 3.4). De qualquer forma, vale um teorema de existência e unicidade na seguinte forma:

Dadas condições iniciais $s_0 \in I$, $(\xi_1)_0, \dots, (\xi_9)_0$, existe um intervalo aberto $J \subset I$ contendo s_0 e uma única aplicação diferenciável $\alpha : J \to \mathbb{R}^9$, com

$$\alpha(s_0) = ((\xi_1)_0, \dots, (\xi_9)_0) \qquad \text{e} \qquad \alpha'(s) = (f_1, \dots, f_9),$$

onde cada f_i, $i = 1, \dots, 9$, é calculada em $(s, \alpha(s)) \in J \times \mathbb{R}^9$. Além disto, se o sistema é linear, $J = I$ (cf. S. Lang, Analysis 1, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968, pp. 383-386).

Segue-se que dado um triedro, ortonormal, orientado positivamente $\{t_0, n_0, b_0\}$ em $\mathbb{R}^3$ e um valor $s_0 \in I$, existe uma família de triedros $\{t(s), n(s), b(s)\}$, $s \in I$, com $t(s_0) = t_0$, $n(s_0) = s_0$, $b(s_0) = b_0$.

Vamos mostrar primeiro que a família $\{t(s), n(s), b(s)\}$ assim obtida permanece ortonormal para todo $s \in I$. De fato, utilizando o sistema (1) para expressar as derivadas com relação a s das seis quantidades

$$\langle t, n\rangle, \qquad \langle t, b\rangle, \qquad \langle n, b\rangle, \qquad \langle t, t\rangle, \qquad \langle n, n\rangle, \qquad \langle b, b\rangle$$

como funções destas mesmas quantidades, obtemos um sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\langle t, n\rangle &= k\langle n, n\rangle - k\langle t, t\rangle - \tau\langle t, b\rangle, \\
\frac{d}{ds}\langle t, b\rangle &= k\langle n, b\rangle + \tau\langle t, n\rangle, \\
\frac{d}{ds}\langle n, b\rangle &= -k\langle t, b\rangle - \tau\langle b, b\rangle + \tau\langle n, n\rangle, \\
\frac{d}{ds}\langle t, t\rangle &= 2k\langle t, n\rangle, \\
\frac{d}{ds}\langle n, n\rangle &= -2k\langle n, t\rangle - 2\tau\langle n, b\rangle, \\
\frac{d}{ds}\langle b, b\rangle &= 2\tau\langle b, n\rangle.
\end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que

$$\begin{aligned}
\langle t, n\rangle &\equiv 0, \qquad \langle t, b\rangle \equiv 0, \qquad \langle n, b\rangle \equiv 0, \\
\langle t, t\rangle &\equiv 1, \qquad \langle n, n\rangle \equiv 1, \qquad \langle b, b\rangle \equiv 1,
\end{aligned}$$

é uma solução do sistema acima com condições iniciais $0, 0, 0, 1, 1, 1$. Por unicidade, a família $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é ortonormal para todo $s \in I$, como havíamos afirmado.

A partir da família $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é possível obter uma curva fazendo

$$\alpha(s) = \int t(s)\, ds, \qquad s \in I,$$

onde a integral de um vetor é entendida como uma função vetorial obtida integrando-se cada componente. É claro que $\alpha'(s) = t(s)$ e que $\alpha''(s) =$

$k(s)n(s)$. Portanto, $k(s)$ é a curvatura de α em s. Além disto, como

$$\alpha'''(s) = k'n + kn' = k'n - k^2t - k\tau b,$$

a torção de α será dada por (cf. Exercício 12, seção 1.5)

$$-\frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{k^2} = -\frac{\langle t \wedge kn, -k^2t + k'n - k\tau b \rangle}{k^2} = \tau;$$

α é, portanto, a curva desejada.

Precisamos ainda mostrar que α é única a menos de translações e rotações do $\mathbb{R}^3$. Seja $\bar{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ uma outra curva com $\bar{k}(s) = k(s)$ e $\bar{\tau}(s) = \tau(s)$, $s \in I$, e seja $\{\bar{t}_0, \bar{n}_0, \bar{b}_0\}$ o triedro de Frenet de $\bar{\alpha}$ em s_0. É claro que por uma translação A e uma rotação ρ é possível fazer o triedro $\{\bar{t}_0, \bar{n}_0, \bar{b}_0\}$ coincidir com o triedro $\{t_0, n_0, b_0\}$ (ambos são triedros positivos). Aplicando a parte referente à unicidade do teorema acima sobre equações diferenciais, obtemos o resultado desejado.

Q.E.D.

*Demonstração do Teorema Fundamental da Teoria Local das Superfícies (*cf. enunciado na seção 4.3*).* A idéia da demonstração é a mesma que a acima; isto é, procuramos uma família de triedros $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$, dependendo de u v, que satisfaça o sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v + eN, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma^1_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v + fN, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma^1_{22}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v + gN, \\ N_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \\ N_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \end{aligned} \tag{2}$$

onde os coeficientes Γ^k_{ij}, a_{ij}, $i, j, k = 1, 2$, são obtidos de E, F, G, e, f, g como se pertencessem a uma superfície.

As equações acima definem um sistema de 15 equações diferenciais parciais em $V \times \mathbb{R}^9$,

$$\begin{aligned} (\xi_1)_u &= f_1(u, v, \xi_1, \dots, \xi_9), \\ &\ \ \vdots \\ (\xi_9)_v &= f_{15}(u, v, \xi_1, \dots, \xi_9), \end{aligned} \tag{2a}$$

onde $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{x}_u$, $\eta = (\xi_4, \xi_5, \xi_6) = \mathbf{x}_v$, $\zeta = (\xi_7, \xi_8, \xi_9) = N$, e f_i, $i = 1, \dots, 15$ são funções lineares das coordenadas ξ_j, $j = 1, \dots, 9$, com coeficientes que dependem de u e v.

Em contraste com o que acontece com equações diferenciais ordinárias, um sistema do tipo (2a), em geral, não é integrável. Para o caso em questão, as condições que garantem a existência e a unicidade de uma solução local, para condições iniciais dadas, são

$$\xi_{uv} = \xi_{vu}, \qquad \eta_{uv} = \eta_{vu}, \qquad \zeta_{uv} = \zeta_{vu}.$$

Uma prova da afirmação acima pode ser encontrada em J. Stoker, *Differential Geometry*, Wiley-Interscience, New York, 1969, Apêndice B.

Como vimos na seção 4.3, as condições de integrabilidade são equivalentes às equações de Gauss e Mainardi-Codazzi, que são, por hipótese, satisfeitas. Portanto, o sistema (2a) é integrável.

Seja $\{\xi, \eta, \zeta\}$ uma solução de (2a) definida em uma vizinhança de $(u_0, v_0) \in V$, com condições iniciais $\xi(u_0, v_0) = \xi_0$, $\eta(u_0, v_0) = \eta_0$, $\zeta(u_0, v_0) = \zeta_0$. Evidentemente, é possível escolher condições iniciais de tal forma que

$$\begin{aligned} \langle \xi_0, \xi_0 \rangle &= E(u_0, v_0), \\ \langle \eta_0, \eta_0 \rangle &= G(u_0, v_0), \\ \langle \xi_0, \eta_0 \rangle &= F(u_0, v_0), \\ \langle \zeta_0, \zeta_0 \rangle &= 1, \\ \langle \xi_0, \zeta_0 \rangle &= \langle \eta_0, \zeta_0 \rangle = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Com a solução dada, formamos um novo sistema,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \xi, \\ \mathbf{x}_v &= \eta, \end{aligned} \tag{4}$$

que é evidentemente integrável, já que $\xi_v = \eta_u$. Seja $\mathbf{x} : \bar{V} \to \mathbb{R}^3$ uma solução de (4), em uma vizinhança $\bar{V}$ de (u_0, v_0), com $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p_0 \in \mathbb{R}^3$. Vamos mostrar que contraindo $\bar{V}$ e trocando u por v, se necessário, $\mathbf{x}(\bar{V})$ é a superfície desejada.

Mostraremos primeiro que a família $\{\xi, \eta, \zeta\}$, que é solução de (2a), tem a

seguinte propriedade. Para cada (u, v) onde a solução está definida, temos

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi \rangle &= E, \\ \langle \eta, \eta \rangle &= G, \\ \langle \xi, \eta \rangle &= F, \\ \langle \zeta, \zeta \rangle &= 1, \\ \langle \xi, \zeta \rangle &= \langle \eta, \zeta \rangle = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Com efeito, utilizando (2) para expressar as derivadas parciais de

$$\langle \xi, \xi \rangle, \qquad \langle \eta, \eta \rangle, \qquad \langle \zeta, \zeta \rangle, \qquad \langle \xi, \zeta \rangle, \qquad \langle \eta, \zeta \rangle$$

como funções desta mesmas 6 quantidades, obtemos um sistema de 12 equações diferenciais parciais:

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi \rangle_u &= B_1(\langle \xi, \xi \rangle, \langle \eta, \eta \rangle, \dots, \langle \eta, \zeta \rangle), \\ \langle \xi, \xi \rangle_v &= B_2(\langle \xi, \xi \rangle, \langle \eta, \eta \rangle, \dots, \langle \eta, \zeta \rangle), \\ &\vdots \\ \langle \eta, \zeta \rangle_v &= B_{12}(\langle \xi, \xi \rangle, \langle \eta, \eta \rangle, \dots, \langle \eta, \zeta \rangle). \end{aligned} \tag{6}$$

Como (6) foi obtido de (2a), é claro (e pode ser verficado diretamente) que (6) é integrável e que

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi \rangle &= E, \\ \langle \eta, \eta \rangle &= G, \\ \langle \xi, \eta \rangle &= F, \\ \langle \zeta, \zeta \rangle &= 1, \\ \langle \xi, \zeta \rangle &= \langle \eta, \zeta \rangle = 0 \end{aligned}$$

é uma solução de (6) com as condições iniciais (3). Por unicidade, obtemos a nossa afirmação.

Segue-se que

$$|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|^2 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2 = EG - F^2 > 0.$$

Portanto, se $\mathbf{x} : \bar{V} \to \mathbb{R}^3$ é dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \qquad (u, v) \in \bar{V},$$

uma das componentes de $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$, digamos $\partial(x,y)/\partial(u,v)$, é diferente de zero em (u_0, v_0). Portanto, podemos inverter o sistema formado pelas duas primeiras funções componentes de $\mathbf{x}$, em uma vizinhança $U \subset \bar{V}$ de (u_0, v_0), para obter uma aplicação $F(x,y) = (u,v)$. Restringindo $\mathbf{x}$ a U, a aplicação $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ é injetiva, e a sua inversa $\mathbf{x}^{-1} = F \circ \pi$ (onde π é a projeção de $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy) é contínua. Portanto, $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ é um homeomorfismo diferenciável com $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \neq 0$; logo, $\mathbf{x}(U)$ é uma superfície regular.

A partir de (5) segue-se imediatamente que E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental de $\mathbf{x}(U)$ e que ζ é um vetor normal unitário à superfície. Trocando u por v, se necessário, obtemos

$$\zeta = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = N.$$

Utilizando a expressão acima e (2), calculamos os coeficientes da segunda forma fundamental. Obtemos então

$$\langle \zeta, \mathbf{x}_u \rangle = e, \qquad \langle \zeta, \mathbf{x}_{uv} \rangle = f, \qquad \langle \zeta, \mathbf{x}_{vv} \rangle = g.$$

Assim, estes coeficientes são e, f, g e concluímos a primeira parte da demonstração.

Resta mostrar que se U é conexo, $\mathbf{x}$ é única a menos de rotações e translações de $\mathbb{R}^3$. Para isto, seja $\bar{\mathbf{x}} : U \to \mathbb{R}^3$ uma outra superfície regular com $\bar{E} = E$, $\bar{F} = F$, $\bar{G} = G$, $\bar{e} = e$, $\bar{f} = f$, $\bar{g} = g$. Como a primeira e a segunda formas fundamentais são iguais, é possível fazer com que o triedro

$$\{\bar{\mathbf{x}}_u(u_0,v_0), \bar{\mathbf{x}}_v(u_0,v_0), \bar{N}(u_0,v_0)\}$$

coincida com o triedro

$$\{\mathbf{x}_u(u_0,v_0), \mathbf{x}_v(u_0,v_0), N(u_0,v_0)\}$$

por meio de uma translação A e uma rotação ρ.

O sistema (1a) é satisfeito pelas duas soluções.

$$\begin{aligned} \xi &= \mathbf{x}_u, \qquad \eta = \mathbf{x}_v, \qquad \zeta = N, \\ \xi &= \bar{\mathbf{x}}_u, \qquad \eta = \bar{\mathbf{x}}_v, \qquad \zeta = \bar{N}. \end{aligned}$$

Como ambas as soluções coincidem em (u_0, v_0), temos por unicidade, que

$$\mathbf{x}_u = \bar{\mathbf{x}}_u, \qquad \mathbf{x}_v = \bar{\mathbf{x}}_v, \qquad N = \bar{N}, \tag{7}$$

em uma vizinhança de (u_0, v_0). Por outro lado, o subconjunto de U onde vale (7) é, por continuidade, fechado. Como U é conexo, (7) vale para todo $(u, v) \in U$.

A partir das duas primeiras equações de (7) e do fato de que U é conexo, concluímos que

$$\mathbf{x}(u, v) = \bar{\mathbf{x}}(u, v) + C,$$

onde C é um vetor constante. Como $\mathbf{x}(u_0, v_0) = \bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0)$, temos que $C = 0$, o que completa a demonstração do teorema.

Q.E.D.

5

Geometria Diferencial Global

5.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar uma introdução à geometria diferencial global. Já nos deparamos com teoremas globais (a caracterização das superfícies compactas orientáveis na seção 2.7 e o teorema de Gauss-Bonnet na seção 4.5 são alguns exemplos). Entretanto, tais teoremas apareceram mais ou menos de passagem, ao longo do caminho percorrido para estabelecer os fundamentos da teoria local das superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$. Agora, com esta meta alcançada, podemos começar um estudo mais sistemático das propriedades globais.

A geometria diferencial global lida com as relações entre propriedades locais e globais (em geral, topológicas) de curvas e superfícies. Tentamos minimizar os pré-requisitos topológicos nos restringindo aos espaços euclidianos. Apenas as propriedades mais elementares de subconjuntos conexos e compactos dos espaços euclidianos foram utilizadas. Por completitude, este material é apresentado com demonstrações no apêndice ao Capítulo 5.

Quanto à leitura deste capítulo, o leitor pode fazer uma série de escolhas, e com isto em vista, apresentaremos agora uma breve descrição das suas seções. No final da introdução, forneceremos uma tabela que indica a dependência entre as várias seções.

Na seção 5.2 vamos provar que a esfera é rígida; isto é, se uma superfície regular conexa e compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ é isométrica a uma esfera, então S é uma esfera. Exceto como motivação para a seção 5.3, esta seção não é utilizada no restante do livro.

Na seção 5.3 vamos introduzir a noção de superfície completa como um ambiente natural para os teoremas globais. Provaremos o teorema básico de

Hopf-Rinow, que afirma a existência de geodésicas minimizantes ligando quaisquer dois pontos de uma superfície completa.

Na seção 5.4 obteremos as fórmulas para a primeira e segunda variações do comprimento de arco. Como aplicação, provaremos o teorema de Bonnet: Uma superfície completa com curvatura Gaussiana maior do que uma constante positiva é compacta.

Na seção 5.5 vamos introduzir a noção fundamental de campo de Jacobi ao longo de uma geodésica γ que mede o quão rapidamente as geodésicas próximas a γ se afastam de γ. Vamos provar que se a curvatura Gaussiana de uma superfície completa S é não-positiva, então $\exp_p : T_pS \to S$ é um difeomorfismo local.

Isto levanta a questão de encontrar condições para que um difeomorfismo local seja um difeomorfismo global, o que motiva a introdução dos espaços de recobrimento na seção 5.6. A Parte A da seção 5.6 é inteiramente independente das seções anteriores. Na Parte B vamos provar dois teoremas devidos a Hadamard: (1) Se S é completa e simplesmente conexa e a curvatura Gaussiana de S é não-positiva, então S é difeomorfa a um plano. (2) Se S é compacta e tem curvatura Gaussiana positiva, então a aplicação de Gauss $N : S \to S^2$ é um difeomorfismo; em particular, S é difeomorfa a uma esfera.

Na seção 5.7 apresentaremos alguns teoremas globais para curvas. Esta seção depende apenas da parte A da seção 5.6.

Na seção 5.8 vamos provar que uma superfície completa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana nula ou é um plano ou é um cilindro.

Na seção 5.9 provaremos o chamado teorema de Jacobi: Uma arco de geodésica é minimizante relativamente às curvas próximas tendo os mesmos extremos se e somente se o tal arco não contém pontos conjugados.

Na seção 5.10 introduziremos a noção de superfície abstrata e estendemos para tais superfícies a geometria intrínseca do Capítulo 4. Exceto pelos Exercícios, esta seção é inteiramente independente das seções anteriores. No final desta seção, mencionamos algumas outras generalizações possíveis, como variedades diferenciáveis e variedades Riemannianas.

Na seção 5.11 provaremos o teorema de Hilbert, que implica a não existência de uma superfície regular completa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana negativa e constante.

No diagrama seguinte apresentamos uma tabela de dependência entre as seções deste capítulo. Por exemplo, para a seção 5.11 precisa-se das seções 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 e 5.10; para a seção 5.7, precisa-se da Parte A da seção 5.6; para

a seção 5.8 precisa-se das seções 5.3, 5.4, 5.5 e da Parte A da seção 5.6.

5.2 A Rigidez da Esfera

Convém talvez começar com um exemplo típico, embora simples, de um teorema global. Escolhemos a rigidez da esfera.

Vamos provar que a esfera é *rígida* no seguinte sentido. Seja $\varphi : \Sigma \to S$ uma isometria de uma esfera $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ sobre uma superfície regular $S = \varphi(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$. Então S é uma esfera. Intuitivamente, isto significa que não é possível deformar uma esfera feita de um material flexível, mas, inelástico.

Em verdade, vamos provar o seguinte teorema.

Teorema 1. *Seja S uma superfície regular, conexa e compacta com curvatura Gaussiana constante K. Então S é uma esfera.*

A rigidez da esfera segue-se imediatamente do Teorema 1. De fato, seja $\varphi : \Sigma \to S$ uma isometria de uma esfera Σ sobre S. Então $\varphi(\Sigma) = S$ tem curvatura constante, pois a curvatura é invariante por isometrias. Além disto, $\varphi(\Sigma) = S$ é compacta e conexa sendo a imagem por uma aplicação contínua de um conjunto compacto e conexo Σ (apêndice ao Capítulo 5, Props. 6 e 12). Segue-se então do Teorema 1 que S é uma esfera.

A primeira demonstração do Teorema 1 foi dada por H. Liebmann (1899). A demonstração que apresentamos aqui é uma modificação por S.S. Chern de

uma demonstração dada por D. Hilbert (S.S. Chern, "Some New Characterizations of the Euclidean Sphere", *Duke Math. J.* 12 (1945), 270-290; e D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie,* 3ª ed. Leipzig, 1909, Apêndice 5).

Observação 1. Deve-se notar que existem superfícies homeomorfas à esfera que não são rígidas. Um exemplo é dado na Fig. 5.1. Substituímos a região plana P da superfície S na Fig. 5.1 por uma "lombada para dentro" de forma que a superfície resultante S' seja regular. A superfície S'' formada por uma "lombada simétrica" é isométrica a S', mas não existe uma transformação linear ortogonal que leve S' em S''. Logo, S' não é rígida.

Figura 5-1

Lembramos a seguinte convenção. Escolhemos as curvatura principais k_1 e k_2 tais que $k_1(q) \geq k_2(q)$ para todo $q \in S$. Desta maneira obtemos k_1 e k_2 como funções contínuas em S que são diferenciáveis exceto, possivelmente, nos pontos umbílicos ($k_1 = k_2$) de S.

A demonstração do Teorema 1 é baseada no seguinte lema local. Na demonstração do lema vamos utilizar as equações de Mainardi-Codazzi (seção 4.3).

Lema 1. *Seja S uma superfície regular e $p \in S$ um ponto de S satisfazendo as seguintes condições:*

1. $K(p) > 0$; *isto é, a curvatura Gaussiana em* p *é positiva.*

2. p *é ao mesmo tempo um ponto de máximo local da função k_1 e um ponto de mínimo local da função* k_2 ($k_1 \geq k_2$).

Então p *é um ponto umbílico de* S.

Demonstração. Vamos supor que p não é um ponto umbílico e obter uma contradição.

Se p não é um ponto umbílico de S, é possível parametrizar uma vizinhança de p por coordenadas (u, v) tais que as curvas coordenadas são linhas de curvatura (seção 3.4). Nesta situação, $F = f = 0$, e as curvaturas principais são dadas por e/E, g/G. Como o ponto p não é umbílico, podemos admitir, intercambiando u e v se necessário, que em uma vizinhança de p

$$k_1 = \frac{e}{E}, \qquad k_2 = \frac{g}{G}. \tag{1}$$

Neste sistema de coordenadas, as equações de Mainardi-Codazzi são escritas como (seção 4.3, Eqs. (7) e (7a))

$$e_v = \frac{E_v}{2}(k_1 + k_2), \tag{2}$$

$$g_u = \frac{G_u}{2}(k_1 + k_2), \tag{3}$$

Derivando a primeira equação de (1) com relação a v e usando a Eq. (2), obtemos

$$E(k_1)_v = \frac{E_v}{2}(-k_1 + k_2). \tag{4}$$

Analogamente, derivando a segunda equação de (1) com relação a u e usando a Eq. (3),

$$G(k_2)_u = \frac{G_u}{2}(k_1 - k_2). \tag{5}$$

Por outro lado, quando $F = 0$, a fórmula de Gauss para K se reduz a (seção 4.3, Exercício 1)

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\};$$

logo,

$$-2KEG = E_{vv} + G_{uu} + ME_v + NG_u, \tag{6}$$

onde $M = M(u,v)$ e $N = N(u,v)$ são funções de (u,v), cujas expressões são irrelevantes para a demonstração. A mesma observação se aplica às funções $\bar{M}, \bar{N}$ e $\tilde{M}, \tilde{N}$, introduzidas abaixo.

A partir das Eqs. (4) e (5), obtemos expressões para E_v e G_u que, depois de derivadas e introduzidas na Eq. (6), nos dão

$$-2KEG = -\frac{2E}{k_1 - k_2}(k_1)_{vv} + \frac{2G}{k_1 - k_2}(k_2)_{uu} + \bar{M}(k_1)_v + \bar{N}(k_2)_u;$$

donde,

$$-2(k_1 - k_2)KEG = -2E(k_1)_{vv} + 2G(k_2)_{uu} + \tilde{M}(k_1)_v + \tilde{N}(k_2)_u. \tag{7}$$

Como $K > 0$ e $k_1 > k_2$ em p, o primeiro membro da Eq. (7) é estritamente negativo em p. Como k_1 atinge um máximo local em p e k_2 atinge um mínimo local em p, temos

$$(k_1)_v = 0, \qquad (k_2)_u = 0, \qquad (k_1)_{vv} \leq 0, \qquad (k_2)_{uu} \geq 0$$

em p. No entanto, isto implica que o segundo membro da Eq. (7) é positivo ou nulo, o que é uma contradição. Isto conclui a demonstração do Lema 1.

Q.E.D.

Deve-se observar que supondo na demonstração que k_1 tem um mínimo local e k_2 um máximo local em p, não se chega a contradição alguma. Em verdade, como ilustra o exemplo a seguir, tal situação pode acontecer em uma superfície com curvatura Gaussiana positiva sem pontos umbilicos.

Exemplo 1. Seja S uma superfíce de revolução dada por (cf. seção 3.3, Exemplo 4)

$$x = \varphi(v)\cos u, \qquad y = \varphi(v)\,\text{sen}\,u, \qquad z = \psi(v), \qquad 0 < u < 2\pi,$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= C\cos v, & C > 1, \\ \psi(v) &= \int \sqrt{1 - C^2\,\text{sen}^2 v}\,dv, & \psi(0) = 0. \end{aligned}$$

Tomamos $|v| < \text{arc sen}\,(1/C)$, de modo que $\psi(v)$ fique bem definida.

Utilizando expressões já conhecidas (seção 3.3, Exemplo 4), obtemos

$$\begin{aligned}
E &= C^2\cos^2 v,\\
F &= 0,\\
G &= 1,\\
e &= -C\cos v(\sqrt{1-C^2\,\mathrm{sen}^2\, v}),\\
f &= 0,\\
g &= -\frac{C\cos v}{\sqrt{1-C^2\,\mathrm{sen}^2\, v}};
\end{aligned}$$

donde,

$$k_1 = \frac{e}{E} = -\frac{\sqrt{1-C^2\,\mathrm{sen}^2\, v}}{C\cos v}, \qquad k_2 = \frac{g}{G} = -\frac{C\cos v}{\sqrt{1-C^2\,\mathrm{sen}^2\, v}}.$$

Portanto, S tem curvatura $K = k_1 k_2 = 1 > 0$, positiva e constante (cf. Exercício 7, seção 3.3).

Vê-se facilmente que $k_1 > k_2$ por toda a parte em S, já que $C > 1$. Portanto, S não tem pontos umbílicos. Além disto, como $k_1 = -(1/C)$ para $v = 0$, e

$$k_1 = -\frac{\sqrt{1-C^2\,\mathrm{sen}^2\, v}}{C\cos v} > -\frac{1}{C} \qquad \text{para } v \neq 0,$$

concluímos que k_1 atinge um mínimo (e portanto k_2 atinge um máximo, pois $K = 1$) nos pontos do paralelo $v = 0$.

A propósito, este exemplo mostra que a hipótese de compacidade no Teorema 1 é essencial, pois a superfície S (ver Fig. 5.2) tem curvatura positiva constante mas não é uma esfera.

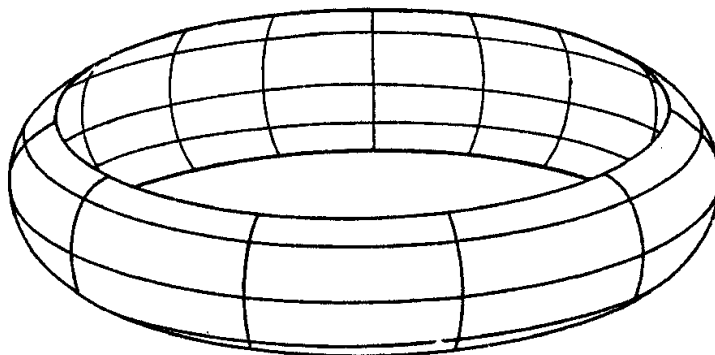



Figura 5-2

Na demonstração do Teorema 1 vamos utilizar o seguinte fato, que estabecemos como um lema.

Lema 2. *Uma superfície regular compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ tem, pelo menos, um ponto elíptico.*

Demonstração. Como S é compacta, S é limitada. Portanto, existem esferas em $\mathbb{R}^3$, centradas em um ponto fixo $O \in \mathbb{R}^3$, tais que S está contida no interior da região de qualquer uma delas. Considere o conjunto de todas as esferas com tal propriedade. Seja r o ínfimo dos seus raios e seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ a esfera de raio r centrada em O. É claro que Σ e S têm pelo menos um ponto em comum, digamos p. O plano tangente a Σ em p tem, em uma vizinhança de p, somente p como ponto comum com S. Portanto, Σ e S são tangentes em p. Observando as seções normais em p, é fácil concluir que qualquer curvatura normal de S em p é maior ou igual à curvatura correspondente de Σ em p. Portanto, $K_{S(p)} \geq K_\Sigma(p) > 0$, e p é um ponto elíptico, como desejado.

Q.E.D.

Demonstração do Teorema 1. Como S é compacta, ela possui um ponto elíptico, pelo Lema 2. Como K é constante, $K > 0$ em S.

Por compacidade, a função contínua k_1 em S atinge um máximo em um ponto $p \in S$ (apêndice ao Capítulo 5, Prop. 13). Como $K = k_1 k_2$ é uma constante positiva, k_2 é uma função decrescente de k_1, e, portanto, ela atinge um mínimo em p. Segue-se do Lema 1 que p é um ponto umbílico; isto é, $k_1(p) = k_2(p)$.

Agora, seja q um ponto qualquer de S. como estamos admitindo que $k_1(q) \geq k_2(q)$, temos que

$$k_1(p) \geq k_1(q) \geq k_2(q) \geq k_2(p) = k_1(p).$$

Portanto, $k_1(q) = k_2(q)$ para todo $q \in S$.

Segue-se que todos os pontos de S são pontos umbílicos e, pela Prop. 5 da seção 3.2, S está contido em uma esfera ou em um plano. Como $K > 0$, S está contida em uma esfera Σ. Por compacidade, S é fechada em Σ, e como S é uma superfície regular, S é aberta em Σ. Como Σ é conexa e S é aberta e fechada em Σ, $S = \Sigma$ (apêndice ao Capítulo 5, Prop. 5).

Portanto, a superfície S é uma esfera.

Q.E.D.

Observe que na demonstração do Teorema 1 a hipótese de que $K = k_1 k_2$ é constante foi usada apemas para garantir que k_2 fosse uma função decrescente de k_1. A mesma conclusão é válida ao supormos que a curvatura média $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ é constante. Isto nos permite enunciar

Teorema 1a. *Seja S uma superfície regular compacta e conexa com curvatura Gaussiana $K > 0$ e curvatura média H constante. Então S é uma esfera.*

A demonstração é inteiramente análoga à que foi dada para o Teorema 1. Em verdade, o argumento se aplica sempre que $k_2 = f(k_1)$, onde f é uma função decrescente de k_1. Mais precisamente, temos

Teorema 1b. *Seja S uma superfície regular compacta e conexa com curvatura Gaussiana positiva. Se existe uma relação $k_2 = f(k_1)$ em S, onde f é uma função decrescente de k_1, $k_1 \geq k_2$, então S é uma esfera.*

Observação 2. As superfícies compactas e conexas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana $K > 0$ são chamadas *ovalóides*. Portanto, o Teorema 1a pode ser enunciado da seguinte maneira: *Um ovalóide com curvatura média constante é uma esfera.*

Por outro lado, uma conseqüência simples do teorema de Gauss-Bonnet é que um ovalóide é homemorfo a uma esfera (cf. seção 4.5, aplicação1). H. Hopf provou que o Teorema 1a continua válido com o enunciado seguinte (mais forte): *Uma superfície regular com curvatura média constante que é homeomorfa a uma esfera é uma esfera.* Um teorema devido a A. Alexandroff estende este resultado ao substituir a condição de ser homeomorfa à esfera por compacidade: *Uma superfície regular conexa e compacta com curvatura média constante é uma esfera.*

Uma exposição dos resultados mencionados acima pode ser encontrado em Hopf [11]. (As referências estão listadas no final do livro.)

Observação 3. A rigidez da esfera pode ser obtida como uma conseqüência de um teorema geral de rigidez de ovalóides. Este teorema, devido a Cohn-Vossen, afirma o seguinte: *Dois ovalóides isométricos diferem por um movimento rígido de $\mathbb{R}^3$.* Uma demonstração pode ser encontrada em Chern [10].

O Teorema 1 é um resultado típico da geometria diferencial global, isto é, a informação sobre entidades locais (neste caso, a curvatura) junto com hipóteses

globais fracas (neste caso, compacidade e conexidade) implicam fortes restrições sobre a superfície como um todo (neste caso, ser uma esfera). Observe que o único efeito da conexidade é impedir a ocorrência de duas ou mais esferas na conclusão do Teorema 1. Por outro lado, a hipótese de compacidade é essencial em vários aspectos, uma de suas funções sendo a de assegurar que obtemos a esfera inteira e não apenas uma superfície contida em uma esfera.

Exercícios

1. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e fixe um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $p_0 \notin S$. Seja $d : S \to \mathbb{R}$ a função diferenciável definida por $d(q) = \frac{1}{2}|q - p_0|^2$, $q \in S$. Como S é compacta, existe $q_0 \in S$ tal que $d(q_0) \geq d(q)$ para todo $q \in S$. Prove que q_0 é um ponto elíptico de S (isto fornece uma outra demonstração do Lema 2).

2. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular com curvatura Gaussiana $K > 0$ e sem pontos umbílicos. Prove que não existem pontos em S onde ao mesmo tempo H é máximo e K é mínimo.

3. (*Observação de Kazdan-Warner.*) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta de revolução estendida (cf. Observação 4, seção 2.3) obtida pela rotação da curva

$$\alpha(s) = (0, \varphi(s), \psi(s)),$$

parametrizada pelo comprimento de arco $s \in [0, l]$, em torno do eixo Oz. Aqui $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ e $\varphi(s) > 0$ para todo $s \in (0, l)$. A regularidade de S nos pólos implica ainda que $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(l) = -1$ (cf. Exercício 10, seção 2.3). Sabemos também que a curvatura Gaussiana de S é dada por $K = -\varphi''(s)/\varphi(s)$ (cf. Exemplo 4, seção 3.3).

***a.** Prove que

$$\int_0^l K'\varphi^2\, ds = 0, \qquad K' = \frac{dK}{ds}.$$

b. Conclua, a partir da parte **a**, que não existe superfície compacta de revolução estendida compacta em $\mathbb{R}^3$ com curvatura monótona crescente.

O exercício seguinte fornece as linhas gerais da demonstração do teorema de Hopf: *Uma superfície regular com curvatura média constante que é homeomorfa a uma esfera é uma esfera.* (cf. Observação 2). A idéia fundamental de Hopf foi usada muitas vezes em trabalhos subsequentes. O exercício requer alguns conhecimentos básicos sobre funções de uma variável complexa.

4. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ uma conjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^2$ e seja $\mathbf{x} : U \to S$ uma parametrização isotérmica (i.e. $E = G$, $F = 0$; cf. seção 4.2) de uma superfície regular S. Identificamos $\mathbb{R}^2$ com o plano complexo $\mathbb{C}$ colocando $u + iv = \zeta$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\zeta \in \mathbb{C}$. ζ é chamado de *parâmetro complexo* correspondendo a $\mathbf{x}$. Seja $\phi : \mathbf{x}(U) \to \mathbb{C}$ a função com valores complexos dada por

$$\phi(\zeta) = \phi(u,v) = \frac{e-g}{2} - if = \phi_1 + i\phi_2,$$

onde e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental de S.

a. Mostre que as equações de Mainardi-Codazzi (cf. seção 4.3) podem ser escritas, na parametrização isotérmica $\mathbf{x}$, como

$$\left(\frac{e-g}{2}\right)_u + f_v = EH_u, \qquad \left(\frac{e-g}{2}\right)_v - f_u = -EH_v$$

e conclua que a curvatura média H de $\mathbf{x}(U) \subset S$ é constante se e somente se ϕ é uma função analítica de ζ (i.e., $(\phi_1)_u = (\phi_2)_v$, $(\phi_1)_v = -(\phi_2)_u$).

b. Defina a "derivada complexa"

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right),$$

e prove que $\phi(\zeta) = -2 < \mathbf{x}_\zeta, N_\zeta >$, onde, por exemplo, $\mathbf{x}_\zeta$ denota o vetor com coordenadas complexas

$$\mathbf{x}_\zeta = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}, \frac{\partial y}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right).$$

c. Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to V \subset \mathbb{C}$ uma função complexa e injetiva dada por $f(u+iv) = x + iy = \eta$. Mostre que (x,y) são parâmetros isotérmicos em

S (i.e. η é um parâmetro complexo em S) se e somente se f é analítica e $f'(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in U$. Seja $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ f^{-1}$ a parametrização correspondente e defina $\psi(\eta) = -2 < \mathbf{y}_\eta, N_\eta >$. Mostre que em $\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$,

$$\phi(\zeta) = \psi(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^2. \qquad (*)$$

d. Seja S^2 a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$. Use a projeção estereográfica (cf. Exercício 16, seção 2.2) a partir dos pólos $N = (0,0,1)$ e $S = (0,0,-1)$ para cobrir S^2 por vizinhanças coordenadas de dois parâmetros isotérmicos complexos ζ e η, com $\zeta(S) = 0$ e $\eta(N) = 0$, de tal modo que na interseção W destas vizinhanças coordenadas (a esfera menos os dois pólos) $\eta = \zeta^{-1}$. Suponha que existe em cada vizinhança coordenada funções analíticas $\phi(\zeta)$ e $\psi(\eta)$ tal que $(*)$ vale em W. Utilize o teorema de Liouville para provar que $\phi(\zeta) \equiv 0$ (donde, $\psi(\eta) \equiv 0$).

e. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular com curvatura média constante homeomorfa a uma esfera. Suponha que existe um difeomorfismo conforme $\phi : S \to S^2$ de S sobre a esfera unitária (isto é uma conseqüência do teorema de uniformização para superfícies de Riemann que iremos admitir). Sejam $\tilde{\zeta}$ e $\tilde{\eta}$ os parâmetros complexos correspondendo por ϕ aos parâmetros ζ e η de S^2 dados na parte **d**. Pela parte **a**, a função $\phi(\tilde{\zeta}) = (e-g)/2) - if$ é analítica. A função análoga $\psi(\tilde{\eta})$ também é analítica, e pela parte **c** elas estão relacionadas por $(*)$. Utilize a parte **d** para mostrar que $\phi(\tilde{\zeta}) \equiv 0$ (donde, $\psi(\tilde{\eta}) \equiv 0$). Conclua que S é constituida de pontos umbílicos e, portanto, é uma esfera. Isto demonstra o teorema de Hopf.

5.3 Superfícies Completas. Teorema de Hopf-Rinow

Todas as superfícies que iremos considerar a partir de agora, salvo menção em contrário, serão regulares e conexas.

As considerações no final da seção 5.1 mostram que para obtermos teoremas globais precisamos, além da conexidade, de alguma hipótese global para

assegurar que a superfície não possa ser "estendida" como uma superfície regular. É claro que a compacidade serve a este propósito. No entanto, seria útil dispor de uma hipótese mais fraca do que a compacidade que tivesse o mesmo efeito. Isto iria nos permitir esperar teoremas globais em uma situação mais geral do que a dada pela compacidade.

Uma formulação mais precisa do conceito de que uma superfície não pode ser estendida é dada na definição a seguir.

DEFINIÇÃO 1. *Uma supefície regular (conexa) S é chamada* estendível *se existe um superfície regular (conexa) $\bar{S}$ tal que $S \subset \bar{S}$ como um subconjunto próprio. Se não existe uma tal $\bar{S}$, S é chamada* não-estendível.

Infelizmente, a classe de superfícies não-estendíveis é muito grande para permitir resultados interessantes. Uma hipótese mais adequada é dada pela

DEFINIÇÃO 2. *Uma superfíce regular S é denominada* completa *quando para qualquer ponto $p \in S$, qualquer geodésica parametrizada $\gamma : [0, \varepsilon) \to S$ de S, começando em $p = \gamma(0)$, pode ser estendida em uma geodésica parametrizada $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \to S$, definida sobre toda a reta real $\mathbb{R}$.*

Vamos provar mais adiante (Prop. 1) que qualquer superfície completa é não-estendível e que existem superfícies não-estendíveis que não são completas (Exemplo 1). Portanto, a hipótese de completitude é mais forte do que a de não-estendibilidade. Além disto, vamos provar (Prop. 5) que toda superfíce fechada em $\mathbb{R}^3$ é completa; isto é, a hipótese de completitude é mais fraca do que a de compacidade.

O objetivo desta seção é provar que dados dois pontos $p, q \in S$ de uma superfície completa existe uma geodésica ligando p a q que é minimizante (isto é, o seu comprimento é menor ou igual do que o de qualquer outra curva ligando p a q). Este resultado fundamental foi originalmente demonstrado por Hopf e Rinow (H. Hopf, W. Rinow, "Über den Begriff der völlstandigen differentialgeometrischen Flächen," *Comm. Math. Helv.* 3 (1931), 209-225). Este teorema é o principal motivo pelo qual que as superfícies completas são mais adequadas à geometria diferencial do que as não-estendíveis.

Vejamos agora alguns exemplos. O plano é evidentemente uma superfície completa. O cone menos o vértice não é uma superfície completa, pois quando estendemos suficientemente uma geratriz (que é uma geodésica) atingimos o vértice, que não pertence à superfície. A esfera é uma superfíce completa,

pois as suas geodésicas parametrizads (cujos traços são os grandes círculos da esfera) podem ser definidas para qualquer valor real. O cilindro também é uma superfície completa pois as suas geodésicas são círculos, retas e hélices, que estão definidas para todos os valores reais.

Por outro lado, uma superfície $S - \{p\}$, obtida ao removermos um ponto p de uma superfície completa S, não é completa. De fato, alguma geodésica γ de S deve passar por p. Tomando um ponto q, próximo a p em γ (Fig. 5.3), existe uma geodésica parametrizada de $S - \{p\}$ que começa em q e não pode ser estendida até p (este argumento será apresentado com detalhes na Prop. 1). Assim, uma esfera menos um ponto e um cilindro menos um ponto não são superfícies completas.

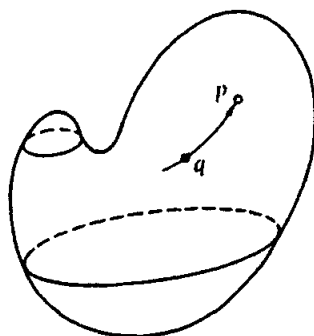



Figura 5-3

Proposição 1. *Uma superfíce completa S é não-estendível.*

Demonstração. Vamos supor que S é estendível e obter uma contradição. Dizer que S é estendível significa que existe uma superfície regular (conexa) $\bar{S}$ com $S \subset \bar{S}$. Como S é uma superfície regular, S é aberta em $\bar{S}$. A fronteira (apêndice ao Capítulo 5, Def. 4) $Fr\, S$ de S em $\bar{S}$ é não-vazia; caso contrário, $\bar{S} = S \cup (\bar{S} - S)$ seria a união de dois conjuntos abertos disjuntos S e $\bar{S} - S$, o que contradiz a conexidade de $\bar{S}$ (apêndice ao Capítulo 5, Def. 10). Portanto, existe um ponto $p \in Fr\, S$, e como S é aberto em $\bar{S}$, $p \notin S$.

Seja $\bar{V} \subset \bar{S}$ uma vizinhança de p em $\bar{S}$ tal que todo $q \in \bar{V}$ pode ser ligado a p por uma única geodésica de $\bar{S}$ (seção 4.6, Prop. 2). Como $p \in Fr\, S$, algum $q_0 \in \bar{V}$ pertence a S. Seja $\bar{\gamma} : [0,1] \to \bar{S}$ uma geodésica de $\bar{S}$, com $\bar{\gamma}(0) = p$ e $\bar{\gamma}(1) = q_0$. É claro que $\alpha : [0, \varepsilon) \to S$, dada por $\alpha(t) = \bar{\gamma}(1-t)$, é uma geodésica de S, com $\alpha(0) = q_0$, cuja extensão à reta real $\mathbb{R}$ passaria por p em $t = 1$ (Fig. 5.4). Como $p \notin S$, esta geodésica não pode ser estendida, o que contradiz a hipótese de completitude e conclui a demonstração.

Q.E.D.

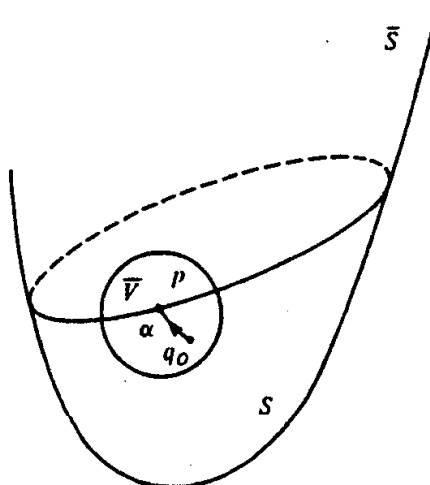



Figura 5-4

A recíproca da Prop. 1 é falsa, como ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo 1. Quando removemos o vértice p_0 do cone de uma folha dado por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

obtemos uma superfície regular S. S não é completa pois as geratrizes não podem ser estendidas para todo valor do comprimento de arco sem atingir o vértice.

Vamos mostrar que S é não-estendível supondo que $S \subset \bar{S}$, onde $\bar{S} \neq S$ é uma superfície regular, e obtendo uma contradição. O argumento consiste em mostrar que a fronteira de S em $\bar{S}$ se reduz ao vértice p_0 e que existe uma vizinhança $\bar{W}$ de p_0 em $\bar{S}$ tal que $\bar{W} - \{p_0\} \subset S$. Mas isto contradiz o fato de que o cone (com o vértice p_0 incluído) não é uma superfície regular em p_0 (seção 2.2, Exemplo 5).

Primeiro, observamos que a única geodésica de S, começando em um ponto $p \in S$, que não pode ser estendida para todo valor do parâmetro é o meridiano (geratriz) que passa por p (ver Fig. 5.5). Este fato pode ser verificado facilmente através, por exemplo, da relaçao de Clairaut (seção 4.4, Exemplo 5) e será deixado como um exercício (Exercício 2).

Seja agora $p \in Fr\, S$, onde $Fr\, S$ denota a fronteira de S em $\bar{S}$ (como vimos na Prop. 1, $Fr\, S \neq \emptyset$). Como S é um conjunto aberto em $\bar{S}$, $p \notin S$. Seja $\bar{V} \subset \bar{S}$ uma vizinhança de p em $\bar{S}$ tal que todo ponto de $\bar{V}$ pode ser ligado a p por uma única geodésica de $\bar{S}$ em $\bar{V}$. Como $p \in Fr\, S$, existe $q \in \bar{V} \cap S$. Seja $\bar{\gamma}$ uma geodésica de $\bar{S}$ ligando p a q. Como S é um conjunto aberto em $\bar{S}$, $\bar{\gamma}$ coincide com a geodésica γ de S em uma vizinhança de q. Seja p_0 o primeiro

ponto de $\bar{\gamma}$ que não pertence a S. Pela observação inicial, $\bar{\gamma}$ é um meridiano e p_0 é o vértice. Além disto, $p_0 = p$; caso contrário, existiria uma vizinhança de p que não conteria p_0. Repetindo o argumento para esta vizinhança, obteríamos um vértice diferente de p_0, o que é uma contradição. Logo a $Fr\, S$ reduz-se ao vértice p_0.

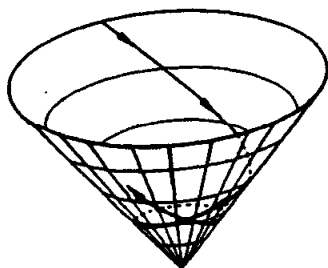



Figura 5-5

Seja agora $\bar{W}$ uma vizinhança de p_0 em $\bar{S}$ tal que quaisquer dois pontos de $\bar{W}$ possam ser ligados por uma geodésica de $\bar{S}$ (seção 4.7, Prop. 1). Vamos provar que $\bar{W} - \{p_0\} \subset S$. De fato, os pontos de γ pertencem a S. Por outro lado, um ponto $r \in \bar{W}$ que não pertence a γ nem a nenhuma de suas extensões pode ser ligado a um ponto t de γ, $t \neq p_0$, $t \in \bar{W}$, por uma geodésica α, diferente de γ (ver Fig. 5.6). Pela observação inicial, todo ponto de α, em particular r , pertence a S. Finalmente, os pontos da extensão de γ, exceto p_0, também pertencem a S; caso contrário, eles pertenceriam à fronteira de S, que provamos ser constituida apenas de p_0.

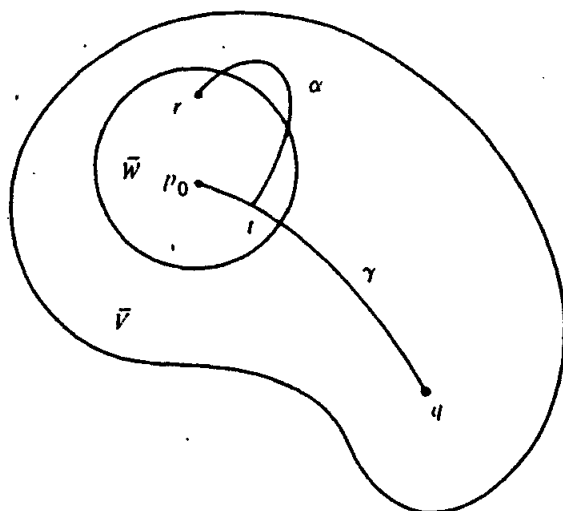



Figura 5-6

Desta maneira, nossas afirmações ficam demonstradas. Assim, S é não-estendível e obtemos o exemplo desejado.

Para o que vem a seguir, convém introduzir uma noção de distância entre dois pontos de S que depende apenas da geometria intrínseca de S e não da maneira como S está imersa em $\mathbb{R}^3$ (cf. Observação 1, seção 4.2). Observe que, como $S \subset \mathbb{R}^3$, é possível definir a distância entre dois pontos de S como a distância entre estes pontos em $\mathbb{R}^3$. No entanto, esta distância depende da segunda forma fundamental, e, por isto, não é adequada aos propósitos deste capítulo.

Precisamos de alguns preliminares.

Dizemos que uma aplicação contínua $\alpha : [a, b] \to S$ de um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ da reta real sobre uma superfície S é uma curva parametrizada, diferenciável por partes, ligando $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$ se existe uma partição de $[a, b]$ por pontos $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t_{k+1} = b$ tal que α é diferenciável em $[t_i, t_i + 1]$ $i = 0, \ldots, k$. O comprimento $l(\alpha)$ de α é definido como

$$l(\alpha) = \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\alpha'(t)|\, dt.$$

Proposição 2. *Dados dois pontos* p, q $\in$ S *de uma superfície regular (conexa)* S, *existe uma curva parametrizada diferenciável por partes ligando* p *a* q.

Demonstração. Como S é conexa, existe uma curva contínua $\alpha : [a, b] \to S$ com $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$. Seja $t \in [a, b]$ e seja I_t um intervalo aberto em $[a, b]$, contendo t, tal que $\alpha(I_t)$ esteja contido em uma vizinhança coordenada de $\alpha(t)$. A união $\cup I_t$, $t \in [a, b]$, cobre $[a, b]$ e, por compacidade, um número finito $I_1, \ldots, I_n$ ainda cobre $[a, b]$. Portanto, é possível decompor I por pontos $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = b$ de tal modo que $[t_i, t_{i+1}]$ esteja contido em algum I_j, $j = 1, \ldots, n$. Assim, $\alpha(t_i, t_{i+1})$ está contido em uma vizinhança coordenada.

Como $p = \alpha(t_0)$ e $\alpha(t_1)$ estão na mesma vizinhança coordenada $\mathbf{x}(U) \subset S$ é possível ligá-los por uma curva diferenciável, a saber, a imagem por $\mathbf{x}$ de uma curva diferenciável em $U \subset \mathbb{R}^2$ ligando $\mathbf{x}^{-1}(\alpha(t_0))$ e $\mathbf{x}^{-1}(\alpha(t_1))$. Através deste processo, ligamos $\alpha(t_i)$ a $\alpha(t_{i+1})$, $i = 0, \ldots, k$, por curvas diferenciáveis. Isto nos dá uma curva diferenciável por partes, ligando $p = \alpha(t_0)$ a $q = \alpha(t_{k+1})$, e conclui a demonstração da proposição. **Q.E.D.**

Sejam agora $p, q \in S$ dois pontos de uma superfície regular S. Denotamos por $\alpha_{p,q}$ uma curva parametrizada regular por partes ligando p a q, e por $l(\alpha_{p,q})$ o seu comprimento. A Proposição 2 mostra que o conjunto de todas as $\alpha_{p,q}$ é não-vazio. Assim, podemos colocar a seguinte:

DEFINIÇÃO 3. *A* distância *(intrínseca) $d(p,q)$ do ponto $p \in S$ ao ponto $q \in S$ é o número*

$$d(p,q) = \inf l(\alpha_{p,q}),$$

onde o inf *é tomado sobre todas as curvas diferenciáveis por partes ligando p a q.*

Proposição 3. *A distância* d *definida acima tem as seguintes propriedades,*

1. $d(p,q) = d(q,p)$,
2. $d(p,q) + d(q,r) \geq d(p,r)$,
3. $d(p,q) \geq 0$,
4. $d(p,q) = 0$ *se e somente se* $p = q$,

onde p, q, r são pontos arbitrários de S.

Demonstração. A Propriedade 1 é imediata, já que cada curva parametrizada

$$\alpha : [a,b] \to S,$$

com $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$ nos fornece uma curva parametrizada $\tilde{\alpha} : [a,b] \to S$, definida por $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(a - t + b)$. É claro que $\tilde{\alpha}(a) = q$, $\tilde{\alpha}(b) = p$ e $l(\alpha_{p,q}) = l(\tilde{\alpha}_{q,p})$.

A Propriedade 2 segue-se do fato de que quando A e B são conjunto de números reais e $A \subseteq B$ então $\inf A \geq \inf B$.

A Propriedade 3 segue-se do fato de que o ínfimo de números positivos é positivo ou nulo.

Vamos agora provar a Propriedade 4. Seja $p = q$. Então tomando a curva constante $\alpha : [a,b] \to S$, dada por $\alpha(t) = p$, $t \in [a,b]$, temos $l(\alpha) = 0$; donde, $d(p,q) = 0$.

Para provar que $d(p,q) = 0$ implica que $p = q$ procedemos da seguinte maneira. Vamos supor que $d(p,q) = \inf l(\alpha_{p,q}) = 0$ e $p \neq q$. Seja V uma vizinhança de p em S, com $q \notin V$, e tal que todo ponto de V possa ser ligado a p por uma única geodésica em V. Seja $B_r(p) \subset V$ a região limitada por um círculo geodésico de raio r, centrado em p, e contido em V. Por definição de

ínfimo, dado $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < r$, existe uma curva parametrizada regular por partes $\alpha : [a,b] \to S$ ligando p a q e com $l(\alpha) < \varepsilon$. Como $\alpha([a,b])$ é conexo e $q \notin B_r(p)$, existe um ponto $t_0 \in [a,b]$ tal que $\alpha(t_0)$ pertence à fronteira de $B_r(p)$. Segue-se que $l(\alpha) \geq r > \varepsilon$, o que é uma contradição. Portanto, $p = q$, e isto conclui a demonstração da proposição.

Q.E.D.

Corolário. $|d(p,r) - d(r,q)| \leq d(p,q)$.

Basta observar que

$$\begin{aligned} d(p,r) &\leq d(p,q) + d(q,r), \\ d(r,q) &\leq d(r,p) + d(p,q); \end{aligned}$$

donde,

$$-d(p,q) \leq d(p,r) - d(r,q) \leq d(p,q).$$

Proposição 4. *Seja $p_0 \in S$ um ponto de S. Então a função $f : S \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = d(p_0, p)$, $p \in S$, é contínua em S.*

Demonstração. Temos que mostrar que para cada $p \in S$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $q \in B_\delta(p) \cap S$, onde $B_\delta(p) \subset \mathbb{R}^3$ é uma bola aberta de $\mathbb{R}^3$ centrada em p e com raio δ, então $|f(p) - f(q)| = |d(p_0,p) - d(p_0,q)| < \varepsilon$.

Seja $\varepsilon' < \varepsilon$ tal que a aplicação exponencial $\exp_p T_pS \to S$ é um difeomorfismo no disco $B_{\varepsilon'}(0) \subset T_pS$, onde 0 é a origem de T_pS, e coloque $\exp_p(B_{\varepsilon'}(0)) = V$. Evidentemente, V é um conjunto aberto em S; logo, existe uma bola aberta $B_\delta(p)$ em $\mathbb{R}^3$ tal que $B_\delta(p) \cap S \subset V$. Assim, se $q \in B_\delta(p) \cap S$,

$$|d(p_0,p) - d(p_0,q)| \leq d(p,q) < \varepsilon' < \varepsilon,$$

o que completa a demonstração.

Q.E.D.

Observação 1. Os leitores com conhecimentos elementares de topologia irão notar que a Prop. 3 mostra que a função $d : S \times S \to \mathbb{R}$ induz uma estrutura de espaço métrico em S. Por outro lado, como subconjunto de um espaço métrico, $S \subset \mathbb{R}^3$ tem uma métrica induzida $\bar{d}$. Um fato importante é que

estas duas métricas determinam a mesma topologia, isto é, a mesma família de conjuntos abertos em S. Isto segue-se do fato de que $\exp_p : U \subset T_p \to S$ é um difeomorfismo local, e a sua demonstração é análoga à da Prop. 4.

Terminados os preliminares, podemos agora fazer a seguinte observação.

Proposição 5. *Uma superfície fechada $S \subset \mathbb{R}^3$ é completa.*

Demonstração. Seja $\gamma : [0, \varepsilon) \to S$ uma geodésica parametrizada de S, $\gamma(0) = p \in S$, que podemos supor, sem perda de generalidade, ser parametrizada pelo comprimento de arco. Precisamos mostrar que é possível estender γ a uma geodésica $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \to S$, definida em toda a reta $\mathbb{R}$. Observe primeiro que quando $\bar{\gamma}(s_0)$, $s_0 \in \mathbb{R}$, está definida, então, pelo teorema de existência e unicidade de geodésicas (seção 4.4, Prop. 5), é possível estender $\bar{\gamma}$ a uma vizinhança de s_0 em $\mathbb{R}$. Portanto, o conjunto de todos os $s \in \mathbb{R}$ onde $\bar{\gamma}$ está definida é aberto em $\mathbb{R}$. Se conseguirmos provar que este conjunto é fechado em $\mathbb{R}$ (que é conexo), será possível definir $\bar{\gamma}$ para todos os pontos de $\mathbb{R}$, e a prova estará completa.

Vamos supor que $\bar{\gamma}$ está definida para $s < s_0$ e mostrar que $\bar{\gamma}$ está definida para $s = s_0$. Considere uma seqüência $\{s_n\} \to s_0$, $s_n < s_0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Vamos mostrar primeiro que a seqüência $\{\bar{\gamma}(s_n)\}$ converge em S. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que se $n, m > n_0$, então $|s_n - s_m| < \varepsilon$. Denote por $\bar{d}$ a distância em $\mathbb{R}^3$, e observe que se $p, q \in S$, então $\bar{d}(p, q) \leq d(p, q)$. Assim,

$$\bar{d}(\bar{\gamma}(s_n), \bar{\gamma}(s_m)) \leq d(\bar{\gamma}(s_n), \bar{\gamma}(s_m)) \leq |s_n - s_m| < \varepsilon,$$

onde a segunda desigualdade vem da definição de d e do fato de que $|s_n - s_m|$ é o comprimento de arco da curva $\bar{\gamma}$ entre s_n e s_m. Segue-se que $\{\bar{\gamma}(s_n)\}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}^3$; logo, ela converge para um ponto $q \in \mathbb{R}^3$ (apêndice ao Capítulo 5, Prop. 4). Como q é um ponto de acumulação de $\{\bar{\gamma}(s_n)\}$ e S é fechada, $q \in S$, o que prova a nossa afirmação.

Sejam agora W e δ a vizinhança de q e o número dados pela Prop. 1 da seção 4.7. Sejam $\bar{\gamma}(s_n), \bar{\gamma}(s_m) \in W$ pontos tais que $|s_n - s_m| < \delta$, e seja γ a única geodésica com $l(\gamma) < \delta$ ligando $\bar{\gamma}(s_n)$ a $\bar{\gamma}(s_m)$. Evidentemente, $\bar{\gamma}$ coincide com γ. Como $\exp_{\bar{\gamma}(s_n)}$ é um difeomorfismo em $B_\delta(0)$ e $\exp_{\bar{\gamma}(s_n)}(B_\delta(0)) \supset W$, γ estende $\bar{\gamma}$ além de q. Assim, $\bar{\gamma}$ está definida em $s = s_0$, o que completa a demonstração.

Q.E.D.

Corolário. *Uma superfície compacta é completa.*

Observação 2. A recíproca da Prop. 5 não vale. Por exemplo, vê-se facilmente que um cilindro reto erguido sobre uma curva plana que é assintótica a um círculo é completo mas não é fechado (Fig. 5.7).

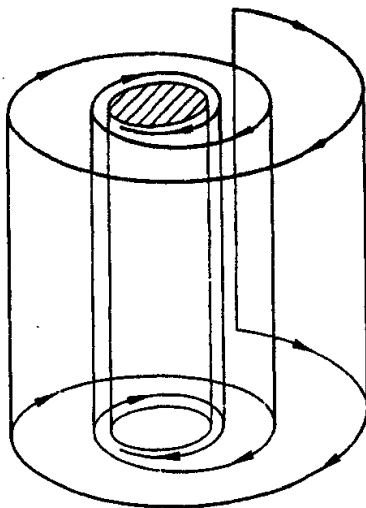



Figura 5-7. Superfície completa não-fechada.

Dizemos que uma geodésica ligando dois pontos $p, q \in S$ é *minimizante* se o seu comprimento $l(\gamma)$ é menor do que ou igual ao comprimento de qualquer curva regular por partes ligando p a q (cf. seção 4.7). Isto equivale a dizer que $l(\gamma) = d(p, q)$, pois, dada uma curva diferenciável por partes α ligando p a q, podemos encontrar uma curva regular por partes ligando p a q com comprimento menor (ou, pelo menos, que não seja maior) do que o de α. A demonstração desta última afirmação será deixada como um exercício.

Observe que uma geodésica minimizante pode não existir, como mostramos no exemplo a seguir.

Seja $S^2 - \{p\}$ a superfície formada pela esfera S^2 menos o ponto $p \in S^2$. Tomando, sobre o meridiano que passa por p, dois pontos p_1 e p_2, simétricos em relação a p e suficientemente próximos de p, vê-se que não existe uma geodésica minimizante ligando p_1 a p_2 na superfície $S^2 - \{p\}$ (ver Fig. 5.8).

Por outro lado, pode existir uma infinidade de geodésicas minimizantes ligando dois pontos em uma superfície, como acontece, por exemplo, com dois pontos antípodas de uma esfera; todos os meridianos que ligam estes pontos antípodas são geodésicas minimizantes.

O principal resultado desta seção é que em uma superfíce completa sempre existe uma geodésica minimizante ligando dois pontos dados.

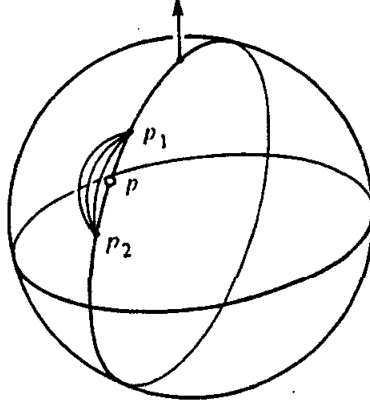



Figura 5-8

Teorema (Hopf-Rinow). *Seja S uma superfície completa. Dados dois pontos $p, q \in S$, existe uma geodésica minimizante ligando p a q.*

Demonstração. Seja $r = d(p, q)$ a distância entre os pontos p e q. Seja $B_\delta(0) \in T_pS$ um disco de raio δ, centrado na origem 0 do plano tangente T_pS e contido em uma vizinhança $U \subset T_pS$ de 0, onde $\exp_p$ é um difeomorfismo. Seja $B_\delta(p) = \exp_p(B_\delta(0))$. Observe que a fronteira $\partial B_\delta(0) = \Sigma$ é compacta pois é a imagem por uma aplicação contínua do conjunto compacto $\partial B_\delta(0) \subset T_pS$.

Se $x \in \Sigma$, a função contínua $d(x, q)$ atinge um mínimo em um ponto x_0 do conjunto compacto Σ. O ponto x_0 pode ser escrito como

$$x_0 = \exp_p(\delta v), \qquad |v| = 1, \ v \in T_pS.$$

Seja γ a geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, dada por (ver Fig. 5.9)

$$\gamma(s) = \exp_p(sv).$$

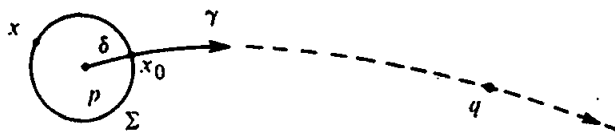



Figura 5-9

Como S é completa, γ está definida para todo $s \in R$. Em particular, γ está definida no intervalo $[0, r]$. Se mostrarmos que $\gamma(r) = q$, então γ tem que ser uma geodésica ligando p a q que é minimizante, pois $l(\gamma) = r = d(p, q)$, e a demonstração estará terminada.

Para provar isto, vamos mostrar que se $s \in [\delta, r]$, então

$$d(\gamma(s), q) = r - s. \tag{1}$$

A Equação (1) implica, para $s = r$, que $\gamma(r) = q$, como desejado.

Para provar a Eq. (1), iremos primeiro mostrar que ela vale para $s = \delta$. Observe que o conjunto $A = \{s \in [\delta, r];$ onde vale a Eq.(1) $\}$ é evidentemente fechado em $[0, r]$. Em seguida mostramos que se $s_0 \in A$ e $s_0 < r$, então a Eq.(1) vale para $s_0 + \delta'$, onde $\delta' > 0$ e suficientemente pequeno. Segue-se então que $A = [\delta, r]$ e a Eq. (1) estará provada.

Vamos então mostrar que a Eq. (1) vale para $s = \delta$. De fato, como toda curva ligando p a q intersecta Σ, temos, denotando por x um ponto arbitrário de Σ,

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \inf_{\alpha} l(\alpha_{p,q}) = \inf_{x \in \Sigma} \{\inf_{\alpha} l(\alpha_{p,x}) + \inf_{\alpha} l(\alpha_{x,q})\} \\ &= \inf_{x \in \Sigma} (d(p, x) + d(x, q)) = \inf_{x \in \Sigma} (\delta + d(x, q)) \\ &= \delta + d(x_0, q). \end{aligned}$$

donde,

$$d(\gamma(\delta), q) = r - \delta,$$

que é a Eq. (1) para $s = \delta$.

Agora vamos mostrar que se a Eq. (1) vale para $s_0 \in [\delta, r]$, então, para $\delta' > 0$ e suficientemente pequeno, ela vale para $s_0 + \delta'$.

Seja $B_\delta(0)$ um disco no plano tangente $T_{\gamma(s_0)}S$, centrado na origem 0 deste plano e contido em uma vizinhança U', onde $\exp_{\gamma(s_0)}$ é um difeomorfismo. Seja $B_{\delta'}(\gamma(s_0)) = \exp_{\gamma(s_0)}(B_{\delta'}(0))$ e $\Sigma' = \partial B_{\delta'}(\gamma(s_0))$. Se $x' \in \Sigma'$, a função contínua $d(x', q)$ atinge um mínimo em $x'_0 \in \Sigma'$ (ver Fig. 5.10). Então, como anteriormente,

$$\begin{aligned} d(\gamma(s_0), q) &= \inf_{x' \in \Sigma'} \{d(\gamma(s_0), x') + d(x', q)\} \\ &= \delta' + d(x'_0, q). \end{aligned}$$

Como a Eq. (1) vale em s_0, temos que $d(\gamma(s_0), q) = r - s_0$. Portanto,

$$d(x_0', q) = r - s_0 - \delta'. \tag{2}$$

Além disto, como

$$d(p, x_0') \geq d(p, q) - d(q, x_0'),$$

obtemos da Eq. (2)

$$d(p, x_0') \geq r - (r - s_0) + \delta' = s_0 + \delta'.$$

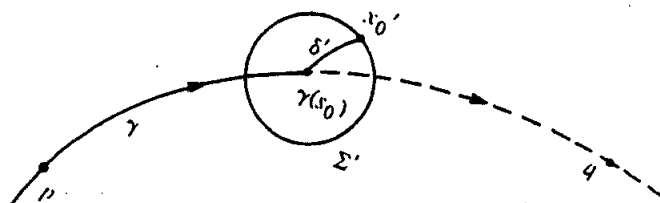



Figura 5-10

Observe agora que a curva que vai de p a $\gamma(s_0)$ por γ e de $\gamma(s_0)$ a x_0' por uma geodésica radial de $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ tem comprimento exatamente igual a $s_0 + \delta'$. Como $d(p, x_0') \geq s_0 + \delta'$, esta curva, que liga p a x_0', tem comprimento mínimo. Segue-se (seção 4.7, Prop 2) que ela é uma geodésica, donde regular em todos os seus pontos. Portanto, ela deve coincidir com γ; logo, $x_0' = \gamma(s_0+\delta')$. Assim, a Eq. (2) pode ser escrita como

$$d(\gamma(s_0 + \delta'), q) = r - s_0 - \delta',$$

que é a Eq. (1) para $s = s_0 + \delta'$.

Isto prova a nossa afirmação e conclui a demonstração.

Q.E.D.

Corolário 1. *Seja S completa. Então para todo ponto $p \in S$ a aplicação* $\exp_p : T_pS \to S$ *é sobrejetiva.*

Isto é verdade porque se $q \in S$ e $d(p, q) = r$, então $q = \exp_p rv$, onde $v = \gamma'(0)$ é o vetor tangente à geodésica minimizante γ parametrizada pelo comprimento de arco e ligando p a q.

Corolário 2. *Seja S completa e limitada na métrica d (isto é, existe $r > 0$ tal que $d(p,q) < r$ para todo par $p, q \in S$). Então S é compacta.*

Demonstração. Fixando $p \in S$, o fato de que S é limitada implica a existência de uma bola fechada $B \subset T_pS$ de raio r, centrada na origem 0 do plano tangente T_pS, tal que $\exp_p(B) = \exp_p(T_pS)$. Pelo fato de que $\exp_p$ é sobrejetiva temos $S = \exp_p(T_pS) = \exp_p(B)$. Como B é compacta e $\exp_p$ é contínua, concluímos que S é compacta.

Q.E.D.

De agora em diante, as noções métricas farão referência, salvo menção em contrário, à distância d na Def. 3. Por exemplo, o diâmetro $\rho(S)$ de uma superfície S é, por definição,

$$\rho(S) = \sup_{p,q \in S} d(p,q).$$

Com esta definição, o diâmetro de uma esfera unitária S^2 é $\rho(S^2) = \pi$.

Exercícios

1. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície completa e seja $F \subset S$ um subconjunto fechado e não-vazio de S tal que o seu complementar $S - F$ seja conexo. Mostre que $S - F$ não é uma superfície regular completa.

2. Seja S o cone de uma folha do Exemplo 1. Mostre que, dado $p \in S$, a única geodésica que passa por p e não pode ser estendida para todo valor do parâmetro é o meridiano de S passando por p.

3. Seja S o cone de uma folha do Exemplo 1. Use a isometria do Exemplo 3 da seção 4.2 para mostrar que dois pontos quaisquer $p, q \in S$ (ver Fig. 5.11) podem ser ligados por uma geodésica minimizante em S.

4. Dizemos que uma seqüência $\{p_n\}$ de pontos de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ *converge para um ponto $p_0 \in S$ na distância intrínseca d* se dado $\varepsilon > 0$ existe um índice n_0 tal que $n \geq n_0$ implica que $d(p_n, p_0) < \varepsilon$. Prove que uma seqüência $\{p_n\}$ de pontos de S converge em d para $p_0 \in S$ se e somente se $\{p_n\}$ converge para p_0 como uma seqüência de pontos em $\mathbb{R}^3$ (i.e., na distância euclidiana).

*5. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Uma seqüência $\{p_n\}$ de pontos de S é uma *seqüência de Cauchy na distância (intrínseca)* d se dado $\varepsilon > 0$ existe um índice n_0 tal que quando $n, m \geq n_0$ então $d(p_n, p_m) < \varepsilon$. Prove que S é completa se e somente se toda seqüência de Cauchy em S converge para um ponto de S.

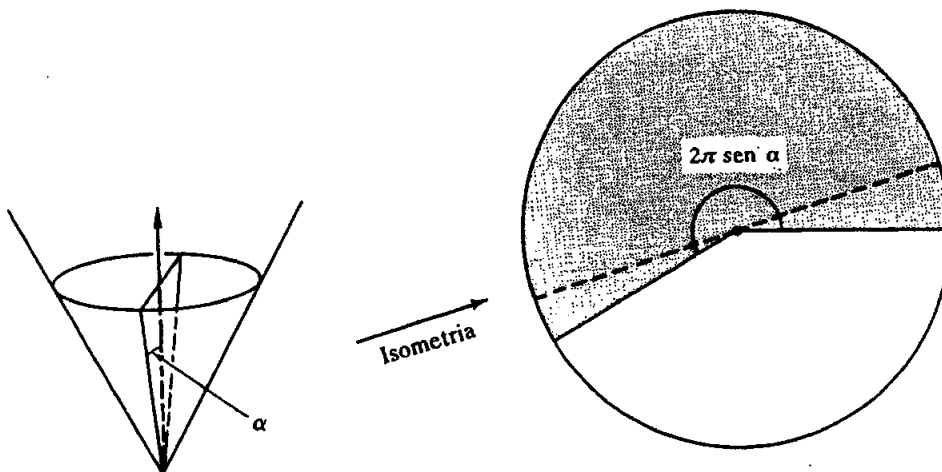



Figura 5-11

*6. Uma geodésica $\gamma : [0, \infty) \to S$ em uma superfície S é um *raio partindo de* $\gamma(0)$ se ela realiza a distância (intrínseca) entre $\gamma(0)$ e $\gamma(s)$ para todo $s \in [0, \infty)$. Seja p um ponto em uma superfície completa e não-compacta S. Prove que S contém um raio partindo de p.

7. Uma *curva divergente* em S é uma aplicação diferenciável $\alpha : [0, \infty) \to S$ tal que para qualquer conjunto compacto $K \subset S$ existe um $t_0 \in [0, \infty)$ com $\alpha(t) \notin K$ para $t > t_0$ (i.e., α "sai" de todo subconjunto compacto de S). O comprimento de uma curva divergente é definido como

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t |\alpha'(t)| \, dt.$$

Prove que $S \subset \mathbb{R}^3$ é completa se e somente se o comprimento de qualquer curva divergente é ilimitado.

*8. Sejam S e $\bar{S}$ superfícies regulares e seja $\varphi : S \to \bar{S}$ um difeomorfismo. Suponha que $\bar{S}$ é completa e que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$I_p(v) \geq c\bar{I}_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v))$$

para todo $p \in S$ e todo $v \in T_pS$, onde I e $\bar{I}$ denotam as primeiras formas fundamentais de S e $\bar{S}$, respectivamente. Prove que S é completa.

***9.** Seja $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície completa (e conexa) e $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície conexa tal que quaisquer dois pontos de S_2 podem ser ligados por uma *única* geodésica. Seja $\varphi : S_1 \to S_2$ uma isometria local. Prove que γ é uma isometria global.

***10.** Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície completa. Fixe um vetor unitário $v \in R$, e seja $h : S \to \mathbb{R}$ a função altura $h(p) = \langle p, v \rangle$, $p \in S$. Lembremos que o gradiente de h é o campo de vetores (tangentes) $\operatorname{grad} h$ em S definido por

$$\langle \operatorname{grad} h, w \rangle = dh_p(w), \qquad \text{para todo } w \in T_pS.$$

(cf. Exercício 14, seção 2,5). Seja $\alpha(t)$ uma trajetória de $\operatorname{grad} h$; i.e., $\alpha(t)$ é uma curva em S tal que $\alpha'(t) = \operatorname{grad} h(\alpha(t))$. Prove que

a. $|grad\, h(p)| \leq 1$ para todo $p \in S$.

b. Uma trajetória $\alpha(t)$ de $\operatorname{grad} h$ é definida para todo $t \in R$.

O próximo exercício admite o material da seção 3.5, parte B, e noções elementares de funções de uma variável complexa.

11. (*Lema de Osserman.*) Seja $D_1 = \{\zeta \in \mathbb{C};\ |\zeta| \leq 1\}$ o disco unitário no plano complexo $\mathbb{C}$. Como de costume, identificamos $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ por $\zeta = u + iv$. Seja $\mathbf{x} : D_1 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização isotérmica de uma superfície mínima $\mathbf{x}(D_1) \subset \mathbb{R}^3$. Isto significa (cf. seção 3.5, Parte B) que

$$\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle, \qquad \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$$

e (pela condição de $\mathbf{x}(D_1)$ ser mínima) que

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0.$$

Suponha que os vetores unitários normais de $\mathbf{x}(D_1)$ omitam uma vizinhança da esfera unitária. Mais precisamente, suponha que para algum vetor $w \in \mathbb{R}^3$, $|w| = 1$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{\langle \mathbf{x}_u, w \rangle^2}{|\mathbf{x}_u|^2} \geq \varepsilon^2 \quad \text{e} \quad \frac{\langle \mathbf{x}_v, w \rangle^2}{|\mathbf{x}_v|^2} \geq \varepsilon^2. \qquad (*)$$

O objetivo do exercício é provar que $\mathbf{x}(D_1)$ *não é uma superfície completa.* (Isto é uma etapa crucial na demonstração do teorema de Osserman citado no final da seção 3.5). Proceda como se segue:

a. Defina $\varphi : D_1 \to \mathbb{C}$ por

$$\varphi(u,v) = \varphi(\zeta) = \langle \mathbf{x}_u, w\rangle + i\,\langle \mathbf{x}_v, w\rangle\,.$$

Mostre que a condição de $\mathbf{x}(D_1)$ ser mínima implica que φ é analítica.

b. Defina $\theta : D_1 \to \mathbb{C}$ por

$$\theta(\zeta) = \int_0^{\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta = \eta.$$

Pela parte **a**, θ é uma função analítica. Mostre que $\theta(0) = 0$ e que a condição $(*)$ implica que $\theta'(\zeta) \neq 0$. Assim, em uma vizinhança de 0, θ tem uma inversa analítica θ^{-1}. Use o teorema de Liouville para mostrar que θ^{-1} não pode ter uma extensão analítica em todo o plano $\mathbb{C}$.

c. Pela parte **b** existe um disco

$$D_R = \{\eta \in \mathbb{C};\ \ |\eta| \leq R\}$$

e um ponto η_0, com $|\eta_0| = R$, tal que θ^{-1} é analítica em D_R e não pode ser estendida analiticamente em uma vizinhança de η_0 (Fig. 5.12). Seja L o segmento de D_R que liga η_0 a 0; i.e. $L = \{t\eta_0 \in \mathbb{C}; 0 \leq t \leq 1\}$. Coloque $\alpha = \theta^{-1}(L)$ e mostre que o comprimento de arco l de $\mathbf{x}(\alpha)$ é

$$\begin{aligned}
l &= \int_\alpha \sqrt{2\,\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u\rangle \left\{ \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right\}}\, dt \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_\alpha \sqrt{\langle \mathbf{x}_u, w\rangle^2 + \langle \mathbf{x}_v, w\rangle^2}\ |d\zeta| = \frac{1}{\varepsilon}\int_\alpha |\varphi(\zeta)|\ |d\zeta| \\
&= \frac{R}{\varepsilon} < +\infty.
\end{aligned}$$

Use o Exercício 7 para concluir que $\mathbf{x}(D_1)$ não é completa.

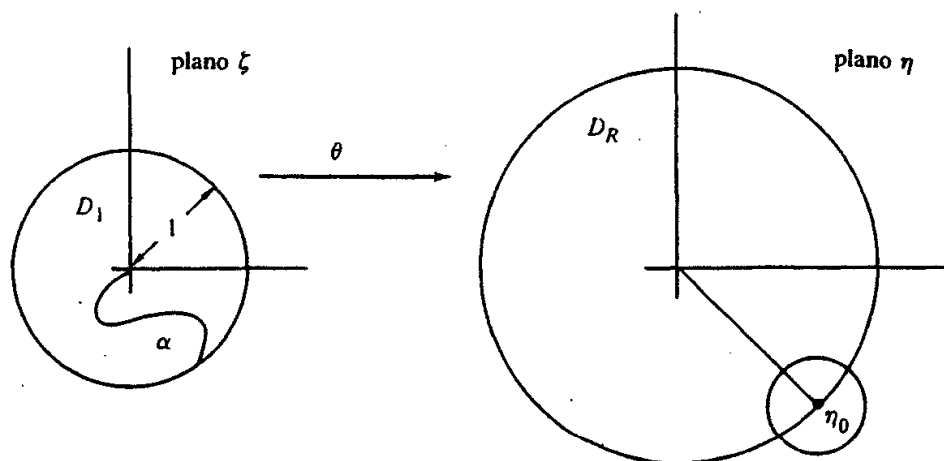



Figura 5-12

5.4 Primeira e Segunda Variações do Comprimento de Arco; Teorema de Bonnet

O objetivo desta seção é provar que uma superfície completa com curvatura Gaussiana $K \geq \delta > 0$ é compacta (Teorema de Bonnet).

O ponto crucial da prova é mostrar que se $K \geq \delta > 0$, uma geodésica ligando dois pontos arbitrários $p, q \in S$ e tendo comprimento $l(\gamma) > \pi/\sqrt{\delta}$ não pode ser minimizante; isto é, existe uma curva parametrizada ligando p a q cujo comprimento é menor do que $l(\gamma)$.

Uma vez que isto tenha sido provado, segue-se que qualquer geodésica minimizante tem comprimento $l \leq \pi/\sqrt{\delta}$; assim, S é limitada na distância d. Como S é completa, S é compacta (Corolário 2, seção 5.3). Observamos que, além disto, obtemos uma estimativa para o diâmetro de S, a saber, $\rho(S) \leq \pi/\sqrt{\delta}$.

Para provar o ponto crucial, precisamos comparar o comprimento de arco de uma curva com o comprimento de arco de "curvas vizinhas". Para isto, vamos introduzir algumas idéias que também são úteis em outros problemas da geometria diferencial. Em verdade, estas idéias são adaptações aos propósitos da geometria diferencial de conceitos mais gerais encontrados no cálculo das variações. Não iremos supor qualquer conhecimento de cálculo das variações.

Nesta seção, S denotará uma superfície regular (não necessariamente completa).

Vamos iniciar tornando precisa a idéia de curvas vizinhas a uma curva dada.

DEFINIÇÃO 1. *Seja $\alpha : [0,l] \to S$ uma curva parametrizada regular, onde o parâmetro $s \in [0,l]$ é o comprimento de arco. Uma* variação *de α é uma aplicação diferenciável*
$h : [0,l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \to S$ tal que

$$h(s,0) = \alpha(s), \qquad s \in [0,l].$$

Para cada $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, a curva $h_t : [0,l] \to S$, dada por $h_t(s) = h(s,t)$, é chamada uma curva da variação *h. Uma variação é chamada* própria *se*

$$h(0,t) = \alpha(0), \qquad h(l,t) = \alpha(l), \qquad t \in (-\varepsilon,\varepsilon).$$

Intuitivamente, uma variação α é uma família de curvas h_t dependendo diferenciavelmente de um parâmetro $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ e tal que h_0 coincide com a curva α (Fig. 5.13). A condição de ser própria significa que todas as curvas h_t têm o mesmo ponto inicial $\alpha(0)$ e o mesmo ponto final $\alpha(l)$.

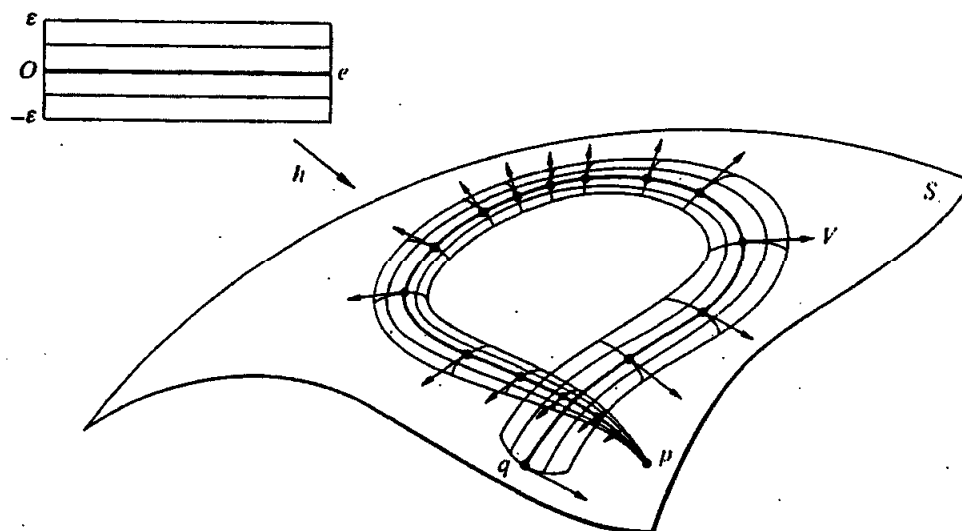



Figura 5-13

Convém adotar a seguinte notação. As curvas parametrizadas em $\mathbb{R}^2$ dadas por

$$\begin{aligned} s &\to (s, t_0), \\ t &\to (s_0, t), \end{aligned}$$

passam pelo ponto $p_0 = (s_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ e têm $(1,0)$ e $(0,1)$ como vetores tangentes em (s_0, t_0). Seja $h : [0,l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \to S$ uma aplicação diferenciável e seja $p_0 \in [0,l] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Então $dh_{p_0}(1,0)$ é o vetor tangente à curva $s \to h(s, t_0)$ em $h(p_0)$, e $dh_{p_0}(0,1)$ é o vetor tangente à curva $t \to h(s_0, t)$ em $h(p_0)$. Vamos denotar

$$\begin{aligned} dh_{p_0}(1,0) &= \frac{\partial h}{\partial s}(p_0), \\ dh_{p_0}(0,1) &= \frac{\partial h}{\partial t}(p_0). \end{aligned}$$

Lembramos (cf. seção 4.4, Def. 2) que um campo de vetores w ao longo de uma curva $\alpha : I \to S$ é uma correspondencia que associa a cada $t \in I$ um vetor $w(t)$ tangente à superfície S em $\alpha(t)$. Assim, $\partial h/\partial s$ e $\partial h/\partial t$ são campos diferenciáveis de vetores tangentes ao longo de α.

Segue-se que uma variação h de α determina um campo diferenciável de vetores $V(s)$ ao longo de α por

$$V(s) = \frac{\partial h}{\partial t}(0, s), \qquad s \in [0, l].$$

V é chamado de *campo variacional* de h; observamos que se h é própria, então

$$V(0) = V(l) = 0.$$

Esta terminologia é justificada pela proposição seguinte.

Proposição 1. *Se tomamos $V(s)$ como um campo diferenciável de vetores ao longo de uma curva parametrizada regular $\alpha : [0,l] \to S$ então existe uma variação $h : [0,l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ de α tal que $V(s)$ é o campo variacional de h. Além disto, se $V(0) = V(l) = 0$, pode-se escolher h como uma variação própria.*

Demonstração. Primeiro mostramos que existe um $\delta > 0$ tal que se $|v| < \delta$, $v \in T_{\alpha(s)}S$, então $\exp_{\alpha(s)} v$ está bem definida para todo $s \in [0,l]$. De fato, para cada $p \in \alpha([0,l]) \subset S$ considere a vizinhança W_p (uma vizinhança normal de todos os seus pontos) e o número $\delta_p > 0$ dados pela Prop. 1 da seção 4.7. A união $\cup_p W_p$ cobre $\alpha([0,l])$ e, por compacidade, um número finito delas, digamos, $W_1, \dots, W_n$, ainda cobre $\alpha([0,l])$. Coloque $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$, onde

δ_i é o número correspondente à vizinhança W_i, $i = 1, \ldots, n$. Vê-se facilmente que δ satisfaz a condição acima.

Seja agora $M = \max_{s \in [0,l]} |V(s)|$, $\varepsilon < \delta/M$, e defina

$$h(s,t) = \exp_{\alpha(s)} tV(s), \qquad s \in [0,l],\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

É claro que h está bem definida. Além disto, como

$$\exp_{\alpha(s)} tV(s) = \gamma(1, \alpha(s), tV(s)),$$

onde γ é a aplicação (diferenciável) do Teorema 1 da seção 4.7 (i.e., para $t \neq 0$, e $V(s) \neq 0$, $\gamma(1, \alpha(s), tV(s))$ é a geodésica γ com condições iniciais $\gamma(0) = \alpha(s)$, $\gamma'(0) = V(s)$), h é diferenciável. Verifica-se imediatamente que $h(s,0) = \alpha(s)$. Finalmente, o campo variacional de h é dado por

$$\frac{\partial h}{\partial t}(s,0) = dh_{(s,0)}(0,1) = \frac{d}{dt}(\exp_{\alpha(s)} tV(s))\Big|_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}\gamma(1, \alpha(s), tV(s))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma(t, \alpha(s), V(s))\Big|_{t=0} = V(s),$$

e é claro que, pela definição de h, que se $V(0) = V(l) = 0$, então h é própria.

Q.E.D.

Queremos comparar o comprimento de arco de $\alpha (= h_0)$ com o comprimento de arco de h_t. Assim, definimos a função $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \to R$ por

$$L(t) = \int_0^l \left| \frac{\partial h}{\partial s}(s,t) \right| ds, \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \tag{1}$$

O estudo de L em uma vizinhança de $t = 0$ vai nos dar informação sobre o "comportamento do comprimento de arco" das curvas vizinhas de α.

Precisamos de alguns lemas preliminares.

Lema 1. *A função L definida pela Eq. (1) é diferenciável em uma vizinhança de $t = 0$; nesta vizinhança, a derivada de L pode ser obtida por derivação sob o sinal de integral.*

Demonstração. Como $\alpha : [0,l] \to S$ é parametrizada pelo comprimento de arco,

$$\left| \frac{\partial h}{\partial s} \right| = \left| \frac{\partial h}{\partial s}(s,0) \right| = 1.$$

Segue-se, pela compacidade de $[0, l]$, que existe $\delta > 0$, $\delta \leq \varepsilon$, tal que

$$\left|\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right| \neq 0, \qquad s \in [0,l], \quad |t| < \delta.$$

Como o módulo de uma função diferenciável não-nula é diferenciável, o integrando da Eq. (1) é diferenciável para $|t| < \delta$. Por um teorema clássico do Cálculo, concluímos que L é diferenciável para $|t| < \delta$ e que

$$L'(t) = \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial h}{\partial t}(s,t)\right| ds.$$

Q.E.D.

Os lemas 2,3 e 4 abaixo têm interesse independente.

Lema 2. *Seja $w(t)$ um campo de vetores diferenciável ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : [a,b] \to S$ e seja $f : [a,b] \to R$ uma função diferenciável. então*

$$\frac{D}{dt}(f(t)w(t)) = f(t)\frac{Dw}{dt} + \frac{df}{dt}w(t).$$

Demonstração. Basta utilizar o fato de que a derivada covariante é a componente tangencial da derivada usual e concluir que (aqui $(\quad)_T$ denota a componente tangencial de ( ))

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}(fw) &= \left(\frac{df}{dt}w + f\frac{dw}{dt}\right)_T = \frac{df}{dt}w + f\left(\frac{dw}{dt}\right)_T \\ &= \frac{df}{dt}w + f\frac{Dw}{dt}.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lema 3. *Sejam $v(t)$ e $w(t)$campos de vetores diferenciáveis ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : [a,b] \to S$. Então*

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), w(t)\rangle = \left\langle \frac{Dv}{dt}, w(t)\right\rangle + \left\langle v(t), \frac{Dw}{dt}\right\rangle.$$

Demonstração. Utilizando as observações da demonstração acima, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle v, w\rangle &= \left\langle \frac{dv}{dt}, w(t)\right\rangle + \left\langle v(t), \frac{dw}{dt}\right\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{dv}{dt}\right)_T, w(t)\right\rangle + \left\langle v(t), \left(\frac{dw}{dt}\right)_T\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{Dv}{dt}, w(t)\right\rangle + \left\langle v(t), \frac{Dw}{dt}\right\rangle.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Antes de enunciarmos o próximo lema convém introduzir a seguinte terminologia. Seja $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ uma aplicação diferenciável. Um *campo diferenciável de vetores ao longo de* h é uma aplicação diferenciável

$$V : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \subset \mathbb{R}^3$$

tal que $V(s, t) \in T_{h(s,t)}S$ para cada $(s, t) \in [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Isto generaliza a definição de campo diferenciável de vetores ao longo de uma curva parametrizada (seção 4.4, Def. 2).

Por exemplo, os campos de vetores $(\partial h/\partial s)(s, t)$ e $(\partial h/\partial t)(s, t)$, introduzidos acima, são campos de vetores ao longo de h.

Restringindo $V(s, t)$ às curvas $s =$ const., $t =$ const., obtemos campos de vetores ao longo de curvas. Neste contexto, a notação $(DV/\partial t)(s, t)$ significa a derivada covariante, em um ponto (s, t), da restrição de $V(s, t)$ à curva $t =$ const..

Lema 4. *Seja* $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \to S$ *uma aplicação diferenciável. Então*

$$\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}(s, t) = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s}(s, t).$$

Demonstração. Seja $\mathbf{x} : U \to S$ uma parametrização de S em um ponto $h(s, t)$, com parâmetros (u, v), e seja

$$u = h_1(s, t), \qquad v = h_2(s, t)$$

a expressão de h nesta parametrização. Sob estas condições, quando $(s, t) \in h^{-1}(\mathbf{x}(U)) = W$, a curva $h(s, t_0)$ pode ser expressa por

$$u = h_1(s, t_0), \qquad v = h_2(s, t_0).$$

Como $(\partial h/\partial s)(s_0, t_0)$ é tangente à curva $h(s, t_0)$ em $s = s_0$, temos que

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s_0, t_0) = \frac{\partial h_1}{\partial s}(s_0, t_0)\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}(s_0, t_0)\mathbf{x}_v.$$

Pela arbitrariedade de $(s_0, t_0) \in W$, concluímos que

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h_1}{\partial s}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}\mathbf{x}_v,$$

onde omitimos a indicação do ponto (s, t) para simplificar a notação.

Analogamente

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h_1}{\partial t}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial t}\mathbf{x}_v.$$

Vamos agora calcular as derivadas covariantes $(D/\partial s)(\partial h/\partial t)$ e $(D/\partial t)(\partial h/\partial s)$ utilizando a expressão da derivada covariante em termos dos símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k (seção 4.4, Eq. (1)) e obter a igualdade desejada. Por exemplo, o coeficiente de $\mathbf{x}_u$ em ambas as derivadas é dado por

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial s \partial t} + \Gamma_{11}^1 \frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{\partial h_1}{\partial s} + \Gamma_{12}^1 \frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{\partial h_2}{\partial s} + \Gamma_{12}^1 \frac{\partial h_2}{\partial t}\frac{\partial h_1}{\partial s} + \Gamma_{22}^1 \frac{\partial h_2}{\partial t}\frac{\partial h_2}{\partial s}.$$

A igualdade dos coeficientes de $\mathbf{x}_v$ pode ser mostrada da mesma maneira, concluindo assim a demonstração.

Q.E.D.

Estamos agora prontos para calcular a primeira derivada de L em $t = 0$ e obter

Proposição 2. *Seja* $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ *uma variação própria da curva* $\alpha : [0, l] \to S$ *e seja* $V(s) = (\partial h/\partial t)(s, 0)$, $s \in [0, l]$, *o campo variacional de* h. *Então*

$$L'(0) = -\int_0^l \langle A(s), V(s) \rangle \, ds, \tag{2}$$

onde $A(s) = (D/\partial s)(\partial h/\partial s)(s, 0)$.

Demonstração. Se t pertence ao intervalo $(-\delta, \delta)$ dado pelo Lema 1, então

$$L'(t) = \int_0^l \left\{ \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle^{1/2} \right\} ds.$$

Aplicando os Lemas 3 e 4, obtemos

$$L'(t) = \int_0^l \frac{\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle}{\left|\frac{\partial h}{\partial s}\right|} ds = \int_0^l \frac{\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle}{\left|\frac{\partial h}{\partial s}\right|} ds.$$

Como $|(\partial h/\partial s)(s,0)| = 1$, temos que

$$L'(0) = \int_0^l \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle ds,$$

onde o integrando é calculado em $(s,0)$, que omitimos para simplificar a notação.

De acordo com o Lema 3,

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_0^l \frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle ds - \int_0^l \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle ds \\ &= -\int_0^l \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle ds, \end{aligned}$$

pois $(\partial h/\partial t)(0,0) = (\partial h/\partial t)(l,0) = 0$, devido ao fato de que a variação é própria. Recordando as definições de $A(s)$ e $V(s)$, podemos escrever a última expressão na forma

$$L'(0) = -\int_0^l \langle A(s), V(s) \rangle \, ds.$$

Q.E.D.

Observação 1. O vetor $A(s)$ é chamado o *vetor aceleração* da curva α, e a sua norma nada mais é do que o módulo da curvatura geodésica de α. Observe que $L'(0)$ depende apenas do campo variacional $V(s)$ e não da própria variação h. A expressão (2) é conhecida como a *fórmula da primeira variação* do comprimento de arco da curva α.

Observação 2. A condição de h ser própria somente foi utilizada no final da demonstração para eliminar os termos

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle (l, 0) - \left\langle \frac{\partial h}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t} \right\rangle (0, 0).$$

Portanto, se h não for própria, obtemos uma fórmula como a Eq. (2) que contém estes termos de fronteira.

Uma conseqüência interessante da Prop. 2 é a caracterização das geodésicas como soluções de um "problema variacional". Mais precisamente,

Proposição 3. *Uma curva parametrizada regular* $\alpha : [0, l] \to S$, *onde o parâmetro* $s \in [0, l]$ *é o comprimento de arco de* α, *é uma geodésica se e somente se, para toda variação própria* $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ *de* α, $L'(0) = 0$.

Demonstração. A necessidade é trivial pois o vetor aceleração $A(s) = (D/\partial s)(\partial h/\partial s)$ de uma geodésica é identicamente nulo. Portanto, $L'(0) = 0$ para toda variação própria.

Suponha agora que $L'(0) = 0$ para toda variação própria de α e considere um campo de vetores $V(s) = f(s)A(s)$, onde $f : [0, l] \to R$ é uma função real diferenciável, com $f(s) \geq 0$, $f(0) = f(l) = 0$, e $A(s)$ é o vetor aceleração de α. Construindo a variação correspondendo a $V(s)$, temos

$$\begin{aligned} L'(0) &= -\int_0^l \langle f(s)A(s), A(s)\rangle \, ds \\ &= -\int_0^l f(s) \, |A(s)|^2 \, ds = 0. \end{aligned}$$

Portanto, como $f(s) \, |A(s)|^2 \geq 0$, obtemos que

$$f(s) \, |A(s)|^2 \equiv 0.$$

Vamos provar que a relação acima implica que $A(s) = 0$, $s \in [0, l]$. De fato, se $|A(s_0)| \neq 0$, $s_0 \in (0, l)$, existe um intervalo $I = (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ tal que $|A(s)| \neq 0$ para $s \in I$. Escolhendo f tal que $f(s_0) > 0$, contradizemos $f(s_0) \, |A(s_0)| = 0$. Portanto, $|A(s)| = 0$ quando $s \in (0, l)$. Por continuidade, $A(0) = A(l) = 0$ como havíamos afirmado.

Como o vetor aceleração de α é identicamente nulo, α é uma geodésica.
Q.E.D.

De agora em diante, vamos considerar apenas variações próprias de geodésicas $\gamma : [0, l] \to S$, parametrizadas pelo comprimento de arco; isto é, vamos supor $L'(0) = 0$. Para simplificar os cálculos, vamos nos restringir a *variações ortogonais*; isto é, vamos supor que o campo variacional $V(s)$ satisfaz a condição $\langle V(s), \gamma'(s)\rangle = 0$, $s \in [0, l]$. Para estudar o comportamento da função L em uma vizinhança de 0 vamos calcular $L''(0)$.

Para este cálculo, precisaremos de alguns lemas que relacionam a curvatura Gaussiana com a derivada covariante.

Lema 5. *Seja* $\mathbf{x} : U \to S$ *uma parametrização em um ponto* $p \in S$ *de uma superfície regular, com parâmetros* u, v, *e seja* K *a curvatura Gaussiana de* S. *Então*

$$\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u = K(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \wedge \mathbf{x}_u.$$

Demonstração. Observando que a derivada covariante é a componente da derivada usual no plano tangente, temos que (seção 4.3)

$$\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u = \Gamma_{11}^1\mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_v.$$

Aplicando a fórmula da derivada covariante (seção 4.4, Eq. (1)) à expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial v}\left(\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u\right) &= \{(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2\}\mathbf{x}_u \\ &\quad + \{(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{11}^2\}\mathbf{x}_v.\end{aligned}$$

Verifica-se, com um cálculo análogo, que

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial u}\left(\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u\right) &= \{(\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2\}\mathbf{x}_u \\ &\quad + \{(\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^2\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2\}\mathbf{x}_v.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u &= \{(\Gamma^1_{11})_v - (\Gamma^1_{12})_u + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}\}\mathbf{x}_u \\ &+\{(\Gamma^2_{11})_v - (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11} \\ &-\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\}\mathbf{x}_v.\end{aligned}$$

Utilizamos agora a expressão da curvatura em termos dos símbolos de Christoffel (seção 4.3, Eqs. (5) e (5a)) e concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u &= -FK\mathbf{x}_u + EK\mathbf{x}_v \\ &= K\{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u\rangle\, \mathbf{x}_v - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle\, \mathbf{x}_u\} \\ &= K(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \wedge \mathbf{x}_u.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lema 6. *Seja $h : [0,l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ uma aplicação diferenciável e seja $V(s,t)$, $(s,t) \in [0,l] \times (-\varepsilon,\varepsilon)$, um campo de vetores diferenciável ao longo de h. Então*

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V = K(s,t)(\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t}) \wedge V,$$

onde $K(s,t)$ é a curvatura de S no ponto $h(s,t)$.

Demonstração. Seja $\mathbf{x}(u,v)$ um sistema de coordenadas de S em torno de $h(s,t)$ e seja

$$V(s,t) = a(s,t)\mathbf{x}_u + b(s,t)\mathbf{x}_v$$

a expressão de $V(s,t) = V$ neste sistema de coordenadas. Pelo Lema 2,

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial s}V &= \frac{D}{\partial s}(a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v) \\ &= a\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_u + b\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_v + \frac{\partial a}{\partial s}\mathbf{x}_u + \frac{\partial b}{\partial s}\mathbf{x}_v.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V &= a\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_u + b\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_v + \frac{\partial a}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\mathbf{x}_u \\ &+\frac{\partial b}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\mathbf{x}_v + \frac{\partial a}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_u + \frac{\partial b}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_v + \frac{\partial^2 a}{\partial t\partial s}\mathbf{x}_u + \frac{\partial^2 b}{\partial t\partial s}\mathbf{x}_v.\end{aligned}$$

Com um cálculo análogo, obtemos a fórmula para $(D/\partial s)(D/\partial t)V$, que é dada trocando s por t na expressão anterior. Segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V = a\left(\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_u - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\mathbf{x}_u\right)\\ +b\left(\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_v - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\mathbf{x}_v\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Para calcular $(D/\partial t)(D/\partial s)\mathbf{x}_u$, vamos tomar a expressão de h,

$$u = h_1(s,t), \qquad v = h_2(s,t),$$

na parametrização $\mathbf{x}(u,v)$ e escrever

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \mathbf{x}_u(h_1(s,t), h_2(s,t)) = \mathbf{x}_u.$$

Como a derivada covariante $(D/\partial s)\mathbf{x}_u$ é a projeção sobre o plano tangente da derivada usual $(d/ds)\mathbf{x}_u$, temos

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_u &= \left\{\frac{d}{ds}\mathbf{x}_u\right\}_T = \left\{\mathbf{x}_{uu}\frac{\partial h_1}{\partial s} + \mathbf{x}_{uv}\frac{\partial h_2}{\partial s}\right\}_T\\ &= \frac{\partial h_1}{\partial s}\{\mathbf{x}_{uu}\}_T + \frac{\partial h_2}{\partial s}\{\mathbf{x}_{uv}\}_T\\ &= \frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u,\end{aligned}$$

onde T denota a projeção de um vetor sobre o plano tangente.

Com a mesma notação, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_u &= \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u\right)\right\}_T = \frac{\partial^2 h_1}{\partial t\partial s}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u\\ &+\frac{\partial^2 h_2}{\partial t\partial s}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_1}{\partial s}\left(\frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial t}\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u\right)\\ &+\frac{\partial h_2}{\partial s}\left(\frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial t}\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u\right).\end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos $(D/\partial s)(D/\partial t)\mathbf{x}_u$, trocando s por t na expressão

acima. Segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_u - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\mathbf{x}_u &= \frac{\partial h_2}{\partial s}\frac{\partial h_1}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u - \frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u\right)\\ &\quad+\frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{\partial h_2}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u\right)\\ &= \Delta\left(\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_u - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_u\right).\end{aligned}$$

onde

$$\Delta = \left(\frac{\partial h_1}{\partial s}\frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial h_2}{\partial s}\frac{\partial h_1}{\partial t}\right).$$

Trocando $\mathbf{x}_u$ por $\mathbf{x}_v$ nesta última expressão, obtemos

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\mathbf{x}_v - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\mathbf{x}_v = \Delta\left(\frac{D}{\partial v}\frac{D}{\partial u}\mathbf{x}_v - \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial v}\mathbf{x}_v\right).$$

Introduzindo a expressão acima na Eq. (3) e usando o Lema 5, concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V &= a\Delta K(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \wedge \mathbf{x}_u + b\Delta K(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \wedge \mathbf{x}_v\\ &= K(\Delta\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \wedge (a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v).\end{aligned}$$

Por outro lado, como vimos na demonstração do Lema 4,

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h_1}{\partial s}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial s}\mathbf{x}_v, \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h_1}{\partial t}\mathbf{x}_u + \frac{\partial h_2}{\partial t}\mathbf{x}_v;$$

donde,

$$\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t} = \Delta\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v.$$

Portanto,

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V = K(\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t}) \wedge V.$$

Q.E.D.

Estamos agora prontos para calcular $L''(0)$.

Proposição 4. *Seja $h : [0,l]\times(-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ uma variação própria ortogonal de uma geodésica $\gamma : [0,l] \to S$ parametrizada pelo comprimento de arco $s \in [0,l]$. Seja $V(s) = (\partial h/\partial t)(s,0)$ o campo de vetores variacional de h. Então*

$$L''(0) = \int_0^l \left(\left|\frac{D}{\partial s}V(s)\right|^2 - K(s)\,|V(s)|^2\right) ds, \tag{4}$$

onde $K(s) = K(s,0)$ é a curvatura Gaussiana de S em $\gamma(s) = h(s,0)$.

Demonstração. Como vimos na demonstração da Prop. 2,

$$L'(t) = \int_0^l \frac{\left\langle \dfrac{D}{\partial s}\dfrac{\partial h}{\partial t}, \dfrac{\partial h}{\partial s}\right\rangle}{\left\langle \dfrac{\partial h}{\partial s}, \dfrac{\partial h}{\partial s}\right\rangle^{1/2}}\, ds,$$

para t pertencente ao intervalo $(-\delta,\delta)$ dado no Lema 1. Derivando a expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} L''(0) &= \int_0^l \frac{\left(\dfrac{d}{dt}\left\langle \dfrac{D}{\partial s}\dfrac{\partial h}{\partial t}, \dfrac{\partial h}{\partial s}\right\rangle\right)\left\langle \dfrac{\partial h}{\partial s}, \dfrac{\partial h}{\partial s}\right\rangle^{1/2}}{\left\langle \dfrac{\partial h}{\partial s}, \dfrac{\partial h}{\partial s}\right\rangle}\, ds \\ &\quad - \int_0^l \frac{\left(\left\langle \dfrac{D}{\partial s}\dfrac{\partial h}{\partial t}, \dfrac{\partial h}{\partial s}\right\rangle\right)^2}{\left|\frac{\partial h}{\partial s}\right|^{3/2}}\, ds. \end{aligned}$$

Observe agora que para $t = 0$, $|(\partial h/\partial s)(s,0)| = 1$. Além disto,

$$\frac{d}{ds}\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle.$$

Como γ é uma geodésica, $(D/\partial s)(\partial h/\partial s) = 0$ para $t = 0$, e como a variação é ortogonal,

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}\right\rangle = 0 \qquad \text{para } t = 0.$$

Segue-se que

$$L''(0) = \int_0^l \frac{d}{dt}\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle ds, \tag{5}$$

onde o integrando é calculado em $(s, 0)$.

Vamos agora transformar o integrando da Eq. (5) em uma expressão mais conveniente. Observe primeiro que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle &= \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle + \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle + \left|\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}\right|^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $t = 0$,

$$\frac{d}{ds}\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle,$$

pois $(D/\partial s)(\partial h/\partial s)(s, 0) = 0$, devido ao fato de que γ é uma geodésica. Além disto, usando o Lema 6 mais o fato de que a variação é ortogonal, obtemos (para $t = 0$)

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle &= K(s)\left\langle \left(\frac{\partial h}{\partial s}\wedge\frac{\partial h}{\partial t}\right)\wedge\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle \\
&= -K(s)\left\langle |V(s)|^2\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle \\
&= -K(s)\,|V(s)|^2.
\end{aligned}$$

Introduzindo os valores acima na Eq. (5), temos

$$\begin{aligned}
L''(0) &= \int_0^l \left(-K(s)\,|V(s)|^2 + \left|\frac{D}{\partial s}V(s)\right|^2\right) ds \\
&\quad + \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle (l, 0) - \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle (0, 0).
\end{aligned}$$

Finalmente, como a variação é própria, $(\partial h/\partial t)(0,t) = (\partial h/\partial t)(l,t) = 0$, $t \in (-\delta, \delta)$. Assim,

$$L''(0) = \int_0^l \left(\left| \frac{D}{\partial s} V(s) \right|^2 - K\, |V(s)|^2 \right) ds.$$

Q.E.D.

Observação 3. A expressão (4) é chamada *fórmula da segunda variação do comprimento de arco de* γ. Observe que ela depende apenas do campo variacional de h e não da própria h. Convém, às vezes, indicar esta dependencia escrevendo $L''_V(0)$.

Observação 4. Freqüentemente convém escrever a fórmula (4) para a segunda variação da seguinte maneira

$$L''(0) = -\int_0^l \left\langle \frac{D^2V}{ds^2} + KV, V \right\rangle ds. \tag{4a}$$

A Eq. (4a) deriva da Eq. (4) observando-se que $V(0) = V(l) = 0$ e que

$$\frac{d}{ds}\left\langle V, \frac{DV}{ds} \right\rangle = \left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DV}{ds} \right\rangle + \left\langle V, \frac{D^2V}{ds^2} \right\rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^l \left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DV}{ds} \right\rangle - K\, \langle V, V \rangle \right) ds &= \left[\left\langle V, \frac{DV}{ds} \right\rangle \right]_o^l \\ &\quad - \int_0^l \left\langle \frac{D^2V}{ds^2} + KV, V \right\rangle ds \\ &= -\int_0^l \left\langle \frac{D^2V}{ds^2} + KV, V \right\rangle ds.\end{aligned}$$

A segunda variação $L''(0)$ do comprimento de arco é a ferramenta que precisamos para provar a etapa crucial no teorema de Bonnet, que foi mencionada no início desta seção. Podemos agora provar

Teorema (Bonnet). *Suponha que a curvatura Gaussiana K de uma superfície completa S satisfaça*

$$K \geq \delta > 0.$$

Então S é compacta e o diâmetro ρ de S satisfaz a desigualdade

$$\rho \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Demonstração. Como S é completa, dados dois pontos $p, q \in S$, existe, pelo teorema de Hopf-Rinow, uma geodésica minimizante γ de S ligando p a q. Vamos provar que o comprimento $l = d(p,q)$ desta geodésica satisfaz a desigualdade

$$l \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Vamos supor que $l > \pi/\sqrt{\delta}$ e considerar uma variação da geodésica definida da seguinte maneira. Seja w_0 um vetor unitário de $T_{\gamma(0)}S$ tal que $\langle w_0, \gamma'(0)\rangle = 0$ e seja $w(s)$, $s \in [0,l]$, o transporte paralelo de w_0 ao longo de γ. É claro que $|w(s)| = 1$ e que $\langle w(s), \gamma'(s)\rangle = 0$, $s \in [0,l]$. Considere o campo de vetores $V(s)$ definido por

$$V(s) = w(s) \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} s, \qquad s \in [0,l].$$

Como $V(0) = V(l) = 0$ e $\langle V(s), \gamma'(s)\rangle = 0$, o campo de vetores $V(s)$ determina uma variação própria e ortogonal de γ. Pela Prop. 4,

$$L''_V(0) = \int_0^l \left(\left| \frac{D}{\partial s} V(s) \right|^2 - K(s)\,|V(s)|^2 \right) ds.$$

Como $w(s)$ é um campo de vetores paralelo,

$$\frac{D}{\partial s} V(s) = \left(\frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi}{l} s \right) w(s).$$

Assim, como $l > \pi/\sqrt{\delta}$, de forma que $K \geq \delta > \pi^2/l^2$, obtemos

$$\begin{aligned} L''_V(0) &= \int_0^l \left(\frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi}{l} s - K \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{l} s \right) ds \\ &< \int_0^l \frac{\pi^2}{l^2} \left(\cos^2 \frac{\pi}{l} s - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{l} s \right) ds \\ &= \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \cos \frac{2\pi}{l} s \, ds = 0. \end{aligned}$$

Portanto, existe uma variação de γ para a qual $L''(0) < 0$. No entanto, como γ é uma geodésica minimizante, o seu comprimento é menor ou igual ao de qualquer curva ligando p a q. Assim, para qualquer variação de γ deveríamos ter $L'(0) = 0$ e $L''(0) \geq 0$. Obtivemos, portanto, uma contradição, o que mostra que $l = d(p,q) \leq \pi/\sqrt{\delta}$, como havíamos afirmado.

Como $d(p,q) \leq \pi/\sqrt{\delta}$ para quaisquer dois pontos de S, temos que S é limitada e que o seu diâmetro $\rho \leq \pi/\sqrt{\delta}$. Além disto, como S é completa e limitada, S é compacta.

Q.E.D.

Observação 5. A escolha da variação $V(s) = w(s) \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} s$ pode ser entendida melhor se olharmos para a segunda variação na forma (4a) da Observação 4. Como $K > l^2/\pi^2$, podemos escrever

$$\begin{aligned} L''_V(0) &= -\int_0^l \left\langle V, \frac{D^2V}{ds^2} + \frac{\pi^2}{l^2}V \right\rangle ds - \int_0^l \left(K - \frac{\pi^2}{l^2}\right) |V(s)|^2\, ds \\ &< -\int_0^l \left\langle V, \frac{D^2V}{ds^2} + \frac{\pi^2}{l^2}V \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Agora é fácil adivinhar que o $V(s)$ acima torna este último integrando igual a zero; donde $L''_V(0) < 0$.

Observação 6. A hipótese $K \geq \delta > 0$ não pode ser enfraquecida para $K > 0$. De fato, o parabolóide

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x^2 + y^2\}$$

tem curvatura Gaussana $K > 0$, é completo, e não é compacto. Observe que a curvatura do parabolóide tende a zero quando a distância do ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ à origem $(0,0)$ cresce arbitrariamente (cf. Observação 8 abaixo).

Observação 7. A estimativa do diâmetro $\rho \leq \pi/\sqrt{\delta}$ dada pelo teorema de Bonnet é a melhor possível, como mostra o exemplo da esfera unitária: $K \equiv 1$ e $\rho = \pi$.

Observação 8. A primeira prova do teorema acima foi obtida para superfícies compactas por O. Bonnet, "Sur quelques propriétés des lignes géodesiques", *C.R. Ac. Sc. Paris* XL (1850)),1331, e "Note sur les lignes géodesiques",

ibid. XLI (1851), 32. Uma formulação do teorema em termos de superfícies completas pode ser encontrado no artigo de Hopf-Rinow citado na seção anterior. Em verdade, não é necessário que K seja limitada inferiormente por uma constante positiva mas apenas que ela não se aproxime de zero muito rapidamente. Ver E. Calabi, "On Ricci curvature and Geodesics", *Duke Math. J.* 34 (1967), 667-676; ou R. Schneider, "Konvexe Flächen mit langsam abnehmender Krümmung", *Archiv der Math.* 23 (1972), 650-654 (cf. também o Exercício 2 abaixo).

Exercícios

1. A recíproca do teorema de Bonnet é verdadeira (i.e., se S é compacta e tem diâmetro $\rho \leq \pi/\sqrt{\delta}$, tem-se $K \geq \delta$)?

2. (*Observação de Kazdan-Warner.* cf. Exercício 10, seção 5.10.) Seja $S = \{z = f(x,y);\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ uma superfície regular completa. Mostre que

$$\lim_{r\to\infty}\Big(\inf_{x^2+y^2\geq \mathbb{R}^2} K(x,y)\Big) \leq 0.$$

3. **a.** Obtenha a fórmula da primeira variação do comprimento de arco sem supor que a variação seja própria.

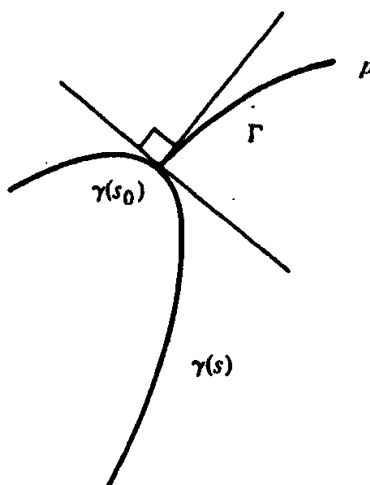



Figura 5-14

b. Seja S uma superfíce completa. Seja $\gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$, uma geodésica em S e seja $d(s)$ a distância $d(\gamma(s), p)$ de $\gamma(s)$ a um ponto $p \in S$ que

não pertença ao traço de γ. Mostre que existe um ponto $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $d(s_0) \leq d(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e que a geodésica Γ ligando p a $\gamma(s_0)$ é perpendicular a γ (Fig. 5.14).

c. Suponha agora que S seja homeomorfa a um plano e que tenha curvatura Gaussiana $K \leq 0$. Prove que s_0 (donde, Γ) é única.

4. (*Cálculo das Variações.*) As geodésicas são casos particulares de soluções de problemas variacionais. Neste exercício, vamos discutir alguns tópicos de um problema variacional simples, mas bastante representativo. No próximo exercício vamos fazer algumas aplicações das idéias apresentadas aqui.

Seja $y = y(x)$, $x \in [x_1, x_2]$ uma curva diferenciável no plano xy e considere uma variação de y dada por uma aplicação diferenciável $y = y(x,t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Aqui $y(x,0) = y(x)$ para todo $x \in [x_1, x_2]$, e $y(x_1, t) = y(x_1)$, $y(x_2, t) = y(x_2)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (i.e., os pontos extremos da variação estão fixos). Considere a integral

$$I(t) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x,t), y'(x,t))\, dx, \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

onde $F(x, y, y')$ é uma função diferenciável de três variáveis e $y' = \partial y/\partial x$. O problema de encontrar pontos críticos de $I(t)$ é chamado um *problema variacional com integrando F.*

a. Suponha que a curva $y = y(x)$ seja um ponto crítico de $I(t)$ (*i.e.*, $dI/dt = 0$ para $t = 0$). Use integração por partes para concluir que $(\dot{I} = dI/dt)$

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= \int_{x_1}^{x_2} \left(F_y \frac{\partial y}{\partial t} + F_{y'} \frac{\partial y'}{\partial t} \right) dx \\ &= \left[\frac{\partial y}{\partial t} F_{y'} \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial y}{\partial t} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) dx. \end{aligned}$$

Então, utilizando as condições de contorno, obtenha

$$0 = \dot{I}(0) = \int_{x_1}^{x_2} \eta \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) dx, \qquad (*)$$

onde $\eta = (\partial y/\partial t)(x, 0)$. A função η corresponde ao campo variacional de $y(x,t)$.)

b. Prove que se $\dot{I}(0) = 0$ para todas as variações com pontos extremos fixos (i.e. para qualquer η em $(*)$ com $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$), então

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \qquad (**)$$

A equação $(**)$ é chamada *equação de Euler-Lagrange* para o problema variacional com integrando F.

c. Mostre que se F não envolve explicitamente a variável x, i.e. $F = F(y, y')$, então, derivando $y'F_{y'} - F$, e usando $(**)$ obtemos que

$$y'F_{y'} - F = \text{ const.}.$$

5. (*Cálculo das Variações: Aplicações*)

a. (*Superfícies de Revolução com Area Mínima.*) Seja S uma superfície de revolução obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, em torno do eixo Ox. Suponha que S tenha área mínima entre todas as superfícies de revolução geradas por curvas ligando $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$. Assim, $y = f(x)$ minimiza a integral (cf. Exercício 11, seção 2.5)

$$I(t) = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

para todas as variações $y(x,t)$ de y com extremos $y(x_1)$, $y(x_2)$ fixados. Pela parte **b** do Exercício 4, $F(y, y') = y\sqrt{1 + (y')^2}$ satisfaz a equação de Euler-Lagrange $(**)$. Use a parte **c** do Exercício 4 para obter que

$$y'F_{y'} - F = -\frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}} = -\frac{1}{c}, \qquad c = \text{ const.},$$

portanto

$$y = \frac{1}{c}\cosh(cx + c_1), \qquad c_1 = \text{ const.}$$

Conclua que *se existe uma superfície de revolução de área mínima conectando dois círculos paralelos, esta superfície é o catenóide que contém estes dois círculos como paralelos.*

b. (*Geodésicas das Superfícies de Revolução*) Seja

$$\mathbf{x}(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\operatorname{sen} u, g(v))$$

uma parametrização de uma superfície de revolução S. Seja $u = u(v)$ a equação de uma geodésica de S que não seja nem um paralelo nem um meridiano. Então $u = u(v)$ é um ponto crítico para a integral do comprimento de arco ($F = 0$)

$$\int \sqrt{E(u')^2 + G}\, dv, \qquad u' = \frac{du}{dv}.$$

Como $E = f^2$, $G = (f')^2 + (g')^2$, vê-se que a equação de Euler-Lagrange para o problema variacional é

$$F_u - \frac{d}{dv}F_{u'} = 0, \qquad F = \sqrt{f^2(u')^2 + (f')^2 + (g')^2}.$$

Note que F não depende de u. Assim, $(d/dv)F_{u'} = 0$, e

$$c = \text{ const. } = F_{u'} = \frac{u' f^2}{\sqrt{f^2(u')^2 + (f')^2 + (g')^2}}.$$

A partir disto, obtenha a seguinte equação para a geodésica $u = u(v)$ (cf. Exemplo 5, seção 4.4):

$$u = c\int \frac{1}{f}\frac{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}{f^2 - c^2}\, dv + \text{const.}.$$

5.5 Campos de Jacobi e Pontos Conjugados

Nesta seção vamos explorar alguns detalhes das técnicas variacionais que foram utilizadas para provar o teorema de Bonnet.

Estamos interessados em obter informação sobre o comportamento das geodésicas vizinhas a uma dada geodésica γ. O procedimento natural é considerar variações de γ que satisfazem a condicão adicional de que as curvas da variação também são geodésicas. O campo variacional de uma tal variação nos dá uma idéia do quão densamente as geodésicas estão distribuídas em uma vizinhança de γ.

Para simplificar a exposição, vamos supor que as superfícies são completas, embora esta hipótese possa ser deixada de lado com um pouco mais de trabalho. A notação $\gamma : [0, l] \to S$ denotará uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco sobre a superfície completa S.

DEFINIÇÃO 1. *Seja $\gamma : [0, l] \to S$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco em S e seja $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ uma variação de γ tal que para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a curva $h_t(s) = h(s, t)$, $s \in [0, l]$, é uma geodésica parametrizada (não necessariamente por comprimento de arco). O campo variacional $(\partial h/\partial t)(0, t) = J(s)$ é chamado um* campo de Jacobi *ao longo de γ.*

Um exemplo trivial de um campo de Jacobi é dado pelo campo $\gamma'(s)$, $s \in [0, l]$, de vetores tangentes à geodésica γ. De fato, tomando $h(s, t) = \gamma(s + t)$, temos

$$J(s) = \frac{\partial h}{\partial t}(s, 0) = \frac{d\gamma}{ds}.$$

Estamos particularmente interessados em estudar o comportamento das geodésicas vizinhas a $\gamma : [0, l] \to S$, que partem de $\gamma(0)$. Assim, vamos considerar variações $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ que satisfazem a condição $h(0, t) = \gamma(0)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Portanto, o campo de Jacobi correspondente satisfaz a condição $J(0) = 0$ (ver Fig. 5.15).

Antes de apresentar um exemplo não-trivial de um campo de Jacobi, vamos provar que um tal campo pode ser caracterizado em termos de uma condição analítica.

Proposição 1. *Seja $J(s)$ um campo de Jacobi ao longo de $\gamma : [0, l] \to S$, $s \in [0, l]$. Então $J(s)$ satisfaz a chamada* equação de Jacobi

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial s}J(s) + K(s)(\gamma'(s) \wedge J(s)) \wedge \gamma'(s) = 0, \tag{1}$$

onde $K(s)$ é a curvatura Gaussiana de S em $\gamma(s)$.

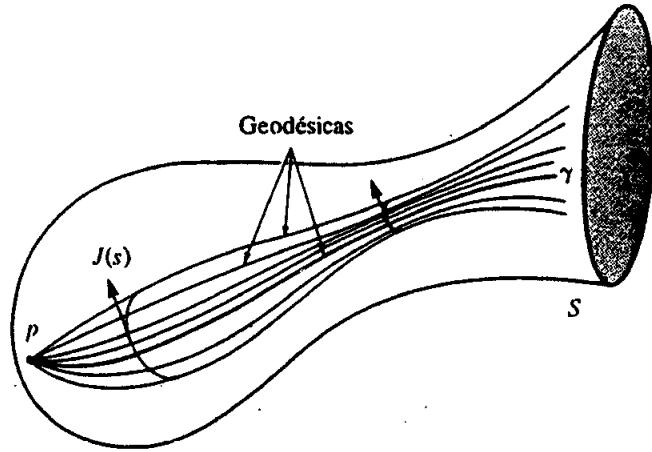



Figura 5-15

Demonstração. Pela definição de $J(s)$, existe uma variação

$$h : [0,l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$$

de γ tal que $(\partial h/\partial t)(s,0) = J(s)$ e $h_t(s)$ é uma geodésica, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Segue-se que $(D/\partial s)(\partial h/\partial s)(s,t) = 0$. Portanto,

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}(s,t) = 0, \qquad (s,t) \in [0,l] \times (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Por outro lado, usando o Lema 6 da seção 5.4 temos

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s} + K(s,t)\left(\frac{\partial h}{\partial s} \wedge \frac{\partial h}{\partial t}\right) \wedge \frac{\partial h}{\partial s} = 0.$$

Como $(D/\partial t)(\partial h/\partial s) = (D/ds)(\partial h/\partial t)$, temos, em $t = 0$,

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial s}J(s) + K(s)(\gamma'(s) \wedge J(s)) \wedge \gamma'(s) = 0.$$

Q.E.D.

Para tirar algumas conseqüências da Prop. 1, convém escrever a equação de Jacobi de uma forma mais familiar. Para isto, sejam $e_1(0)$ e $e_2(0)$ vetores ortogonais e unitários no plano tangente $T_{\gamma(0)}S$ e sejam $e_1(s)$ e $e_2(s)$ os respectivos transportes paralelos de $e_1(0)$ e $e_2(0)$ ao longo de γ.

Suponha que

$$J(s) = a_1(s)e_1(s) + a_2(s)e_2(s)$$

para certas funções $a_1 = a_1(s)$, $a_2 = a_2(s)$. Então, pelo Lema 2 da seção anterior e omitindo s para simplificar a notação, obtemos

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial s}J = a_1''e_1 + a_2''e_2.$$

Por outro lado, se escrevemos

$$(\gamma' \wedge J) \wedge \gamma' = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2,$$

temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 &= (\gamma' \wedge (a_1 e_1 + a_2 e_2)) \wedge \gamma' \\ &= a_1(\gamma' \wedge e_1) \wedge \gamma' + a_2(\gamma' \wedge e_2) \wedge \gamma'. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $\langle (\gamma' \wedge e_i) \wedge \gamma', e_j \rangle = \alpha_{ij}$, $i, j = 1, 2$, obtemos

$$\lambda_1 = a_1\alpha_{11} + a_2\alpha_{21}, \qquad \lambda_2 = a_1\alpha_{12} + a_2\alpha_{22}.$$

Segue-se que a Eq. (1) pode ser escrita

$$\begin{aligned} a_1'' + K(\alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2) = 0, \\ a_2'' + K(\alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2) = 0, \end{aligned} \tag{1a}$$

onde todos os elementos são funções de s. Note que (1a) é um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem. As soluções $(a_1(s), a_2(s)) = J(s)$ de um tal sistema estão definidas para todo $s \in [0, l]$ e constituem um espaço vetorial. Além disto, a solução $J(s)$ de (1a) (ou (1)) é completamente determinada pelas condições iniciais $J(0), (DJ/\partial s)(0)$, e a dimensão do espaço de soluções é $2 \times 2 = 4$.

Pode-se mostrar que todo campo de vetores $J(s)$ ao longo de uma geodésica $\gamma : [0, s] \to S$ que satisfaz a Eq. (1) é, de fato, um campo de Jacobi. Como estamos interessados apenas em campos de Jacobi $J(s)$ satisfazendo $J(0) = 0$, vamos demonstrar esta proposição apenas para este caso particular. (Ver Proposição 2 abaixo).

Vamos utilizar a seguinte notação. Seja T_pS, $p \in S$, o plano tangente a S no ponto p, e denote por $(T_pS)_v$ o plano tangente de T_pS, considerado como uma superfície em $\mathbb{R}^3$, em v. Como $\exp_p : T_pS \to S$,

$$d(\exp_p)_v : (T_pS)_v \to T_{\exp_p(v)}S.$$

Freqüentemente faremos o seguinte abuso de notação: Se $v, w \in T_pS$, então w denota também o vetor de $(T_pS)_v$ obtido de w por uma translação do vetor v (ver Fig. 5.16). Isto é equivalente a identificar os planos T_pS e $(T_pS)_v$, pela translação do vetor v.

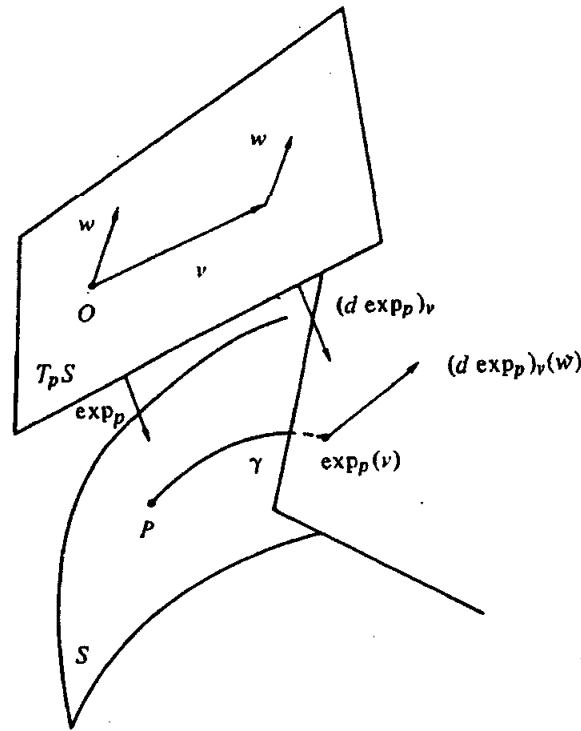



Figura 5-16

Lema 1. *Seja $p \in S$ e escolha $v, w \in T_pS$, com $|v| = l$. Seja $\gamma : [0, l] \to S$ a geodésica em S dada por*

$$\gamma(s) = \exp_p(sv), \qquad s \in [0, l].$$

Então, o campo de vetores $J(s)$ ao longo de γ dado por

$$J(s) = s(d\exp_p)_{sv}(w), \qquad s \in [0, l],$$

é um campo de Jacobi. Além disto, $J(0) = 0$, $(DJ/ds)(0) = w$.

Demonstração. Seja $t \to v(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, uma curva parametrizada em T_pS tal que $v(0) = v$ e $(dv/dt)(0) = w$. (Observe que estamos fazendo o abuso de notação mencionado acima.) Defina (ver Fig. 5.17)

$$h(s, t) = \exp_p(sv(t)), \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ s \in [0, l].$$

A aplicação h é obviamente diferenciável, e as curvas $s \to h_t(s) = h(s,t)$ são as geodésicas $s \to \exp_p(s(v(t))$. Portanto, o campo variacional de h é um campo de Jacobi ao longo de γ.

Para calcular o campo variacional $(\partial h/\partial t)(s,0)$, observe que a curva em T_pS, $s = s_0$, $t = t$, é dada por $t \to s_0 v(t)$ e que o vetor tangente a esta curva no ponto $t = 0$ é

$$s_0 \frac{dv}{dt}(0) = s_0 w.$$

Segue-se que

$$\frac{\partial h}{\partial t}(s,0) = (d\exp)_{sv}(sw) = s(d\exp)_{sv}(w).$$

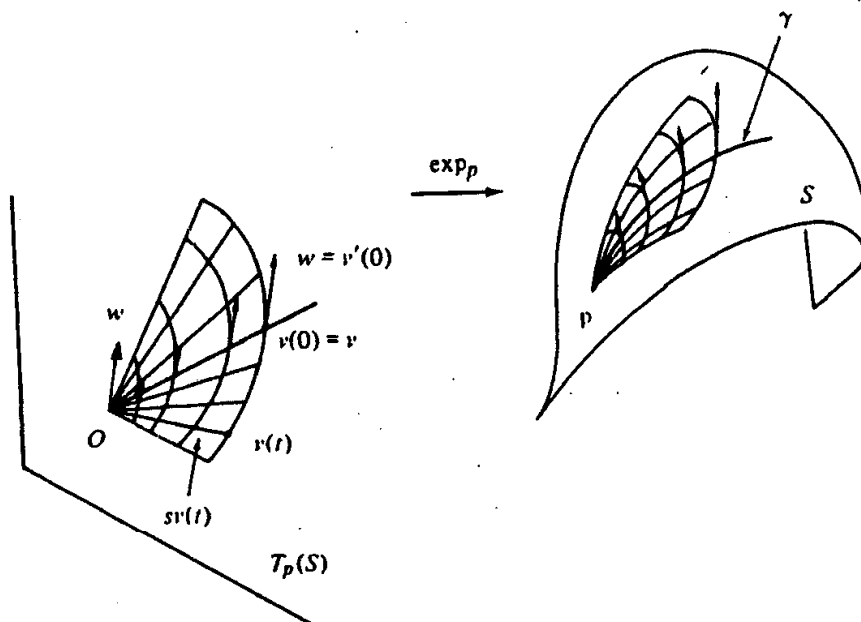



Figura 5-17

O campo de vetores $J(s) = s(d\exp_p)_{sv}(w)$ é, portanto, um campo de Jacobi. É imediato verificar que $J(0) = 0$. Para verificar a última afirmação do lema, calculamos a derivada covariante da expressão acima (cf. Lema 2, seção 5.4), obtendo

$$\frac{D}{\partial s} s(d\exp_p)_{sv}(w) = (d\exp_p)_{sv}(w) + s\frac{D}{\partial s}(d\exp_p)_{sv}(w).$$

Portanto, em $s = 0$,

$$\frac{DJ}{\partial s}(0) = (d\exp_p)_0(w) = w. \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Proposição 2. *Se consideramos $J(s)$ como um campo diferenciável de vetores ao longo de $\gamma : [0, l] \to S$, $s \in [0, l]$, satisfazendo a equação de Jacobi (1), com $J(0) = 0$, então $J(s)$ é um campo de Jacobi ao longo de γ.*

Demonstração. Seja $w = (DJ/ds)(0)$ e $v = \gamma'(0)$. Pelo Lema 1, existe um campo de Jacobi $s(d\exp_p)_{sv}(w) = \bar{J}(s)$, $s \in [0, l]$, satisfazendo

$$\bar{J}(0) = 0, \qquad \left(\frac{D\bar{J}}{ds}\right)(0) = w.$$

Então, J e $\bar{J}$ são dois campos de vetores satisfazendo o sistema (1) com as mesmas condições iniciais. Por unicidade, $J(s) = \bar{J}(s)$, $s = s[0, l]$; donde, J é um campo de Jacobi.

Q.E.D.

Estamos agora prontos para apresentar um exemplo não-trivial de um campo de Jacobi.

Exemplo. Seja $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera unitária e $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$ uma parametrização em $p \in S$, pela colatitude θ e longitude φ (seção 2.2, Exemplo1). Considere sobre o paralelo $\theta = \pi/2$ o segmento entre $\varphi_0 = \pi/2$ e $\varphi_1 = 3\pi/2$. Este segmento é uma geodésica γ, que supomos estar parametrizada por $\varphi - \varphi_0 = s$. Seja $w(s)$ o transporte paralelo ao longo de γ de um vetor $w(0) \in T_{\gamma(0)}S$, com $|w(0)| = 1$ e $\langle w(0), \gamma'(0)\rangle = 0$. Vamos mostrar que o campo de vetores (ver Fig. 5.18)

$$J(s) = (\operatorname{sen} s)w(s), \qquad s \in [0, \pi],$$

é um campo de Jacobi ao longo de γ.

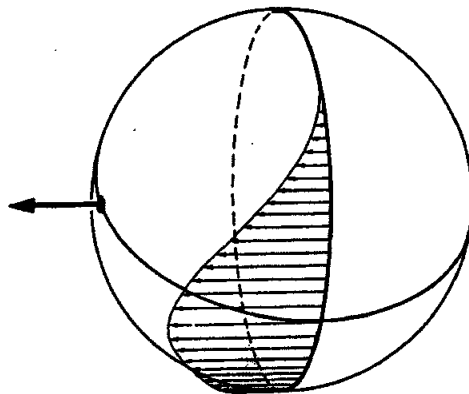



Figura 5-18. *Campo de Jacobi sobre uma esfera.*

De fato, como $J(0) = 0$, basta verificar que J satisfaz a Eq. (1). Utilizando o fato de que $K = 1$ e de que w é um campo paralelo, obtemos, sucessivamente,

$$\begin{aligned} \frac{DJ}{ds} &= (\cos s)w(s), \\ \frac{D}{ds}\frac{DJ}{ds} &= (-\operatorname{sen} s)w(s), \\ \frac{D}{ds}\frac{DJ}{ds} + K(\gamma' \wedge J) \wedge \gamma' &= (-\operatorname{sen} s)w(s) + (\operatorname{sen} s)w(s) = 0, \end{aligned}$$

o que mostra que J é um campo de Jacobi. Observe que $J(\pi) = 0$.

DEFINIÇÃO 2. *Seja $\gamma : [0, l] \to S$ uma geodésica de S com $\gamma(0) = p$. Dizemos que o ponto $q = \gamma(s_0)$, $s_0 \in [0, l]$, é* conjugado *a p em relação à geodésica γ se existe um campo de Jacobi $J(s)$, não identicamente nulo, ao longo de γ com $J(0) = J(s) = 0$.*

Como vimos no exemplo anterior, dado um ponto $p \in S^2$ de uma esfera unitária S^2, o seu ponto antípoda é conjugado a p ao longo de qualquer geodésica que começa em p.

No entanto, o exemplo da esfera não é típico. Em geral, dado um ponto p de uma superfície S, o "primeiro" ponto conjugado q a p varia quando mudamos a direção da geodésica passando por p e descreve uma curva parametrizada. O traço de uma tal curva é chamado de *lugar dos pontos conjugados* de p e é denotado por $C(p)$.

A Fig. 5.19 mostra a situação para o elipsóide, que é típica. As geodésicas partindo de um ponto p são tangentes a uma cuva $C(p)$ de tal modo que quando uma geodésica $\bar{\gamma}$ próxima a γ se aproxima de γ, então o ponto de interseção de $\bar{\gamma}$ e γ se aproxima do ponto q, conjugado a p, em relação a γ. Esta situação era expressa em termos clássicos dizendo-se que o ponto conjugado é o ponto de interseção de duas geodésicas "infinitamente próximas".

Observação 1. O fato de que, na esfera S^2, o lugar conjugado de cada ponto $p \in S^2$ se reduz a um único ponto (o ponto antípoda de p) é uma situação excepcional. De fato, pode-se provar que a esfera é a única superfície com esta propriedade (cf. L. Green, "Aufwiedersehenfläche," *Ann. Math.* 78 (1963), 289-300).

Observação 2. O lugar conjugado de um elipsóide geral foi determinado por A.Braunmühl, "Geodätische Linien auf dreiachsigen Flächen zweiten Grades,"

Math. Ann. 20 (1882), 557-586. Compare também com H.Mangoldt, "Geodätische Linien auf positiv gekrummten Flächen," *Crelles Journ.* 91 (1881), 23-52.

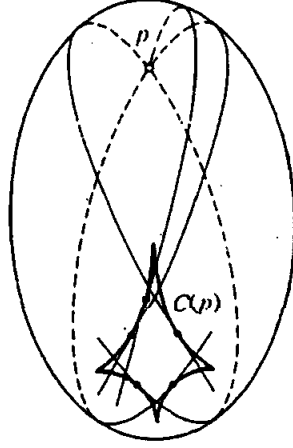



Figura 5-19. *O lugar conjugado de um elipsoide.*

Uma propriedade útil dos campos de Jacobi ao longo de $\gamma : [0, l] \to S$ é o fato de que quando $J(0) = J(l) = 0$, então

$$\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$$

para todo $s \in [0, l]$. Em verdade, isto é uma conseqüência das seguintes propriedades dos campos de Jacobi.

Proposição 3. *Sejam* $J_1(s)$ *e* $J_2(s)$ *campos de Jacobi ao longo de* $\gamma : [0, l] \to S$, $s \in [0, l]$. *Então*

$$\left\langle \frac{DJ_1}{ds}, J_2(s) \right\rangle - \left\langle J_1(s), \frac{DJ_2}{ds} \right\rangle = \text{const.}$$

Demonstração. Basta derivar a expressão do enunciado e aplicar a Prop. 1 (omitimos o s para não carregar a notação):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left\{ \left\langle \frac{DJ_1}{ds}, J_2 \right\rangle - \left\langle J_1, \frac{DJ_2}{ds} \right\rangle \right\} \\ = & \left\langle \frac{D}{ds}\frac{DJ_1}{ds}, J_2 \right\rangle - \left\langle J_1, \frac{D}{ds}\frac{DJ_2}{ds} \right\rangle + \left\langle \frac{DJ_1}{ds}, \frac{DJ_2}{ds} \right\rangle - \left\langle \frac{DJ_1}{ds}, \frac{DJ_2}{ds} \right\rangle \\ = & K\{\langle (\gamma' \wedge J_1) \wedge \gamma', J_2 \rangle - \langle (\gamma' \wedge J_2) \wedge \gamma', J_1 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Proposição 4. *Seja $J(s)$ um campo de Jacobi ao longo de $\gamma : [0, l] \to S$, com*

$$\langle J(s_1), \gamma'(s_1) \rangle = \langle J(s_2), \gamma'(s_2) \rangle = 0, \qquad s_1, s_2 \in [0, l],\ s_1 \neq s_2.$$

Então

$$\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0, \qquad s \in [0, l].$$

Demonstração. Fazendo $J_1(s) = J(s)$ e $J_2(s) = \gamma'(s)$ (que é um campo de Jacobi) na proposição anterior, obtemos

$$\left\langle \frac{DJ}{ds}, \gamma'(s) \right\rangle = \text{const.} = A.$$

Portanto,

$$\frac{d}{ds} \langle J(s), \gamma'(s) \rangle = \left\langle \frac{DJ}{ds}, \gamma'(s) \right\rangle = A;$$

donde,

$$\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = As + B,$$

onde B é uma constante. Como a expressão linear $As + B$ é nula para $s_1, s_2 \in [0, l]$, $s_1 \neq s_2$, ela é identicamente nula.

Q.E.D.

Corolário. *Seja $J(s)$ um campo de Jacobi ao longo de $\gamma : [0, l] \to S$, com $J(0) = J(l) = 0$. Então $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, $s \in [0, l]$.*

Vamos agora mostrar que os pontos conjugados podem ser caracterizados pelo comportamento da aplicação exponencial. Lembramos que quando $\varphi : S_1 \to S_2$ é uma aplicação diferenciável de uma superfície regular S_1 em uma superfície regular S_2, diz-se que $p \in S_1$ é um ponto crítico de φ se a aplicação linear

$$d\varphi_p : T_p S_1 \to T_{\varphi(p)} S_2$$

é singular, isto é, se existe $v \in T_p S_1$, $v \neq 0$, com $d\varphi_p(v) = 0$.

Proposição 5. *Sejam $p, q \in S$ dois pontos de S e seja $\gamma : [0, l] \to S$ uma geodésica ligando $p = \gamma(0)$ a $q = \exp_p(l\gamma'(0))$. Então q é conjugado a q relativo a γ se e somente se $v = l\gamma'(0)$ é um ponto crítico de $\exp_p : T_pS \to S$.*

Demonstração. Como vimos no Lema 1, para todo $w \in T_pS$ (que identificamos com $(T_PS)_v$) existe um campo de Jacobi $J(s)$ ao longo de γ com

$$\begin{aligned} J(0) &= 0 \\ \frac{DJ}{ds}(0) &= w \end{aligned}$$

e

$$J(l) = l\{(d\exp_p)_v(w)\}.$$

Se $v \in T_pS$ é um ponto crítico de $\exp_p$, existe $w \in (T_PS)_v$, $w \neq 0$, com $(d\exp_p)_v(w) = 0$. Isto implica que o campo de vetores acima $J(s)$ não é identicamente nulo e que $J(0) = J(l) = 0$; isto é, $\gamma(l)$ é conjugado a $\gamma(0)$ em relação a γ.

Reciprocamente, se $q = \gamma(l)$ é conjugado a $p = \gamma(0)$ em relação a γ, existe um campo de Jacobi $\bar{J}(s)$, não identicamente nulo, com $\bar{J}(0) = \bar{J}(l) = 0$. Seja $(D\bar{J}/ds)(0) = w \neq 0$. Construindo um campo de Jacobi $J(s)$ como acima, obtemos, por unicidade, $\bar{J}(s) = J(s)$. Como

$$J(l) = l\{(d\exp_p)_v(w)\} = \bar{J}(l) = 0,$$

concluímos que $(d\exp_p)_v(w) = 0$, com $w \neq 0$. Portanto v é um ponto crítico de $\exp_p$.

Q.E.D.

O fato de que a Eq. (1) dos campos de Jacobi envolve a curvatura Gaussiana K de S é uma indicação de que o "espalhamento das geodésicas" que partem de um ponto $p \in S$ está intimamente relacionado com a distribuição da curvatura em S (cf. Observação 2, seção 4.6). É um fato elementar que duas geodésicas vizinhas partindo de um ponto $p \in S$ inicialmente se afastam. No caso da esfera ou de um elipsóide ($K > \delta > 0$) elas se reaproximam uma da outra e são tangentes ao lugar dos pontos conjugados $C(p)$. No caso de um plano elas nunca se reaproximam. O teorema a seguir mostra que uma "versão infinitesimal" da situação para um plano acontece em superfícies com

curvatura negativa ou nula. (Ver Observação 3 depois da demonstração do teorema.)

Teorema. *Suponha que a curvatura Gaussiana K de uma superfície S satisfaça $K \leq 0$. Então, para todo $p \in S$, o lugar dos pontos conjugados de p é vazio. Ou seja, uma superfície com curvatura $K \leq 0$ não tem pontos conjugados.*

Demonstração. Seja $p \in S$ e seja $\gamma : [0, l] \to S$ uma geodésica de S com $\gamma(0) = p$. Suponha que existe um campo de Jacobi $J(s)$ que não é identicamente nulo, com $J(0) = J(l) = 0$. Vamos mostrar que isto nos leva a uma contradição.

De fato, como $J(s)$ é um campo de Jacobi e $J(0) = J(l) = 0$, temos, pelo Corolário da Prop. 4, que $\langle J(s), \gamma'(s)\rangle = 0$, $s \in [0, l]$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{D}{ds}\frac{DJ}{ds} + KJ &= 0, \\ \left\langle \frac{D}{ds}\frac{DJ}{ds}, J \right\rangle &= -K\langle J, J\rangle \geq 0, \end{aligned}$$

pois $K \leq 0$.

Segue-se que

$$\frac{d}{ds}\left\langle \frac{DJ}{ds}, J \right\rangle = \left\langle \frac{D}{ds}\frac{DJ}{ds}, J \right\rangle + \left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \right\rangle \geq 0.$$

Portanto, a função $\langle DJ/ds, J\rangle$ não decresce no intervalo $[0, l]$. Como esta função é nula para $s = 0$ e $s = l$, concluímos que

$$\left\langle \frac{DJ}{ds}, J \right\rangle = 0, \qquad s \in [0, l].$$

Finalmente, observando que

$$\frac{d}{ds}\langle J, J\rangle = 2\left\langle \frac{DJ}{ds}, J \right\rangle = 0,$$

temos $|J|^2 = \text{const}$. Como $J(0) = 0$, concluímos que $|J(s)| = 0$, $s \in [0, l]$; isto é, J é identicamente nulo em $[0, l]$. Isto é uma contradição.

Q.E.D.

Observação 3. O teorema não afirma que duas geodésicas começando em um dado ponto nunca mais irão se encontrar. Em verdade, isto é falso, como ilustram as geodésicas fechadas de um cilindro, que tem curvatura nula. A afirmação não é verdadeira mesmo se considerarmos geodésicas começando em um ponto dado p e com "direções vizinhas" (em p). Basta considerar um meridiano de um cilindro e observar que as hélices que seguem direções próximas (em p) da direção do meridiano encontram este meridiano. O que o teorema afirma é que o ponto de interseção de duas geodésicas "vizinhas" vai para o infinito à medida que estas geodésicas se aproximam (isto é precisamente o que acontece no cilindro). Usando uma terminologia clássica, podemos dizer que duas geodésicas "infinitamente próximas" nunca se encontram. Neste sentido, o teorema é uma versão infinitesimal da situação que ocorre em um plano.

Uma conseqüência imediata da Prop. 5, do teorema acima, e do teorema da função inversa é o corolário seguinte.

Corolário. *Suponha que a curvatura Gaussiana K de S seja negativa ou nula. Então para todo $p \in S$, a aplicação*

$$\exp_p : T_pS \to S$$

é um difeomorfismo local.

Vamos utilizar mais adiante o lema seguinte, que generaliza o fato de que, em uma vizinhança normal de p, os círculos geodésicos são ortogonais às geodésicas radiais (seção 4.6, Prop. 3 e Observação 1).

Lema 2 (Gauss). *Seja $p \in S$ um ponto de uma superfície (completa) S e seja $u \in T_pS$ e $w \in (T_pS)_u$. Então*

$$\langle u, w \rangle = \left\langle (d\exp_p)_u(u), (d\exp_p)_u(w) \right\rangle,$$

onde usamos a identificação $T_pS \approx (T_pS)_u$.

Demonstração. Seja $l = |u|$, $v = u/|u|$ seja $\gamma : [0, l] \to S$ uma geodésica de S dada por

$$\gamma(s) = \exp_p(sv), \qquad s \in [0, l].$$

Então $\gamma'(0) = v$. Além disto, se consideramos a curva $s \to sv$ em T_pS que passa por u em $s = l$ e tem vetor tangente v (ver Fig. 5.20), obtemos

$$\gamma'(l) = \frac{d}{ds}(\exp_p(sv))\Big|_{s=l} = (d\exp_p)_u(v).$$

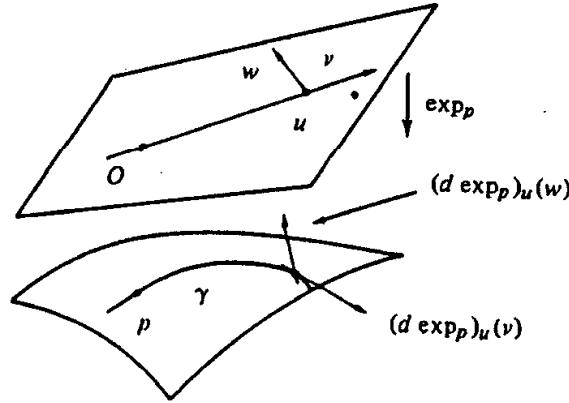



Figura 5-20

Considere agora um campo de Jacobi ao longo de γ, dado por $J(0) = 0$, $(DJ/ds)(0) = w$ (cf. Lema 1). Então, como $\gamma(s)$ é uma geodésica,

$$\frac{d}{ds}\langle\gamma'(s), J(s)\rangle = \left\langle\gamma'(s), \frac{DJ}{ds}\right\rangle,$$

e como J é um campo de Jacobi,

$$\frac{d}{ds}\left\langle\gamma'(s), \frac{DJ}{ds}\right\rangle = \left\langle\gamma'(s), \frac{D^2J}{ds^2}\right\rangle = 0.$$

Segue-se que

$$\frac{d}{ds}\langle\gamma'(s), J(s)\rangle = \left\langle\gamma'(s), \frac{DJ}{ds}\right\rangle = \text{ const. } = C; \tag{2}$$

donde (como $J(0) = 0$)

$$\langle\gamma'(s), J(s)\rangle = Cs. \tag{3}$$

Para calcular a constante C, faça $s = l$ na Eq. (3). Pelo Lema 1,

$$J(l) = l(d\exp_p)_u(w).$$

Portanto,

$$Cl = \langle \gamma'(l), J(l) \rangle = \left\langle (d\exp_p)_u(v), l(d\exp_p)_u(w) \right\rangle.$$

A partir da Eq. (2) concluímos que

$$\left\langle \gamma'(l), \frac{DJ}{ds}(l) \right\rangle = C = \left\langle \gamma'(0), \frac{DJ}{ds}(0) \right\rangle = \langle v, w \rangle.$$

Utilizando o valor de C, obtemos da expressão acima

$$\langle u, w \rangle = \left\langle (d\exp_p)_u(u), (d\exp_p)_u(w) \right\rangle.$$

Q.E.D.

Exercícios

1. **a.** Seja $\gamma : [0, l] \to S$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco em uma superfície S e $J(s)$ um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$, $\langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = 0$. Prove que $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$ para todo $s \in [0, l]$.

   b. Suponha agora que $|J'(0)| = 1$. Tome o transporte paralelo de $e_1(0) = \gamma'(0)$ e $e_2(0) = J'(0)$ ao longo de γ e obtenha bases ortonormais $\{e_1(s), e_2(s)\}$ para todos os $T_{\gamma(s)}S$, $s \in [0, l]$. Pela parte **a**, $J(s) = u(s)e_2(s)$ para alguma função $u = u(s)$. Mostre que a equação de Jacobi para J pode ser escrita como

   $$u''(s) + K(s)u(s) = 0,$$

   com condições iniciais $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

2. Mostre que o ponto $p = (0, 0, 0)$ de um parabolóide $z = x^2 + y^2$ não tem ponto conjugado em relação à geodésica $\gamma(s)$ com $\gamma(0) = p$.

3. (*Teorema de Comparação.*) Sejam S e $\tilde{S}$ superfícies completas. Seja $p \in S$, $\tilde{p} \in \tilde{S}$ e escolha uma isometria linear $i : T_pS \to T_{\tilde{p}}\tilde{S}$. Seja $\gamma : [0, \infty) \to S$ uma geodésica em S com $\gamma(0) = p$, $|\gamma'(0)| = 1$, e seja $J(s)$ um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$, $\langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = 0$, $|J'(0)| = 1$. Utilizando a isometria linear i, construa uma geodésica $\tilde{\gamma}$:

$[0, \infty) \to \tilde{S}$ com $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$, $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$, e um campo de Jacobi $\tilde{J}$ ao longo de $\tilde{\gamma}$ com $\tilde{J}(0) = 0$, $\tilde{J}'(0) = i(J'(0))$ (Fig. 5.21). Vamos descrever abaixo dois teoremas (que são essencialmente interpretações geométricas dos teoremas clássicos de Sturm) que nos permitem comparar os campos de Jacobi J e $\tilde{J}$ a partir de uma "hipótese de comparação" sobre as curvaturas de S e $\tilde{S}$.

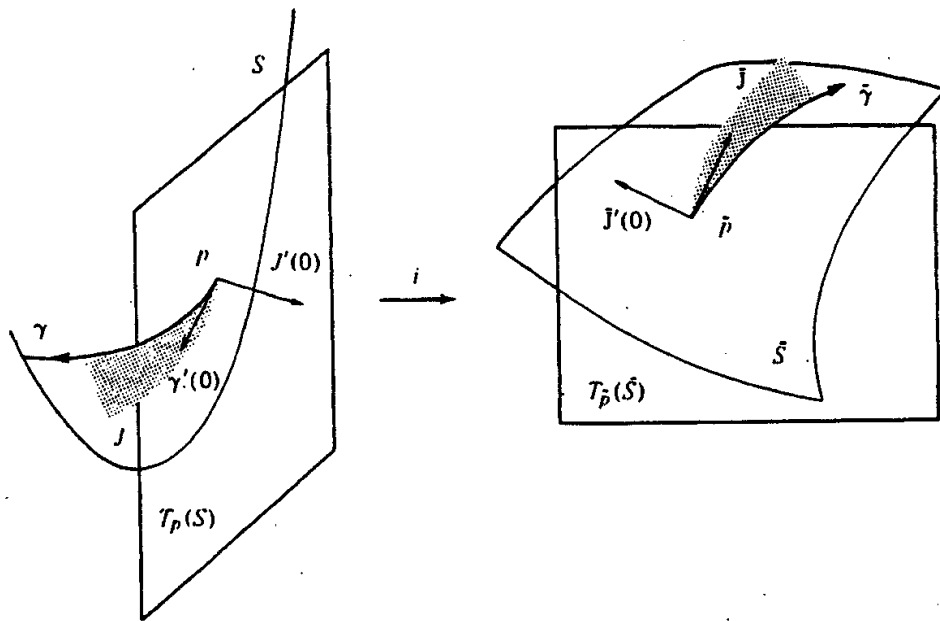



Figura 5-21

a. Use o Exercício 1 para mostrar que $J(s) = v(s)e_2(s)$, $\tilde{J}(s) = u(s)\tilde{e}_2(s)$, onde $u = u(s)$, $v = v(s)$ são funções diferenciáveis, e $e_2(s)$ (respectivamente, $\tilde{e}_2(s)$) é o transporte paralelo ao longo de γ (respectivamente, $\tilde{\gamma}$) de $J'(0)$ (respectivamente, $\tilde{J}'(0)$). Conclua que as equações de Jacobi para J e $\tilde{J}$ são

$$\begin{aligned} v''(s) + K(s)v(s) &= 0, \qquad v(0) = 0,\ v'(0) = 1, \\ u''(s) + \tilde{K}(s)u(s) &= 0, \qquad u(0) = 0,\ u'(0) = 1, \end{aligned}$$

respectivamente, onde K e $\tilde{K}$ denotam as curvaturas Gaussianas de S e $\tilde{S}$.

*b. Suponha que $K(s) \leq \tilde{K}(s)$, $s \in [0, \infty)$. Mostre que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^s \{u(v'' + Kv) - v(u'' + \tilde{K}u)\}\, ds \\ &= [uv' - vu']_0^s + \int_0^s (K - \tilde{K})\, ds. \end{aligned} \tag{*}$$

Conclua que se a é o primeiro zero de u em $(0, \infty)$ (i.e., $u(a) = 0$ e $u(s) > 0$ em $(0, a)$) e b é o primeiro zero de v em $(0, \infty)$, então $b \geq a$. Assim, *se $K(s) \leq \tilde{K}(s)$ para todo s, o primeiro ponto conjugado de p com relação a γ não ocorre antes do primeiro ponto conjugado a $\tilde{p}$ com relaçao a $\tilde{\gamma}$*. Este é chamado de *primeiro teorema de comparação.*

*c. Suponha que $K(s) \leq \tilde{K}(s)$, $s \in [0, a)$. Use (*) e o fato de que u e v são positivas em $(0, a)$ para obter que $[uv' - vu']_0^s \geq 0$. Utilize esta desigualdade para mostrar que $v(s) \geq u(s)$ para todo $s \in (0, a)$. *Assim, se $K(s) \leq \tilde{K}(s)$ para todo s antes do primeiro ponto conjugado de $\tilde{\gamma}$, então, para estes valores de s, $|J(s)| \geq \left|\tilde{J}(s)\right|$*. Este é chamado de *segundo teorema de comparação* (é claro, ele inclui o primeiro como um caso particular; separamos o primeiro caso por ele ser mais fácil e porque é o que se usa com maior freqüência).

d. Prove que na parte **c** a igualdade $v(s) = u(s)$ ocorre para todo $s \in [0, a)$ se e somente se $K(s) = \tilde{K}(s)$, $s \in [0, a)$.

4. Seja S uma superfície completa com curvatura Gaussiana $K \leq K_0$, onde K_0 é uma constante positiva. Compare S com uma esfera $S^2(K_0)$ com curvatura K_0 (isto é, coloque, no Exercício 3, $\tilde{S} = S^2(K_0)$ e use o primeiro teorema de comparação, Exercício 3, parte **b**) para concluir que qualquer geodésica $\gamma[0, \infty) \to S$ em S não tem ponto conjugado a $\gamma(0)$ no intervalo $(0, \pi/\sqrt{K_0})$.

5. Seja S uma superfície completa com $K \geq K_1 > 0$, onde K é a curvatura Gaussiana de S e K_1 é uma constante. Prove que toda geodésica $\gamma : [0, \infty) \to S$ tem um ponto conjugado a $\gamma(0)$ no intervalo $(0, \pi/\sqrt{K_1}]$.

*6. (*Teorema de Oscilação de Sturm*) Este exercício nos dá uma pequena generalização do primeiro teorema de comparação (Exercício 3, parte **b**)

que muitas vezes é útil. Seja S uma superfície completa e $\gamma[0,\infty) \to S$ uma geodésica em S. Seja $J(s)$ um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = J(s_0) = 0$, $s_0 \in (0,\infty)$ e $J(s) \neq 0$, para $s \in (0, s_0)$. Assim, $J(s)$ é um campo normal (corolário da Prop. 4). Segue-se que $J(s) = v(s)e_2(s)$, onde $v(s)$ é uma solução de

$$v''(s) + K(s)v(s) = 0, \qquad s \in [0,\infty),$$

e $e_2(s)$ é o transporte paralelo de um vetor unitário em $T_{\gamma(0)}S$ normal a $\gamma'(0)$. Suponha que a curvatura Gaussiana $K(s)$ de S satisfaz $K(s) \leq L(s)$, onde $L(s)$ é uma função diferenciável em $[0,\infty)$. Prove que qualquer solução de

$$u''(s) + L(s)u(s) = 0, \qquad s \in [0,\infty),$$

tem um zero no intervalo $(0, s_0]$ (i.e., existe $s_1 \in (0, s_0]$ com $u(s_1) = 0$).

7. (*Critério de Kneser para Pontos Conjugados.*) Seja S uma superfície completa e seja $\gamma : [0,\infty) \to S$ uma geodésica em S com $\gamma(0) = p$. Seja $K(s)$ a curvatura Gaussiana de S ao longo de γ. Suponha que

$$\int_t^\infty K(s)\,ds \leq \frac{1}{4(t+1)}, \qquad \text{para todo } t \geq 0, \qquad (*)$$

no sentido de que a integral converge e é limitada como indicado acima.

a. Defina

$$w(t) = \int_t^\infty K(s)\,ds + \frac{1}{4(t+1)}, \qquad t \geq 0,$$

e mostre que $w'(t) + (w(t))^2 \leq -K(t)$.

b. Coloque, para $t \geq 0$, $w'(t) + (w(t))^2 = -L(t)$ (de modo que $L(t) \geq K(t)$) e defina

$$v(t) = \exp\left(\int_0^t w(s)\,ds\right), \qquad t \geq 0.$$

Mostre que $v''(t) + L(t)v(t) = 0$, $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$.

c. Note que $v(t) > 0$, e use o teorema de oscilação de Sturm (Exercício 6) para mostrar que não existe campo de Jacobi ao longo de $\gamma(s)$ com $J(0) = 0$ e $J(s_0) = 0$, $s \in (0, \infty)$. *Assim, se vale* $(*)$, *não há ponto conjugado a* p *ao longo de* γ.

*8. Seja $\gamma : [0, l] \to S$ uma geodésica em uma superfície completa S, e suponha que $\gamma(l)$ não seja conjugado a $\gamma(0)$. Seja $w \in T_{\gamma(0)}S$ e $w_1 \in T_{\gamma(l)}S$. Prove que existe um único campo de Jacobi $J(s)$ ao longo de γ com $J(0) = w_0$ e $J(l) = w_1$.

9. Seja $J(s)$ um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $\gamma : [0, l] \to S$ tal que $\langle J(0), \gamma'(0)\rangle = 0$ e $J'(0) = 0$. Prove que $\langle J(s), \gamma'(s)\rangle = 0$ para todo $s \in [0, l]$.

5.6 Espaços de Recobrimento; Teoremas de Hadamard

Vimos na seção anterior que quando a curvatura K de uma superfície completa satisfaz a condição $K \leq 0$ então a aplicação $\exp_p : T_pS \to S$, $p \in S$, é um difeomorfismo local. É natural perguntarmos quando é que este difeomorfismo local é um difeomorfismo global. Convém colocar esta questão em um contexto mais geral e para isto precisamos da noção de espaço de recobrimento.

A. Espaços de Recobrimento

DEFINIÇÃO 1. *Sejam* $\tilde{B}$ *e* B *subconjuntos de* $\mathbb{R}^3$. *Dizemos que* $\pi : \tilde{B} \to B$ *é uma* aplicação de recobrimento *se*

1. π *é contínua e* $\pi(\tilde{B}) = B$.

2. *Cada ponto* $p \in B$ *admite uma vizinhança* U *em* B *(chamada* vizinhança distinguida *de* p*) tal que*

$$\pi^{-1}(U) = \cup_\alpha V_\alpha,$$

onde os V_α *são conjuntos abertos disjuntos dois a dois tais que a restrição de* π *a* V_α *é um homeomorfismo de* V_α *sobre* U.

$\tilde{B}$ *é então chamado um* espaço de recobrimento *de* B.

Exemplo 1. Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ um plano de $\mathbb{R}^3$. Fixando um ponto $q_0 \in P$ e dois vetores ortogonais $e_1, e_2 \in P$, com origem em q_0, todo ponto $q \in P$ é caracterizado por coordenadas $(u, v) = q$ dadas por

$$q - q_0 = ue_1 + ve_2.$$

Seja agora $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1\}$ um cilindro circular reto cujo eixo é o eixo Oz, e seja $\pi : P \to S$ a aplicação definida por

$$\pi(u, v) = (\cos u,\ \operatorname{sen} u, v)$$

(o significado geométrico desta aplicação é o de enrolar o plano em torno do cilindro S uma infinidade de vezes; ver Fig. 5.22).

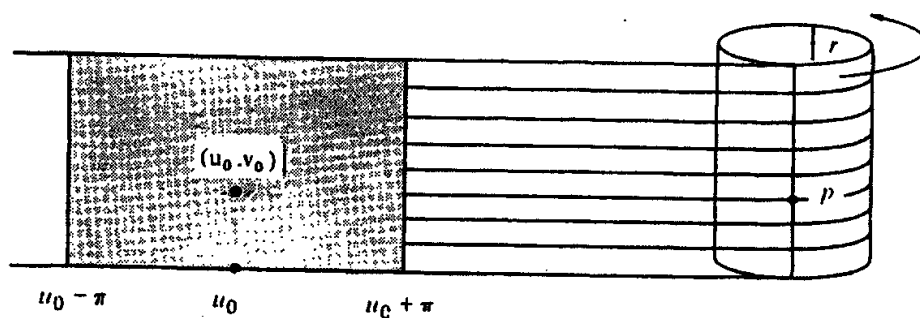



Figura 5-22

Vamos agora provar que π é uma aplicação de recobrimento. Observamos primeiro que quando $(u_0, v_0) \in P$, a aplicação π restrita à faixa

$$R = \{(u, v) \in P;\ u_0 - \pi \leq u \leq u_0 + \pi\}$$

cobre S inteiramente. Em verdade, π restrita ao interior de R é uma parametrização de S, cuja vizinhança coordenada cobre S menos uma geratriz. Segue-se que π é contínua (em verdade, diferenciável) e que $\pi(P) = S$, verificando assim a condição 1.

Para verificar a condição 2, seja $p \in S$ e $U = S - r$, onde r é a geratriz oposta à geratriz passando por p. Vamos provar que U é uma vizinhança distinguida de p.

Seja $(u_o, v_0) \in P$ tal que $\pi(u_0, v_0) = p$ e escolha como V_n a faixa dada por

$$V_n = \{(u, v) \in P;\ u_0 + (2n - 1)\pi < u < u_0 + (2n + 1)\pi\},$$

onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

É imediato verificar que se $n \neq m$, então $V_n \cap V_m = \emptyset$ e que $\cup_n V_n = \pi^{-1}(U)$. Além disto, pela observação inicial, π restrita a qualquer V_n é um homeomorfismo sobre U. Segue-se que U é uma vizinhança distinguida de p. Isto verifica a condição 2 e mostra que o plano P é um espaço de recobrimento do cilindro S.

Exemplo 2. Seja H a hélice

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ z = bt,\ t \in \mathbb{R}\}$$

e seja

$$S^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1\}$$

um círculo unitário. Seja $\pi : H \to S^1$ definido por

$$\pi(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Vamos provar que π é uma aplicação de recobrimento (ver Fig. 5.23).

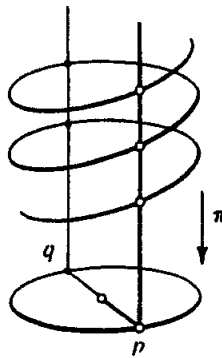



Figura 5-23

É claro que π é contínua e que $\pi(H) = S^1$. Isto verifica a condição 1.

Para verificar a condição 2, seja $p \in S^1$. Vamos provar que $U = S^1 - \{q\}$, onde $q \in S^1$ é o ponto simétrico a p, é uma vizinhança distinguida de p. De fato, seja $t_0 \in R$ tal que

$$\pi(\cos t_0,\ \operatorname{sen} t_0, bt_0) = p.$$

Vamos tomar como V_n o arco da hélice que corresponde ao intervalo

$$(t_0 + (2n-1)\pi, t_0 + (2n+1)\pi) \subset \mathbb{R}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

É então fácil mostrar que $\pi^{-1}(U) = \cup_n V_n$, que os V_n são dois a dois disjuntos, e que π restrita a qualquer dos V_n é um homeomorfismo sobre U. Isto verifica a condição 2 e conclui o exemplo.

Seja agora $\pi : \tilde{B} \to B$ uma aplicação de recobrimento. Como $\pi(\tilde{B}) = B$, cada ponto $\tilde{p} \in \tilde{B}$ é tal que $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ para algum $p \in B$. Portanto, existe uma vizinhança V_α de $\tilde{p}$ tal que π restrita a V_α é um homeomorfismo. Segue-se que π é um homeomorfismo local. O exemplo abaixo mostra, contudo, que existem homeomorfismo locais que não são aplicações de recobrimento.

Antes de apresentar o exemplo deve-se observar que se U é uma vizinhança distinguida de p, então qualquer vizinhança $\bar{U}$ de p tal que $\bar{U} \subset U$ também é uma vizinhança distinguida de p. Como $\pi^{-1}(\bar{U}) \subset V_\alpha$ e os V_α são dois a dois disjuntos, obtemos

$$\pi^{-1}(\bar{U}) = \cup_\alpha W_\alpha,$$

onde os conjuntos $W_\alpha = \pi^{-1}(\bar{U}) \cap V_\alpha$ também são dois a dois disjuntos (ver condição 2 da Def. 1). Desta maneira, quando estivermos tratando com vizinhanças distinguidas, poderemos nos restringir a vizinhanças "pequenas".

Exemplo 3. Considere no Exemplo 2 um segmento $\tilde{H}$ da hélice H que corresponde ao intervalo $(\pi, 4\pi) \subset \mathbb{R}$. É claro que a restrição $\tilde{\pi}$ de π a este segmento aberto da hélice continua sendo um homeomorfismo local e que $\tilde{\pi}(\tilde{H}) = S^1$. No entanto, nenhuma vizinhança de

$$\pi(\cos 3\pi, \operatorname{sen} 3\pi, b3\pi) = (-1, 0, 0) = p \in S^1$$

pode ser uma vizinhança distinguida. De fato, tomando U suficientemente pequeno, $\tilde{\pi}^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, onde V_1 é o segmento da hélice que corresponde a $t \in (\pi, \pi + \varepsilon)$ e V_2 é o segmento que corresponde a $t \in (3\pi - \varepsilon, 3\pi + \varepsilon)$. Entretanto $\tilde{\pi}$ restrito a V_1 não é um homeomorfismo sobre U pois $\tilde{\pi}(V_1)$ nem sequer contém p. Segue-se que $\tilde{\pi} : \tilde{H} \to S^1$ é um homeomorfismo local sobre S^1 mas não é uma aplicação de recobrimento.

Podemos agora reformular a questão colocada no início desta seção na seguinte forma mais geral: Sob quais condições um homeomorfismo local é um homeomorfismo global?

A noção de espaço de recobrimento nos permite desdobrar esta questão em duas outras questões da seguinte forma:

1. Sob quais condições um homeomorfismo local é uma aplicação de recobrimento?

2. Sob quais condições uma aplicação de recobrimento é um homeomorfismo global?

Uma resposta simples à questão 1 é dada pela proposição seguinte.

Proposição 1. *Seja $\pi : \tilde{B} \to B$ um homeomorfismo local, $\tilde{B}$ compacta e B conexa. Então π é uma aplicação de recobrimento.*

Demonstração. Como γ é um homeomorfismo local $\pi(\tilde{B}) \subset B$ é aberto em B. Além disto, pela continuidade de π, $\pi(\tilde{B})$ é compacto, logo fechado em B. Como $\pi(\tilde{B}) \subset B$ é aberto e fechado em um conjunto conexo B, $\pi(\tilde{B}) = B$. Assim, a condição 1 da Def. 1 está verificada.

Para verificar a condição 2, seja $b \in B$. Então $\pi^{-1}(B) \subset \tilde{B}$ é finito. Caso contrário, $\pi^{-1}(B)$ teria um ponto de acumulação $\tilde{q} \in \tilde{B}$ e isto contradiz o fato de que $\pi : \tilde{B} \to B$ é um homeomorfismo local. Portanto, podemos escrever $\pi^{-1}(b) = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k\}$.

Seja W_i uma vizinhança de $\tilde{b}_i$, $i = 1, \dots, k$, tal que a restrição de π a W_i seja um homeomorfismo (π é um homeomorfismo local). Como $\pi^{-1}(b)$ é finito, é possível escolher os W_i suficientemente pequenos de forma que sejam dois a dois disjuntos. Como π é um homeomorfismo local, a imagem por π de um conjunto fechado em $\tilde{B}$ é um conjunto fechado em B. Segue-se que existe uma vizinhança U de b tal que $U \subset \cap(\pi(W_i))$ e que $\pi^{-1}(U) \subset U_i W_i$ (ver Fig. 5.24). Fazendo $V_i = \pi^{-1}(U) \cap W_i$ temos que

$$\pi^{-1}(U) = \cup_i V_i$$

e que os V_i são dois a dois disjuntos. Além disto, é claro que a restrição de π a V_i é um homeomorfismo sobre U. Segue-se então que U é uma vizinhança distinguida de b. Isto verifica a condição 2 e conclui a demonstração.

Q.E.D.

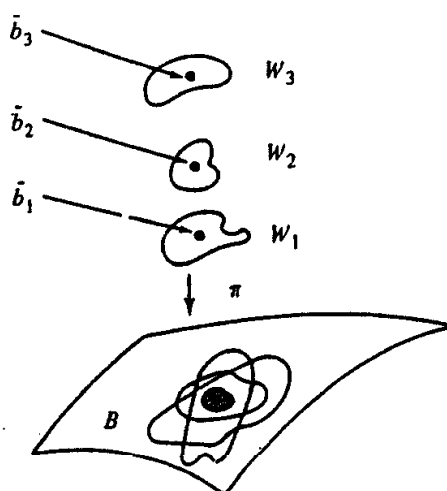



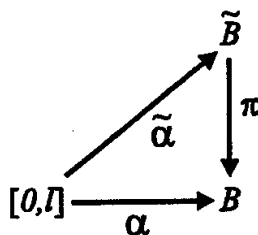
Figura 5-24

Quando $\tilde{B}$ não é compacto existem poucos critérios úteis para afirmar que um homeomorfismo local é uma aplicação de recobrimento. Um caso especial será tratado mais adiante. Para este caso especial, bem como para o tratamento da questão 2, precisamos voltar aos espaços de recobrimento.

A propriedade mais importante de uma aplicação de recobrimento é a possibilidade de "levantar" curvas contínuas em B de forma a obter curvas contínuas em $\tilde{B}$. Para sermos mais precisos vamos introduzir a seguinte terminologia.

Seja $B \subset \mathbb{R}^3$. Lembremos que uma aplicação contínua $\alpha : [0,l] \to B$, $[0,l] \subset \mathbb{R}$, é chamado um caminho de B (ver apêndice ao Capítulo 5, Def. 8). Sejam agora $\tilde{B}$ e B subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Seja $\pi : \tilde{B} \to B$ uma aplicação contínua e $\alpha : [0,l] \to B$ um caminho de B. Se existe um caminho de $\tilde{B}$,

$$\tilde{\alpha} : [0,l] \to \tilde{B},$$

com $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, dizemos que $\tilde{\alpha}$ é um *levantamento* de α com origem em $\tilde{\alpha}(0) \in \tilde{B}$. A situação é descrita no diagrama abaixo.

Com a terminologia acima, uma propriedade fundamental dos espaços de recobrimento é expressa pela seguinte proposição de existência e unicidade.

Proposição 2. *Seja $\pi : \tilde{B} \to B$ uma aplicação de recobrimento, $\alpha : [0, l] \to B$ um caminho em B, e $\tilde{p}_0 \in \tilde{B}$ um ponto de $\tilde{B}$ tal que $\pi(\tilde{p}_0) = \alpha(0) = p_0$. Então existe um único levantamento $\tilde{\alpha} : [0, l] \to \tilde{B}$ de α com origem em $\tilde{p}_0$, isto é, com $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$.*

Demonstração. Vamos primeiro provar a unicidade. Sejam $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta} : [0, l] \to \tilde{B}$ dois levantamentos de α com origem em $\tilde{p}_0$. Seja $A \subset [0, l]$ o conjunto de pontos $t \in [0, l]$ tais que $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\beta}(t)$. A é não-vazio e evidentemente fechado em $[0, l]$.

Vamos provar que A é aberto em $[0, l]$. Suponha que $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\beta}(t) = \tilde{p}$. considere uma vizinhança V de $\tilde{p}$ na qual π é um homeomorfismo. Como $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são aplicações contínuas, existe um intervalo aberto $I_t \subset [0, l]$ contendo t tal que $\tilde{\alpha}(I_t) \subset V$ e $\tilde{\beta}(I_t) \subset V$. como $\pi \circ \tilde{\alpha} = \pi \circ \tilde{\beta}$ e π é um homeomorfismo em V, $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ em I_t, e assim A é aberto. Segue-se que $a = [0, l]$, e os dois levantamentos coincidem para todo $t \in [0, l]$.

Vamos agora provar a existência. Como α é contínua, para todo $\alpha(t) \in B$ existe um intervalo $I_t \subset [0, l]$ contendo t tal que $\alpha(I_t)$ está contido em uma vizinhança distinguida de $\alpha(t)$. A família I_t, $t \in [0, l]$, é uma cobertura aberta de $[0, l]$ que, pela compacidade de $[0, l]$, admite uma subcobertura finita, digamos $I_0, \dots, I_n$.

Suponha que $0 \in I_0$. (Caso contrário, mudamos a numeração dos intervalos.) Como $\alpha(I_0)$ está contido em uma vizinhança distinguida U_0 de p, existe uma vizinhança V_0 de $\tilde{p}_0$ tal que a restrição π_0 de π a V_0 é um homeomorfismo sobre U_0. Definimos, para $t \in I_0$ (ver Fig. 5.25),

$$\tilde{\alpha}(t) = \pi_0^{-1} \circ \alpha(t),$$

onde π_0^{-1} é a aplicação inversa em U_0 do homeomorfismo π_0. É claro que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(0) &= \tilde{p}_0, \\ \pi \circ \tilde{\alpha}(t) &= \alpha(t), \qquad t \in I_0. \end{aligned}$$

Suponha agora que $I_1 \cap I_0 \neq \emptyset$ (caso contrário, poderíamos mudar a ordem dos intervalos). Seja $t_1 \in I_1 \cap I_0$. Como $\alpha(I_1)$ está contido em uma vizinhança distinguida U_1 de $\alpha(t_1)$, podemos definir um levantamento de α em I_1 com origem em $\tilde{\alpha}(t_1)$. Por unicidade, este caminho coincide com $\tilde{\alpha}$ em $I_1 \cap I_0$, e, portanto, é uma extensão de $\tilde{\alpha}$ a $I_1 \cup I_0$. Continuando com este processo, construímos um caminho $\tilde{\alpha} : [0, l] \to \tilde{B}$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$ e $\pi \circ \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$, $t \in [0, l]$.

Q.E.D.

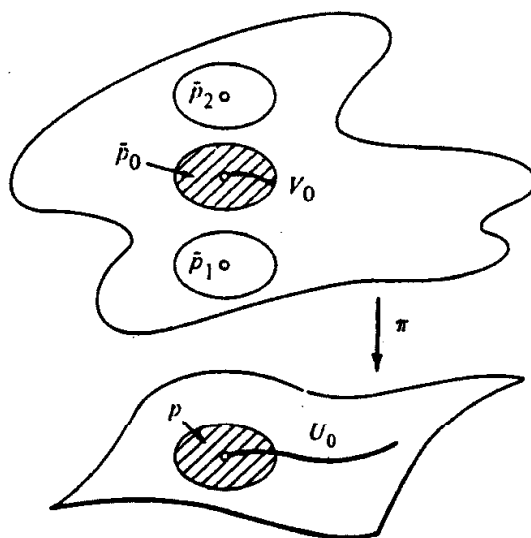



Figura 5-25

Uma conseqüência interessante da propriedade de levantar caminhos de uma aplicação de recobrimento $\pi : \tilde{B} \to B$ é o fato de que quando B é conexo por caminhos existe uma correspondência bijetiva entre os conjuntos $\pi^{-1}(p)$ e $\pi^{-1}(q)$, onde p e q são dois pontos arbitrários de B. De fato, se B é conexo por caminhos, existe um caminho $\alpha[0,l] \to B$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(l) = q$. Para todo $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$, existe um levantamento $\tilde{\alpha}_p : [0,l] \to \tilde{B}$, com $\tilde{\alpha}_p(0) = \tilde{p}$. Defina agora $\varphi : \pi^{-1}(p) \to \pi^{-1}(q)$ por $\varphi(\tilde{p}) = \tilde{\alpha}_p(l)$; isto é, seja $\varphi(\tilde{p})$ a extremidade do levantamento de α com origem em $\tilde{p}$. Pela unicidade do levantamento, φ é uma correspondência bijetiva como afirmado.

Segue-se que o "número" de pontos de $\pi^{-1}(p)$, $p \in B$, não depende de p quando B é conexo por caminhos. Se este número for finito, ele é chamado o *número de folhas* do recobrimento. Se $\pi^{-1}(p)$ não é finito, dizemos que o recobrimento é infinito. Os exemplos 1 e 2 são recobrimentos infinitos. Observe que quando $\tilde{B}$ é compacto o recobrimento é sempre finito.

Exemplo 4. Seja

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ t \in \mathbb{R}\}$$

o círculo unitário e defina a aplicação $\pi : S^1 \to S^1$ por

$$\pi(\cos t,\ \operatorname{sen} t) = (\cos kt,\ \operatorname{sen} kt),$$

onde k é um inteiro positivo e $t \in \mathbb{R}$. Pelo teorema da aplicação inversa, π é um difeomorfismo local, e logo um homeomorfismo. Como S^1 é compacto, podemos aplicar a Prop. 1. Assim, $\pi : S^1 \to S^1$ é uma aplicação de recobrimento.

Geometricamente, π enrola o primeiro S^1 k vezes sobre o segundo S^1. Observe que a imagem inversa de um ponto $p \in S^1$ contém exatamente k pontos. Assim, π é um recobrimento de k folhas de S^1.

Para um tratamento da questão 2 precisamos tornar precisas algumas idéias que surgem das seguintes considerações. Para que uma aplicação de recobrimento $\pi : \tilde{B} \to B$ seja um homeomorfismo basta que ela seja injetiva. Portanto, teremos que encontrar uma condição que assegure que quando dois pontos $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ de $\tilde{B}$ se projetam por π sobre o mesmo ponto

$$p = \pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2)$$

de B, isto implica que $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$. Vamos supor que $\tilde{B}$ seja conexo por caminhos e projetar um caminho $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{B}$, ligando $\tilde{p}_1$ a $\tilde{p}_2$, sobre o caminho fechado α de B que liga p a p (ver Fig. 5.26). Se B não tiver "buracos" (em um sentido que tornaremos preciso a seguir), é possível "deformar α continuamente até chegarmos ao ponto p". Isto é, existe uma família de caminhos α_t, contínua em t, $t \in [0,1]$, com $\alpha_0 = \alpha$ e α_1 igual ao caminho constante p. Como $\tilde{\alpha}$ é um levantamento de α, é natural esperar que os caminhos α_t também possam ser levantados em uma família $\tilde{\alpha}_t$, contínua em t, $t \in [0,1]$, com $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}$. Segue-se que $\tilde{\alpha}_1$ é um levantamento do caminho constante p e, portanto, se reduz a um único ponto. Por outro lado, $\tilde{\alpha}_1$ liga $\tilde{p}_1$ a $\tilde{p}_2$ e então podemos concluir que $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$.

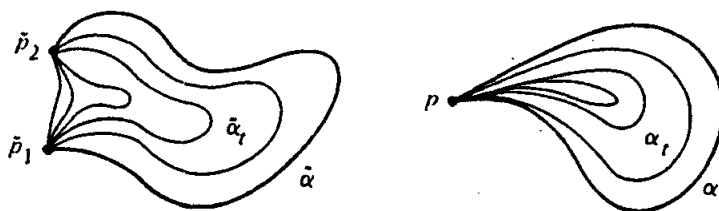



Figura 5-26

Para tornar rigoroso o argumento heurístico acima temos que definir "uma família contínua de caminhos ligando dois caminhos dados" e mostrar que uma tal família pode ser "levantada".

DEFINIÇÃO 2. *Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ e sejam $\alpha_0 : [0,l] \to B$, $\alpha_1 : [0,l] \to B$ dois caminhos de B, ligando os pontos*

$$p = \alpha_0(0) = \alpha_1(0), \text{ e } q = \alpha_0(l) = \alpha_1(l).$$

Dizemos que α_0 e α_1 são homotópicos *se existe uma aplicação contínua $H : [0,l] \times [0,1] \to B$ tal que*

1. $H(s,0) = \alpha_0(s)$, $H(s,1) = \alpha_1(s)$, $\quad s \in [0,l]$.
2. $H(0,t) = p$, $H(l,t) = q$, $\quad t \in [0,1]$.

A aplicação H é chamada uma homotopia *entre α_0 e α_1.*

Para todo $t \in [0,1]$, o caminho $\alpha_t : [0,l] \to B$ dado por $\alpha_t(s) = H(s,t)$ é chamado um caminho da homotopia H. Portanto, a homotopia é uma família de caminhos α_t, $t \in [0,1]$, que constitue uma deformação contínua de α_0 em α_1 (ver Fig. 5.27) de modo que as extremidades p e q dos caminho α_t permanecem fixas durante a deformação (condição 2).

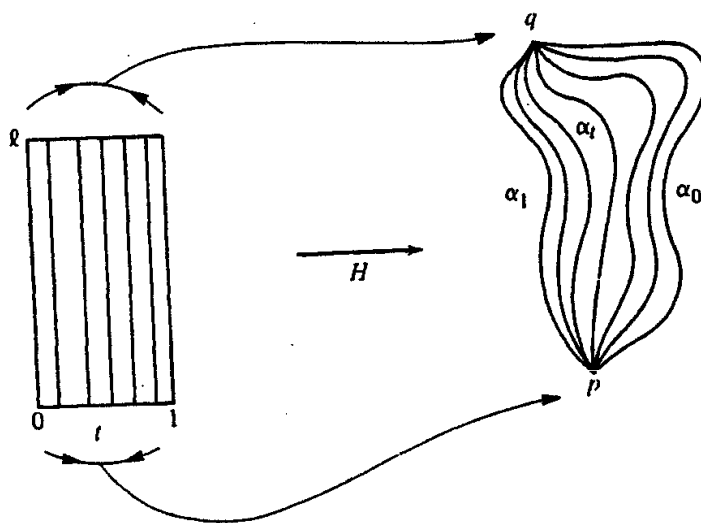



Figura 5-27

A noção de levantamento de homotopias é inteiramente análoga à noção de levantamento de caminhos. Seja $\pi : \tilde{B} \to B$ uma aplicação contínua e sejam α_0, $\alpha_1 : [0,l] \to B$ dois caminhos de B ligando os pontos p e q. Seja $H : [0,l] \times [0,1] \to B$ uma homotopia entre α_0 e α_1. Se existe uma aplicação contínua

$$\tilde{H} : [0,l] \times [0,1] \to \tilde{B}$$

tal que $\pi \circ \tilde{H} = H$, dizemos que $\tilde{H}$ é um *levantamento da homotopia* H, com origem em $\tilde{H}(0,0) = \tilde{p} \in \tilde{B}$.

Vamos agora mostrar que uma aplicação de recobrimento tem a propriedade de levantar homotopias. Em verdade, vamos provar uma proposição mais geral. Observe que uma aplicação de recobrimento $\pi : \tilde{B} \to B$ é um homeomorfismo local e, além disto, que todo caminho de B pode ser levantado em um caminho de $\tilde{B}$. Nas demonstrações das Props. 3, 4, e 5 a seguir vamos utilizar apenas estas duas propriedades das aplicações de recobrimento, e então, para uso posterior, vamos enunciar estas proposições com esta generalidade. Assim, diremos que uma aplicação contínua $\pi : \tilde{B} \to B$ tem a *propriedade de levantar caminhos* se todo caminho de B pode ser levantado. Note que isto implica que π aplica $\tilde{B}$ sobre B.

Proposição 3. *Seja $\pi : \tilde{B} \to B$ um homeomorfismo local com a propriedade de levantar caminhos. Sejam α_0, $\alpha_1 : [0,l] \to B$ dois caminhos de B ligando os pontos p a q, e seja*

$$H[0,l] \times [0,1] \to B$$

uma homotopia entre α_0 e α_1, e $\tilde{p} \in \tilde{B}$ um ponto de $\tilde{B}$ tal que $\pi(\tilde{p}) = p$. Então existe um único levantamento $\tilde{H}$ de H com origem em $\tilde{p}$.

Demonstração. A demonstração da unicidade é inteiramente análoga à demonstração do levantamento de caminhos. Sejam $\tilde{H}_1$ e $\tilde{H}_2$ dois levantamentos de H com $\tilde{H}_1(0,0) = \tilde{H}_2(0,0) = \tilde{p}$. Então o conjunto A de pontos $(s,t) \in [0,l] \times [0,1] = Q$ tais que $\tilde{H}_1(s,t) = \tilde{H}_2(s,t)$ é não-vazio e fechado em Q. Como $\tilde{H}_1$ e $\tilde{H}_2$ são contínuas e π é um homeomorfismo local, A é aberto em Q. Pela conexidade de Q, $A = Q$; donde, $\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2$.

Para provar a existência, seja $\alpha_t(s) = H(s,t)$ um caminho da homotopia H. Defina $\tilde{H}$ por

$$\tilde{H}(s,t) = \tilde{\alpha}_t(s), \qquad s \in [0,l],\ t \in [0,1],$$

onde $\tilde{\alpha}$ é o levantamento de α_t, com origem em $\tilde{p}$. É claro que

$$\begin{aligned} \pi \circ \tilde{H}(s,t) &= \alpha_t(s) = H(s,t), \qquad s \in [0,l],\ t \in [0,1], \\ \tilde{H}(0,0) &= \tilde{\alpha}_0(0) = \tilde{p}. \end{aligned}$$

Vamos agora provar que $\tilde{H}$ é contínua. Seja $(s_0,t_0) \in [0,l] \times [0,1]$. Como π é um homeomorfismo local, existe uma vizinhança V de $\tilde{H}(s_0,t_0)$ tal que

a restrição π_0 de π a V é um homeomorfismo sobre uma vizinhança U de $H(s_0, t_0)$. Seja $Q_0 \subset H^{-1}(U) \subset [0, l] \times [0, 1]$ um quadrado aberto dado por

$$s_0 - \varepsilon < s < s_0 + \varepsilon, \qquad t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon.$$

Basta mostrar que $\tilde{H}$ restrita a Q_0 pode ser escrita como $\tilde{H} = \pi_0^{-1} \circ H$ para concluir que $\tilde{H}$ é contínua em (s_0, t_0). Como (s_0, t_0) é arbitrário, isto mostra que $\tilde{H}$ é contínua em $[0, l] \times [0, 1]$, como desejado.

Para isto, observamos que

$$\pi_0^{-1}(H(s_0, t)), \qquad t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon),$$

é um levantamento do caminho $H(s_0, t)$ passando por $\tilde{H}(s_0, t_0)$. Pela unicidade do levantamento, $\pi_0^{-1}(H(s_0, t)) = \tilde{H}(s_0, t)$. Como Q_0 é um quadrado, para todo $(s_1, t_1) \in Q_0$ existe um caminho $H(s, t_1)$ em U, $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$, que intersecta o caminho $H(s_0, t)$. Como $\pi_0^{-1}(H(s_0, t_1)) = \tilde{H}(s_0, t_1)$, o caminho $\pi_0^{-1}(H(s, t_1))$ é o levantamento de $H(s, t_1)$ passando por $\tilde{H}(s_0, t_1)$. Por unicidade, $\pi_0^{-1}(H(s, t_1)) = \tilde{H}(s, t_1)$; donde, $\pi_0^{-1}(H(s_1, t_1)) = \tilde{H}(s_1, t_1)$. Como $(s_1, t_1) \in Q_0$ é um ponto arbitrário concluímos que $\pi_0^{-1}(H(s, t)) = \tilde{H}(s, t)$, $(s, t) \in Q_0$, o que encerra a demonstração.

Q.E.D.

Uma conseqüência da Prop. 3 é o fato de que se $\pi : \tilde{B} \to B$ é uma aplicação de recobrimento, então caminhos homotópicos em B são levantados em caminhos homotópicos em $\tilde{B}$. A proposição abaixo mostra como isto pode ser expresso de maneira mais geral e precisa.

Proposição 4. *Seja $\pi : \tilde{B} \to B$ um homeomorfismo local com a propriedade de levantar caminhos. Sejam α_0, $\alpha_1 : [0, l] \to B$ dois caminhos de B ligando os pontos p e q e escolha $\tilde{p} \in \tilde{B}$ tal que $\pi(\tilde{p}) = p$. Se α_0 e α_1 são homotópicos, então os levantamentos $\tilde{\alpha}_0$, $\tilde{\alpha}_1$ de α_0, α_1, respectivamente, com origem em $\tilde{p}$, são homotópicos.*

Demonstração. Seja H a homotopia entre α_0 e α_1 e seja $\tilde{H}$ o seu levantamento com origem em $\tilde{p}$. Vamos provar que $\tilde{H}$ é uma homotopia entre $\tilde{\alpha}_0$ e α_1 (ver Fig. 5.28).

De fato, pela unicidadde do levantamento de caminhos,

$$\tilde{H}(s, 0) = \tilde{\alpha}_0(s), \qquad \tilde{H}(s, 1) = \tilde{\alpha}_1(s), \qquad s \in [0, l],$$

o que verifica a condição 1 da Def. 2. Além disto, $\tilde{H}(0,t)$ é o levantamento do caminho "constante" $H(0,t) = p$, com origem em $\tilde{p}$. Por unicidade,

$$\tilde{H}(0,t) = \tilde{p}, \qquad t \in [0,1].$$

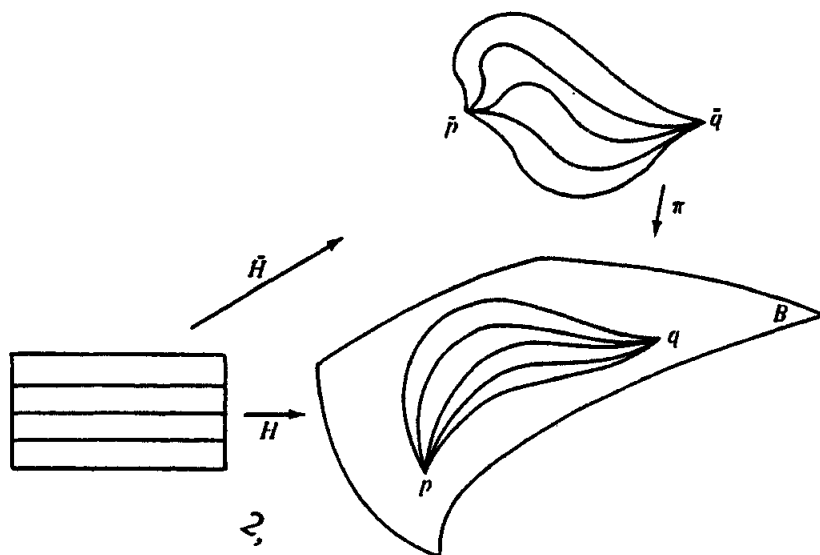



Figura 5-28

Analogamente, $\tilde{H}(l,t)$ é o levantamento de $H(l,t) = q$, com origem em $\tilde{\alpha}_0(l) = \tilde{q}$; donde,

$$\tilde{H}(l,t) = \tilde{q} = \tilde{\alpha}_1(l), \qquad t \in [0,1].$$

Portanto, a condição 2 da Def. 1 está verificada, mostrando que $\tilde{H}$ é uma homotopia entre $\tilde{\alpha}_0$ e $\tilde{\alpha}_1$.

Q.E.D.

Voltando ao argumento heurístico que nos levou a considerar o conceito de homotopia, vemos que ainda falta explicar o que é que significa um espaço sem "buracos". É claro que vamos tomar como definição de um tal espaço justamente a propriedade que foi utilizada no argumento heurístico.

DEFINIÇÃO 3. *Um conjunto conexo por caminhos* $B \subset \mathbb{R}^3$ *é* simplesmente conexo *se dados dois pontos* $p, q \in B$ *e dois caminhos* $\alpha_0; [0,l] \to B$, $\alpha_0; [0,l] \to B$ *ligando* p *a* q, *existe uma homotopia em* B *entre* α_0 *e* α_1. *Em particular, qualquer caminho fechado de* B, $\alpha : [0,l] \to B$ *(fechado significa que* $\alpha(0) = \alpha(l) = p$*), é homotópico ao caminho constante* $\alpha(s) = p$, $s \in [0,l]$

(no Exercício 5 está indicado que esta última propriedade é, em verdade, equivalente à primeira).

Intuitivamente, um conjunto conexo por caminhos B é simplesmente conexo se qualquer caminho fechado em B pode ser deformado continuamente em um ponto. É possível mostrar que o plano e a esfera são simplesmente conexos mas que o cilindro e o toro não são simplesmente conexos (cf. Exercício 5).

Podemos agora enunciar e provar uma resposta à questão 2 desta seção. Isto virá como um corolário da seguinte proposição.

Proposição 5. *Seja $\pi : \tilde{B} \to B$ um homeomorfismo local com a propriedade de levantar caminhos. Seja $\tilde{B}$ conexo por caminhos e B simplesmente conexo. Então π é um homeomorfismo.*

Demonstração. A demonstração é esencialmente a mesma que apresentamos no argumento heurístico.

Precisamos mostrar que π é injetiva. Para isto, sejam $\tilde{p}_1$ e $\tilde{p}_2$ dois pontos de $\tilde{B}$, com $\pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2) = p$. Como $\tilde{B}$ é conexo por caminhos, existe um caminho $\tilde{\alpha}_0$ de $\tilde{B}$ ligando $\tilde{p}_1$ a $\tilde{p}_2$. Então $\pi \circ \tilde{\alpha}_0 = \alpha_0$ é um caminho fechado de B. Como B é simplesmente conexo, α_0 é homotópico ao caminho constante $\alpha_1(s) = p$, $s \in [0, l]$. Pela Prop. 4, $\tilde{\alpha}_0$ é homotópico ao levantamento $\tilde{\alpha}_1$ de α_1 que tem origem em p. Como $\tilde{\alpha}_1$ é o caminho constante ligando os pontos $\tilde{p}_1$ e $\tilde{p}_2$, concluímos que $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$.

Q.E.D.

Corolário. *Seja $\pi : \tilde{B} \to B$ uma aplicação de recobrimento, $\tilde{B}$ conexo por caminhos e B simplesmente conexo. Então π é um homeomorfismo.*

O fato de termos provado as Props. 3, 4 e 5 com mais generalidade do que era estritamente necessário nos permite dar a seguir uma outra resposta à questão 1.

Seja $\pi : \tilde{B} \to B$ um homeomorfismo local com a propriedade de levantar caminhos, e suponha que $\tilde{B}$ e B são localmente "bem comportados" (tornaremos isto mais preciso em breve). Então π é, de fato, uma aplicação de recobrimento.

As propriedades locais necessárias são descritas abaixo. Lembre que $B \subset \mathbb{R}^3$ é localmente conexo por caminhos se qualquer vizinhança de cada ponto contém uma vizinhança conexa por caminhos (apêndice ao Capítulo 5, Def. 12).

DEFINIÇÃO 4. *B é* localmente simplesmente conexo *se qualquer vizinhança de cada ponto contém uma vizinhança simplesmente conexa.*

Em outras palavras, B é localmente simplesmente conexo se cada ponto tem vizinhanças simplesmente conexas arbitrariamente pequenas. É claro que se B é localmente simplesmente conexo, então B é localmente conexo por caminhos.

Observamos que uma superfície regular S é localmente simplesmente conexa, pois $p \in S$ tem vizinhanças arbitrariamente pequenas homeomorfas ao interior de um disco no plano.

Na proposição a seguir vamos necessitar das seguintes propriedades de um conjunto $B \subset \mathbb{R}^3$ localmente conexo por caminhos (cf. apêndice ao Capítulo 5, Parte D). A união de todos os subconjuntos conexos por caminhos de B que contém um ponto $p \in B$ é evidentemente um conjunto conexo por caminhos A que chamamos de *componente conexa por caminhos* de B contendo p. Como B é localmente conexo por caminhos, A é aberto em B. Assim, B pode ser escrito como uma união $B = \cup_\alpha A_\alpha$ de suas componentes conexas A_α, que são abertos disjuntos dois a dois.

Observamos também que uma superfície regular é localmente conexa por caminhos. Assim, na proposição abaixo, as hipóteses sobre B e $\tilde{B}$ são satisfeitas quando ambos B e $\tilde{B}$ são superfícies regulares.

Proposição 6. *Seja $\pi : \tilde{B} \to B$ um homeomorfismo local com a propriedade de levantar caminhos. Suponha que B seja localmente simplesmente conexo e que $\tilde{B}$ seja localmente conexo por caminhos. Então π é uma aplicação de recobrimento.*

Demonstração. Seja $p \in B$ e V uma vizinhança simplesmente connexa de p em B. O conjunto $\pi^{-1}(V)$ é a união de suas componentes conexas por caminhos; isto é,

$$\pi^{-1}(V) = \cup_\alpha \tilde{V}_\alpha,$$

onde os $\tilde{V}_\alpha$ são conjuntos abertos, conexos por caminhos e disjuntos dois a dois. Considere a restrição $\pi : \tilde{V}_\alpha \to V$. Se mostrarmos que π é um homeomorfismo de $\tilde{V}_\alpha$ sobre V, π irá satisfazer as condições da definição de uma aplicação de recobrimento.

Provaremos primeiro que $\pi(\tilde{V}_\alpha) = V$. De fato, $\pi(\tilde{V}_\alpha) \subset V$. Suponha que existe um ponto $p \in V$, $p \notin \pi(\tilde{V}_\alpha)$. Então, como V é conexo por caminhos,

existe um caminho $\alpha : [a,b] \to V$ ligando um ponto $q \in \pi(\tilde{V}_\alpha)$ a p. O levantamento $\tilde{\alpha} : [a,b] \to \tilde{B}$ de α com origem em $\tilde{q} \in \tilde{V}_\alpha$, onde $\pi(\tilde{q}) = q$, é um caminho em $\tilde{V}_\alpha$, pois $\tilde{V}_\alpha$ é uma componente conexa por caminhos de B. Portanto,

$$\pi(\tilde{\alpha}(b)) = p \in \pi(\tilde{V}_\alpha),$$

o que é uma contradição e mostra que $\pi(\tilde{V}_\alpha) = V$.

Em seguida, observamos que $\pi : \tilde{V}_\alpha \to V$ ainda é um homeomorfismo local, pois $\tilde{V}_\alpha$ é aberto. Além disto, pelo que foi visto acima, a aplicação $\pi : \tilde{V}_\alpha \to V$ também tem a propriedade de levantar caminhos. Portanto, estão satisfeitas as condições da Prop. 5; donde π é um homeomorfismo.

Q.E.D.

B. Os Teoremas de Hadamard

Vamos agora retornar à questão colocada no início desta seção, a saber, sob quais condições o difeomorfismo local $\exp_p : T_pS \to S$, onde p é um ponto de uma superfície completa S com curvatura $K \leq 0$, é um difeomorfismo global de T_pS sobre S. As proposições a seguir, que servem para desdobrar a questão dada em duas questões, fornecem uma resposta para o problema.

Precisaremos do seguinte lema.

Lema 1. *Seja S um superfície completa com curvatura $K \leq 0$. Então $\exp_p$: $T_pS \to S$, $p \in S$, aumenta comprimentos, no seguinte sentido: Se $u, w \in T_pS$, temos*

$$\left\langle (d\exp_p)_u(w), (d\exp_p)_u(w) \right\rangle \geq \langle w, w \rangle\,,$$

onde, como de costume, w denota um vetor em $(T_pS)_u$ que é obtido de w por uma translação dada por u.

Demonstração. Para o caso $u = 0$, a igualdade é verificada de maneira trivial. Assim, seja $v = u/|u|$, $u \neq 0$, e seja $\gamma : [0,l] \to S$, $l = |u|$, a geodésica

$$\gamma(s) = \exp_p sv, \qquad s \in [0,l].$$

Pelo lema de Gauss, podemos supor que $\langle w, v\rangle = 0$. Seja $J(s) = s(d\exp_p)_{sv}(w)$ o campo de Jacobi ao longo de γ dado pelo Lema 1 da seção 5.5. Sabemos que $J(0) = 0$, $(DJ/ds)(0) = w$, e $\langle J(s), \gamma'(s)\rangle = 0$, $s \in [0,l]$.

Observe agora que, como $K \leq 0$ (cf. Eq. (1), seção 5.5),

$$\frac{d}{ds}\left\langle J, \frac{DJ}{ds}\right\rangle = \left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds}\right\rangle + \left\langle J, \frac{D^2J}{ds^2}\right\rangle = \left|\frac{DJ}{ds}\right|^2 - K\left|J\right|^2 \geq 0.$$

Isto implica que

$$\left\langle J, \frac{DJ}{ds}\right\rangle \geq 0;$$

donde,

$$\frac{d}{ds}\left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds}\right\rangle = 2\left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{D^2J}{ds^2}\right\rangle = -2K\left\langle \frac{DJ}{ds}, J\right\rangle \geq 0. \tag{1}$$

Segue-se que

$$\left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds}\right\rangle \geq \left\langle \frac{DJ}{ds}(0), \frac{DJ}{ds}(0)\right\rangle = \langle w, w\rangle = C; \tag{2}$$

donde,

$$\frac{d^2}{ds^2}\langle J, J\rangle = 2\left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds}\right\rangle + 2\left\langle J, \frac{D^2J}{ds^2}\right\rangle \geq 2\left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds}\right\rangle \geq 2C. \tag{3}$$

Integrando ambos os lados da desigualdade acima, obtemos

$$\frac{d}{ds}\langle J, J\rangle \geq 2Cs + \left(\frac{d}{ds}\langle J, J\rangle\right)_{s=0} = 2Cs + 2\left\langle \frac{DJ}{ds}(0), J(0)\right\rangle = 2Cs.$$

Uma outra integração nos dá

$$\langle J, J\rangle \geq Cs^2 + \langle J(0), J(0)\rangle = Cs^2.$$

Colocando $s = l$ na expressão acima e notando que $C = \langle w, w\rangle$, obtemos

$$\langle J(l), J(l)\rangle \geq l^2\langle w, w\rangle.$$

Como $J(l) = l(d\exp_p)_{lv}(w)$, concluimos finalmente que

$$\langle (d\exp_p)_{lv}(w), (d\exp_p)_{lv}(w)\rangle \geq \langle w, w\rangle$$

Q.E.D.

Para uso posterior, convém estabelecer a seguinte conseqüência da demonstração acima.
Corolário (da demonstração). *Seja* $K \equiv 0$. *Então* $\exp_p : T_pS \to S$, $p \in S$, *é uma isometria local.*

Basta observar que se $K \equiv 0$, é possível substituir "≥ 0" por "$\equiv 0$" nas Eqs. (1),(2) e (3) da demonstração acima.

Proposição 7. *Seja* S *uma superfície completa com curvatura Gaussiana* $K \leq 0$. *Então a aplicação* $\exp_p : T_pS \to S$, $p \in S$, *é uma aplicação de recobrimento.*

Demonstração. Como sabemos que $\exp_p$ é um difeomorfismo local, basta (pela Prop. 6) mostrar que $\exp_p$ tem a propriedade de levantar caminhos.

Seja $\alpha : [0, l] \to S$ um caminho em S e seja também $v \in T_pS$ tal que $\exp_p v = \alpha(0)$. Um tal v existe pois S é completa. Como $\exp_p$ é um difeomorfismo local, existe uma vizinhança U de v em T_pS tal que $\exp_p$ restrita a U é um difeomorfismo. Utilizando $\exp_p^{-1}$ em $\exp_p(U)$, é possível definir $\tilde{\alpha}$ em uma vizinhança de 0.

Seja agora A o conjunto de pontos $t \in [0, l]$ tais que $\tilde{\alpha}$ esteja definida em $[0, t]$. A é não-vazio, e se $\tilde{\alpha}(t_0)$ está definida, então $\tilde{\alpha}$ está definida em uma vizinhança de t_0; isto é, A é aberto em $[0, l]$. Se provarmos que A é fechado em $[0, l]$, teremos, pela conexidade de $[0, l]$, que $A = [0, l]$ e α poderá ser levantado inteiramente.

O ponto crucial da demonstração consiste, portanto, em provar que A é fechado em $[0, l]$. Para isto, seja $t_0 \in [0, l]$ um ponto de acumulação de A e $\{t_n\}$ uma seqüência com $\{t_n\} \to t_0$, $t_n \in A$, $n = 1, 2, \ldots$. Primeiro mostraremos que $\tilde{\alpha}(t_n)$ tem um ponto de acumulação.

Suponha que $\tilde{\alpha}(t_n)$ não tem ponto de acumulação em T_pS. Então, dado um disco fechado D de T_pS com centro em $\tilde{\alpha}(0)$, existe um n_0 tal que $\tilde{\alpha}(t_{n_0}) \notin D$. Segue-se que a distância, em T_pS, de $\tilde{\alpha}(0)$ a $\tilde{\alpha}(t_n)$ se torna arbitrariamente grande. Como, pelo Lema 1, $\exp_p : T_pS \to S$ aumenta o comprimento dos vetores, obtemos, onde d denota a distância em T_pS,

$$l_{[0,t_n]}(\alpha) = \int_0^{t_n} |\alpha'| \, dt = \int_0^{t_n} \left| d\exp_p(\tilde{\alpha}') \right| \, dt \geq \int_0^{t_n} |\tilde{\alpha}'| \, dt \geq d(\tilde{\alpha}(0), \tilde{\alpha}(t_n)).$$

Isto implica que o comprimento de α entre 0 e t_n se torna arbitrariamente grande, o que é um absurdo e prova a nossa afirmação.

Vamos denotar por q um ponto de acumulação de $\tilde{\alpha}(t_n)$.

Seja agora V uma vizinhança de q em T_pS tal que a restrição de $\exp_p$ a V seja um difeomorfismo. Como q é um ponto de acumulação de $\{\tilde{\alpha}(t_n)\}$, existe um n_1 tal que $\tilde{\alpha}(n_1) \in V$. Além disto, como α é contínua, existe um intervalo aberto $I \subset [0, l]$, $t_0 \in I$, tal que $\alpha(I) \subset \exp_p(V) = U$. Usando a restrição de $\exp_p^{-1}$ em U, é possível definir um levantamento de α em I com origem em $\tilde{\alpha}(t_{n_1})$. Como $\exp_p$ é um difeomorfismo local, este levantamento coincide com $\tilde{\alpha}$ em $[0, t_0) \cap I$ e é, portanto, uma extensão de $\tilde{\alpha}$ a um intervalo contendo t_0. Assim, o conjunto A é fechado, e isto encerra a demonstração da Prop. 7.

Q.E.D.

Observação 1. Deve-se notar que a condição sobre a curvatura, a saber, $K \leq 0$ foi utilizada apenas para garantir que $\exp_p : T_pS \to S$ é um difeomorfismo local que aumenta comprimentos. Portanto, provamos de fato que se $\varphi : S_1 \to S_2$ é um difeomorfismo local de uma superfície completa S_1 sobre uma superfície S_2, que aumenta comprimentos, então φ é uma aplicação de recobrimento.

A proposição seguinte, conhecida como teorema de Hadamard, descreve a estrutura topológica de uma superfície completa com curvatura $K \leq 0$.

Teorema 1 (Hadamard). *Seja S uma superfície simplesmente conexa, completa, com curvatura Gaussiana $K \leq 0$. Então $\exp_p : T_pS \to S$, $p \in S$ é um difeomorfismo; isto é, S é difeomorfa a um plano.*

Demonstração. Pela Prop. 7, $\exp_p : T_pS \to S$ é uma aplicação de recobrimento. Pelo corolário da Prop. 5, $\exp_p$ é um homeomorfismo. Como $\exp_p$ é um difeomorfismo local, a sua aplicação inversa é diferenciável, e $\exp_p$ é um difeomorfismo.

Q.E.D.

Apresentaremos agora uma outra aplicação geométrica dos espaços de recobrimento, também conhecida como teorema de Hadamard. Lembramos que uma superfície regular conexa, compacta e com curvatura Gaussiana $K > 0$ é chamada de ovalóide (cf. Observação 1, seção 5.2).

Teorema 2 (Hadamard). *Seja S um ovalóide. Então a aplicação de Gauss $N : S \to S^2$ é um difeomorfismo. Em particular, S é difeomorfa a uma esfera.*

Demonstração. Como para todo $p \in S$ a curvatura Gaussiana de S, $K = \det(dN_p)$, é positiva, N é um difeomorfismo local. Pela Prop. 1, N é uma aplicação de recobrimento. Como a esfera S^2 é simplesmente conexa, concluímos do corolário da Prop. 5 que $N : S \to S^2$ é um homeomorfismo de S sobre a esfera unitária S^2. Como N é um difeomorfismo local, a sua aplicação inversa é diferenciável. Portanto, N é um difeomorfismo.

Q.E.D.

Observação 2. Em verdade, provamos um pouco mais. Como a aplicação de Gauss é um difeomorfismo, cada vetor unitário v de $\mathbb{R}^3$ aparece exatamente uma vez como vetor unitário normal a S. Podemos então tomar um plano normal a v, longe da superfície, e deslocá-lo paralelamente a si mesmo até que ele encontre a superfície, e disto concluir que S está em um dos lados de cada um de seus planos tangentes. Isto é expresso dizendo-se que um ovalóide é *localmente convexo*. Pode-se provar a partir disto que S é, em verdade, a fronteira de um conjunto convexo (isto é, um conjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ tal que o segmento de reta ligando dois pontos quaisquer $p, q \in K$ está inteiramente contido em K). Para a prova deste fato, e de outros resultados a ele relacionados, pode-se consultar o belo Capítulo IV das notas de Hopf citadas na Bibliografia Comentada no fim do livro (número [11]).

Observação 3. O fato de que superfície compactas com $K > 0$ são homeomorfas a esferas foi estendido para superfícies compactas com $K \geq 0$ por S.S. Chern e R.K. Lashof ("On the Total Curvature of Immersed Manifolds," *Michigan Math. J.* 5 (1958), 5-12). Uma generalização para superfícies completas foi obtida originalmente por J.J. Stoker ("Uber die Gestalt der positiv gekrümnten öffenen Fläche", *Compositio Math.* 3 (1936), 58-89), que provou, entre outras coisas, o seguinte: *uma superfície completa com $K > 0$ é homeomorfa a uma esfera ou a um plano.* Este resultado ainda vale para $K \geq 0$ supondo que em algum ponto $K > 0$ (para uma prova e um apanhado geral sobre este problema, ver M. do Carmo e E. Lima, "Isometric Immersions with Non-Negative Sectional Curvatures," *Boletim da Soc. Bras. Mat.* (1971), 9-22).

Exercícios

1. Mostre que a aplicação $\pi : \mathbb{R} \to S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \, x^2 + y^2 = 1\}$ dada por $\pi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$ é uma aplicação de recobrimento.

2. Mostre que a aplicação $\pi : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dada por

$$\pi(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\},$$

é uma aplicação de recobrimento com duas folhas.

3. Seja S o helicóide gerado pelas normais à hélice $(\cos t, \operatorname{sen} t, bt)$. Denote por L o eixo Oz e seja $\pi : S - L \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ a projeção $\pi(x,y,z) = (x,y)$. Mostre que π é uma aplicação de recobrimento.

4. Os leitores familiares com funções de uma variável complexa devem ter notado que a aplicação π no Exercício 2 é justamente a aplicação $\pi(z) = z^2$ de $\mathbb{C} - \{0\}$ sobre $\mathbb{C} - \{0\}$; onde $\mathbb{C}$ é o plano complexo e $z \in \mathbb{C}$. Generalize o resultado mostrando a aplicação $\pi : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} - \{0\}$ dada por $\pi(z) = z^n$ é uma aplicação de recobrimento com n folhas.

5. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto conexo por caminhos. Mostre que as duas propriedades a seguir são equivalentes (cf. Def. 3):

1. Para qualquer par de pontos $p, q \in B$ e qualquer par de caminhos $\alpha_0 : [0,l] \to B$, $\alpha_1 : [0,l] \to B$ ligando p a q, existe uma homotopia em B ligando α_0 e α_1.

2. Para qualquer $p \in B$ e qualquer caminho $\alpha : [0,l] \to B$, com $\alpha(0) = \alpha(l) = p$ (isto é, α é um caminho fechado com ponto inicial e final p) existe uma homotopia ligando α ao caminho constante $\beta(s) = p$, $s \in [0,l]$.

6. Fixe um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ e defina a família de aplicações $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $t \in [0,1]$, por $\varphi_t(p) = tp_0 + (1-t)p$, $p \in \mathbb{R}^2$. Note que $\varphi_0(p) = p$, $\varphi_1(p) = p_0$. Assim, φ_t é uma família contínua de aplicações que começa com a aplicação identidade e termina com a aplicação constante p_0. Aplique estas considerações para provar que $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo.

7. **a.** Use a projeção estereográfica e o Exercício 6 para mostrar que qualquer caminho fechado em uma esfera que omite ao menos um ponto de S^2 é homotópico a um caminho constante.

b. Mostre que qualquer caminho fechado em S^2 é homotópico a um caminho fechado em S^2 que omite pelo menos um ponto.

c. Concluir das partes **a** e **b** que S^2 é simplesmente conexo. Porque a parte **b** é necessária?

8. (*Lema de Klingenberg.*) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície completa com curvatura Gaussiana $K \leq K_0$, onde K_0 é uma constante não-negativa. Sejam $p, q \in S$ e sejam γ_0, γ_1 duas geodésicas distintas ligando p a q, com $l(\gamma_0) \leq l(\gamma_1)$; aqui $l(\ )$ denota o comprimento da curva correspondente. Suponha que γ_0 seja homotópica a γ_1; i.e. existe uma família contínua de curvas α_t, $t \in [0,1]$, ligando p a q com $\alpha_0 = \gamma_0$ e $\alpha_1 = \gamma_1$. O objetivo deste exercício é mostrar que *existe um* $t_0 \in [0,1]$ *tal que*

$$l(\gamma_0) + l(\alpha_{t_0}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}.$$

(Assim, a homotopia tem que passar por um caminho longo. Ver Fig. 5.29.) Suponha que $l(\gamma_0) < \pi/\sqrt{K_0}$ (caso contrário, não há nada a provar) e proceda da seguinte maneira.

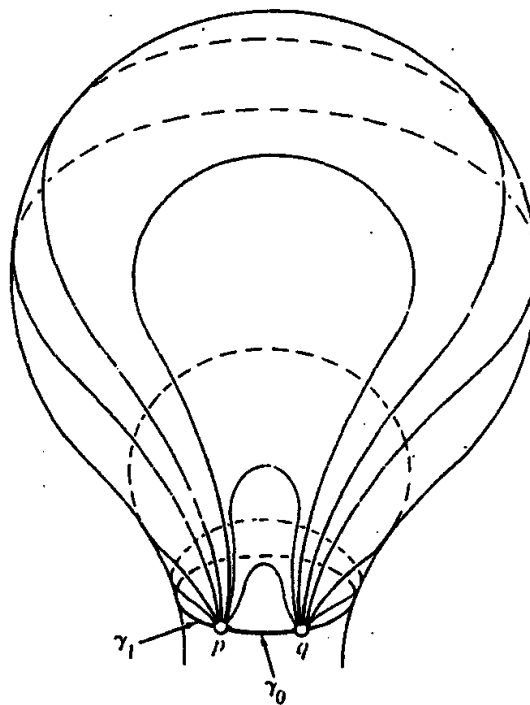



Figura 5-29. *Lema de Klingenberg.*

a. Use o primeiro teorema de comparação (cf. Exercício 3, seção 5.5) para provar que $\exp_p : T_pS \to S$ não tem pontos críticos em um disco aberto B de raio $\pi/\sqrt{K_0}$ em torno de p.

b. Mostre que, para t pequeno, é possível levantar a curva α_t para o plano tangente T_pS; i.e. existe uma curva $\tilde{\alpha}_t$ ligando $\exp_p^{-1}(p) = 0$ a $\exp_p^{-1}(q) = \tilde{q}$ e tal que $\exp_p \circ \tilde{\alpha}_t = \alpha_t$.

c. Mostre que o levantamento na parte **b** não pode ser definido para todo $t \in [0,1]$. Conclua que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $t(\varepsilon)$ tal que $\alpha_{t(\varepsilon)}$ pode ser levantado em $\tilde{\alpha}_{t(\varepsilon)}$ e $\tilde{\alpha}_{t(\varepsilon)}$ contém pontos a uma distância $< \varepsilon$ da fronteira de B. Assim,

$$l(\gamma_0) + l(\alpha_{t(\varepsilon)}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}} - 2\varepsilon.$$

d. Escolha na parte **c** uma seqüência de epsilons $\{\varepsilon_n\} \to 0$, e considere uma subseqüência convergente de $\{t(\varepsilon_n)\}$. Conclua a existência de uma curva α_{t_0}, $t_0 \in [0,1]$, tal que

$$l(\gamma_0) + l(\alpha_{t_0}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}$$

9. **a.** Use o lema de Klingenberg para provar que se S é uma superfície completa e simplesmente conexa com $K \leq 0$, então $\exp_p : T_pS$ é injetiva.

b. Use a parte **a** para dar uma prova simples do teorema de Hadamard (Teorema 1).

***10.** (*Lema de Synge.*) Lembramos que uma curva diferenciável fechada em uma superfície S é uma aplicação diferenciável $\alpha : [0.l] \to S$ tal que α e todas as suas derivadas coincidem em 0 e l. Duas curvas diferenciáveis fechadas α_0, $\alpha_1 : [0.l] \to S$ são *livremente homotópicas* se existe uma aplicação contínua $H : [0,l] \times [0,1] \to S$ tal que $H(s,0) = \alpha_0(s)$, $H(s,1) = \alpha_1(s)$, $s \in [0,l]$. A aplicação H é chamada uma *homotopia livre* (os extremos não estão fixos) entre α_0 e α_1. Suponha que S seja orientável e que tenha curvatura Gaussiana positiva. Prove que qualquer geodésica simples e fechada em S é livremente homotópica a uma curva fechada com comprimento menor do que o da geodésica dada.

11. Seja S uma superfície completa. Um ponto $p \in S$ é chamado um *pólo* se toda geodésica $\gamma\{0,\infty) \to S$ com $\gamma(0) = p$ não contém ponto conjugado a p relativo a γ. Use as técnicas do lema de Klingenberg (Exercício 8) para mostrar que se S é simplesmente conexa e tem um pólo p, então $\exp_p : T_pS \to S$ é um difeomorfismo.

5.7 Teoremas Globais para Curvas; O Teorema de Fary-Milnor

Nesta seção, serão apresentados alguns teoremas globais para curvas fechadas. A principal ferramenta utilizada aqui é a teoria do grau para aplicações contínuas do círculo. Para introduzir a noção de grau, vamos utilizar algumas propriedades das aplicações de recobrimento vistas na seção 5.6.

Seja $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ e seja $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ o recobrimento de S^1 pela reta real $\mathbb{R}$ dada por

$$\pi(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Seja $\varphi : S^1 \to S^1$ uma aplicação contínua. O grau de φ é definido da seguinte maneira. Podemos pensar no primeiro S^1da aplicação $\varphi : S^1 \to S^1$ como um intervalo fechado $[0,l]$ com seus extremos 0 e l identificados. Assim, φ pode ser pensado como uma aplicação contínua $\varphi : [0,l] \to S^1$, com $\varphi(0) = \varphi(l) = p \in S^1$. Deste modo, φ é um caminho em S^1 que é fechado em p, e, pela Prop. 2 da seção 5.6, pode ser levantado em um único caminho $\tilde{\varphi} : [0,l] \to \mathbb{R}$, começando em um ponto $x \in \mathbb{R}$ com $\pi(x) = p$. Como $\pi(\tilde{\varphi}(0)) = \pi(\tilde{\varphi}(l))$, a diferença $\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0)$ é um múltiplo inteiro de 2π. O número inteiro gr φ dado por

$$\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0) = (\operatorname{gr}\varphi)2\pi$$

é chamado o *grau* de φ.

Intuitivamente, $\operatorname{gr}\varphi$ é o número de vezes que $\varphi : [0,l] \to S^1$ "enrola" $[0,l]$ em torno de S^1 (Fig. 5.30). Note que a função $\tilde{\varphi} : [0,l] \to \mathbb{R}$ é uma determinação contínua do ângulo positivo que um vetor fixo $\varphi(0) - O$ faz com $\varphi(t) - O$, $t \in [0,l]$, $O = (0,0)$– por exemplo, a aplicação $\pi : S^1 \to S^1$ descrita no Exemplo 4 da seção 5.6, Parte A, tem grau k.

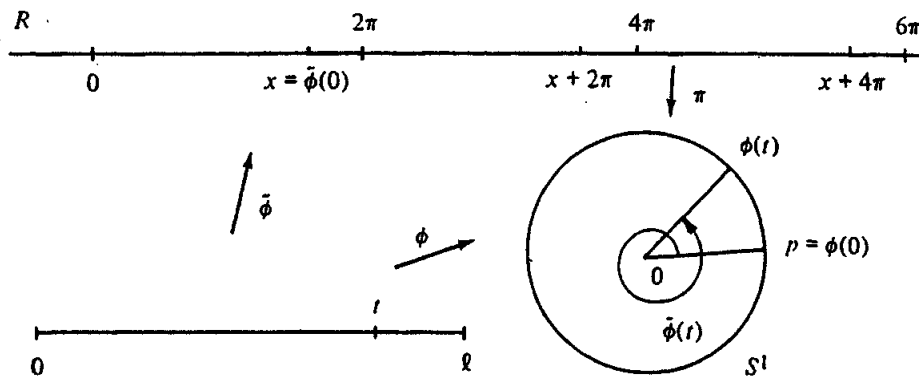



Figura 5-30

Precisamos mostrar que a definição do grau independe das escolhas de p e x. Primeiro, $\operatorname{gr}\varphi$ independe da escolha de x. De fato, seja $x_1 > x$ um ponto em $\mathbb{R}$ tal que $\pi(x_1) = p$, e seja $\tilde{\varphi}_1(t) = \tilde{\varphi}(t) + (x_1 - x)$, $t \in [0, l]$. Como $x_1 - x$ é um múltiplo inteiro de 2π, $\tilde{\varphi}_1$ é um levantamento de φ começando em x_1. Pela parte da unicidade da Prop. 2 da seção 5.6, $\tilde{\varphi}_1$ é o levantamento de φ começando em x_1. Como

$$\tilde{\varphi}_1(l) - \tilde{\varphi}_1(0) = \tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0) = (\operatorname{gr}\varphi)2\pi,$$

o grau de φ, seja ele calculado com x_1 ou com x, é o mesmo.

Segundo, $\operatorname{gr}\varphi$ independe da escolha de $p \in S^1$. De fato, cada ponto $p_1 \in S^1$, exceto o ponto antípoda de p, pertence a uma vizinhança distinguida U_1 de p. Escolha x_1, na componente conexa de $\pi^{-1}(U_1)$ contendo x, tal que $\pi(x_1) = p_1$, e seja $\tilde{\varphi}_1$ o levantamento de

$$\varphi : [0, l] \to S^1, \ \varphi(0) = p_1,$$

começando em x_1. Evidentemente, $|\tilde{\varphi}_1(0) - \tilde{\varphi}(0)| < 2\pi$. Segue-se do processo passo a passo pelo qual os levantamentos são construídos (cf. demonstração da Prop. 2, seção 5.6) que $|\tilde{\varphi}_1(l) - \tilde{\varphi}(l)| < 2\pi$. Como ambas as diferenças $\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0)$, $\tilde{\varphi}_1(l) - \tilde{\varphi}_1(0)$ devem ser múltiplos inteiros de 2π, seus valores são, em verdade, iguais. Por continuidade, a conclusão também vale para o ponto antípoda de p, e isto prova a nossa afirmação.

A propriedade mais importante do grau é a sua invariância por homotopias. Mais precisamente, sejam $\varphi_1, \varphi_2 : S^1 \to S^1$ aplicações contínuas. Fixe um ponto $p \in S^1$, de forma a obter dois caminhos fechados em p, $\varphi_1, \varphi_2 : [0, l] \to$

S^1, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = p$. Se φ_1 e φ_2 são homotópicos, então gr φ_1 =gr φ_2. Isto segue-se imediatamente do fato de que (Prop. 4, seção 5.6) os levantamentos de φ_1 e φ_2 começando em um ponto fixado $x \in \mathbb{R}$ são homotópicos, e, portanto, têm os mesmos pontos extremos.

Deve-se observar que se $\varphi : [0, l] \to S^1$ é diferenciável, φ determina duas funções diferenciáveis $a = a(t)$, $b = b(t)$, dadas por $\varphi(t) = (a(t), b(t))$, que satisfazem a condição $a^2 + b^2 = 1$. Neste caso, o levantamento $\tilde{\varphi}$, começando em $\tilde{\varphi}_0 = x$, é precisamente a função diferenciável (cf. Lema 1, seção 4.4)

$$\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}_0 + \int_0^t (ab' - ba')\, dt.$$

Isto segue-se da unicidade do levantamento e do fato de que $\cos \tilde{\varphi}(t) = a(t)$, $\operatorname{sen} \tilde{\varphi}(t) = b(t)$, $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}_0$. Assim, no caso diferenciável, o grau de φ pode ser expresso por uma integral,

$$\operatorname{gr} \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{d\tilde{\varphi}}{dt}\, dt.$$

Na forma acima, a noção de grau já apareceu diversas vezes neste livro. Por exemplo, quando $v : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $U \supset S^1$, é um campo de vetores, e $(0, 0)$ a sua única singularidade, o índice de v em $(0, 0)$ (cf. seção 4.5, Aplicação 5) pode ser interpretado como o grau da aplicação $\varphi : S^1 \to S^1$ que é dada por $\varphi(p) = v(p)/|v(p)|$, $p \in S^1$.

Antes de prosseguirmos com os exemplos, vamos relembrar que uma curva (diferenciável) fechada é uma aplicação diferenciável $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$, se for uma curva plana) tal que as funções componentes de α, junto com todas as suas derivadas, coincidem em 0 e l. A curva α é regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, l]$, e α é simples se $t_1 \neq t_2$, t_1, $t_2 \in [0, l)$ implica que $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$. Convém às vezes supor que α é meramente contínua; neste caso, vamos dizer explicitamente que α é uma *curva contínua fechada*.

Exemplo 1. (O número de voltas de uma curva). Seja $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ uma curva contínua fechada e plana. Escolha um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ $p_0 \notin \alpha([0, l])$, e seja $\varphi : [0, l] \to S^1$ dada por

$$\varphi(t) = \frac{\alpha(t) - p_0}{|\alpha(t) - p_0|}, \qquad t \in [0, l].$$

É claro que $\varphi(0) = \varphi(l)$, e φ pode ser pensada como uma aplicação de S^1 em S^1; ela é chamada a *aplicação de posição* de α com relação a p_0. O gr φ é chamado o *número de voltas* (ou, simplesmente *índice*) da curva α em relação a p_0 (Fig. 5.31).

Note que ao movermos p_0 ao longo de um caminho β que não encontra $\alpha([0,l])$ o número de voltas permance inalterado. Com efeito, as aplicações de posição de α com relação a quaisquer dois pontos de β são evidentemente homotópicas. Segue-se que o número de voltas de α relativo a q é constante quando q percorre uma componente conexa de $\mathbb{R}^2 - \alpha([0,l])$.

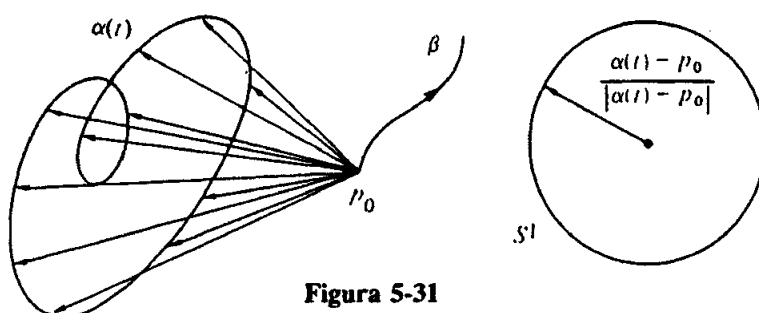



Figura 5-31

Exemplo 2. (O Índice de Rotação de uma Curva). Seja $\alpha : [0,l] \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular fechada e plana, e seja $\varphi : [0,l] \to S^1$ dada por

$$\varphi(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, \qquad t \in [0,l].$$

É claro que φ é uma aplicação diferenciável e $\varphi(0) = \varphi(l)$. φ é chamada a *aplicação tangente* de α, e o grau de φ é chamado *índice de rotação* de α. Intuitivamente, o índice de rotação de uma curva fechada é o número de voltas completas dadas pelo campo de vetores tangente ao longo da curva (Fig. 1.27, seção 1.7).

É possível estender a noção de índice de rotação a curvas regulares por partes usando os ângulos nos vértices (ver seção 4.5) e provar que o índice de rotação de uma curva simples, fechada e regular por partes é ± 1 (o teorema do índice de rotação). Este fato foi utilizado na demonstração do teorema de Gauss-Bonnet. Mais adiante nesta seção vamos provar uma versão diferenciável do teorema do índice de rotação.

Nosso primeiro teorema global será uma versão diferencial do chamado teorema da curva de Jordan. A nossa demostração deste teorema requer familiaridade com o material da seção 2.7.

Teorema 1 (Teorema da Curva de Jordan Diferenciável). *Seja $\alpha : [0,l] \to \mathbb{R}^2$ uma curva plana, regular, simples e fechada. Então $\mathbb{R}^2 - \alpha([0,l])$ tem exatamente duas componentes conexas, e $\alpha([0,l])$ é a fronteira comum destas componentes.*

Demonstração. Seja $N_\varepsilon(\alpha)$ uma vizinhança tubular de $\alpha([0,l])$. Ela é construída da mesma maneira que foi utilizada para a construção de uma vizinhança tubular de uma superfície compacta (cf. seção 2.7). Lembramos que $N_\varepsilon(\alpha)$ é a união de intervalos abertos normais $I_\varepsilon(t)$, com comprimento 2ε e centro em $\alpha(t)$. Evidentemente, $N_\varepsilon(\alpha) - \alpha([0,l])$ tem duas componentes conexas T_1 e T_2. Denote por $w(p)$ o número de voltas de α com relação a $p \in \mathbb{R}^2 - \alpha([0,l])$. O ponto crucial da demonstração é mostrar que se p_1 e p_2 pertencem a componentes conexas distintas de $N_\varepsilon(\alpha) - \alpha([0,l])$ e ao mesmo $I_\varepsilon(t_0)$, $t_0 \in [0,l]$, então $w(p_1) - w(p_2) = \pm 1$, o sinal dependendo da orientação de α.

Escolha pontos $A = \alpha(t_1)$, $D = \alpha(t_2)$, $t_1 < t_0 < t_2$, suficientemente próximos a $\alpha(t_0)$ para que o arco AD de α possa ser deformado homotopicamente sobre o polígono $ABCD$ da Fig. 5.32. Aqui BC é o segmento da reta tangente em $\alpha(t_0)$, e BA e CD são paralelos à reta normal em $\alpha(t_0)$.

Vamos denotar por $\beta : [0,\bar{l}] \to \mathbb{R}^2$ a curva obtida a partir de α substituindo o arco AD pelo polígono $ABCD$, e vamos supor que $\beta(0) = \beta(\bar{l}) = A$ e que $\beta(t_3) = D$. Evidentemente, $w(p_1)$ e $w(p_2)$ permanecem inalterados.

Sejam $\varphi_1, \varphi_2 : [0,\bar{l}] \to S^1$ as aplicações de posição de β com relação a p_1 e p_2, respectivamente (cf. Exemplo 1), e sejam $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 : [0,\bar{l}] \to \mathbb{R}$ os seus levantamentos a partir de um ponto fixado, digamos, $0 \in \mathbb{R}$. Por conveniência, vamos supor que a orientação de β é dada como na Fig. 5.32.

Observamos primeiro que se $t \in [t_3, \bar{l}]$, as distâncias de $\alpha(t)$ a p_1 e p_2 permancem limitadas inferiormente por um número independente de t, a saber, o menor dos dois números $\operatorname{dist}(p_1, \partial N_\varepsilon(\alpha))$ e $\operatorname{dist}(p_1, \partial N_\varepsilon(\alpha))$. Segue-se que o ângulo de $\alpha(t) - p_1$ com $\alpha(t) - p_2$ tende a zero uniformemente em $[t_3, \bar{l}]$ quando p_1 tende a p_2.

É claro agora que é possível escolher p_1 e p_2 suficientemente próximos um do outro para que $\tilde{\varphi}_1(t_3) - \tilde{\varphi}_1(0) = \pi - \varepsilon_1$, e $\tilde{\varphi}_2(t_3) - \tilde{\varphi}_2(0) = -(\pi + \varepsilon_2)$, com

ε_1 e ε_2 menores do que $\pi/3$. Além disto,

$$\begin{aligned}2\pi(w(p_1)-w(p_2)) &= (\tilde{\varphi}_1(\bar{l})-\tilde{\varphi}_1(0))-(\tilde{\varphi}_2(\bar{l})-\tilde{\varphi}_2(0)) \\ &= \{(\tilde{\varphi}_1-\tilde{\varphi}_2)(\bar{l})-(\tilde{\varphi}_1-\tilde{\varphi}_2)(t_3)\} \\ &\quad +\{(\tilde{\varphi}_1-\tilde{\varphi}_2)(t_3)-(\tilde{\varphi}_1-\tilde{\varphi}_2)(0)\}.\end{aligned}$$

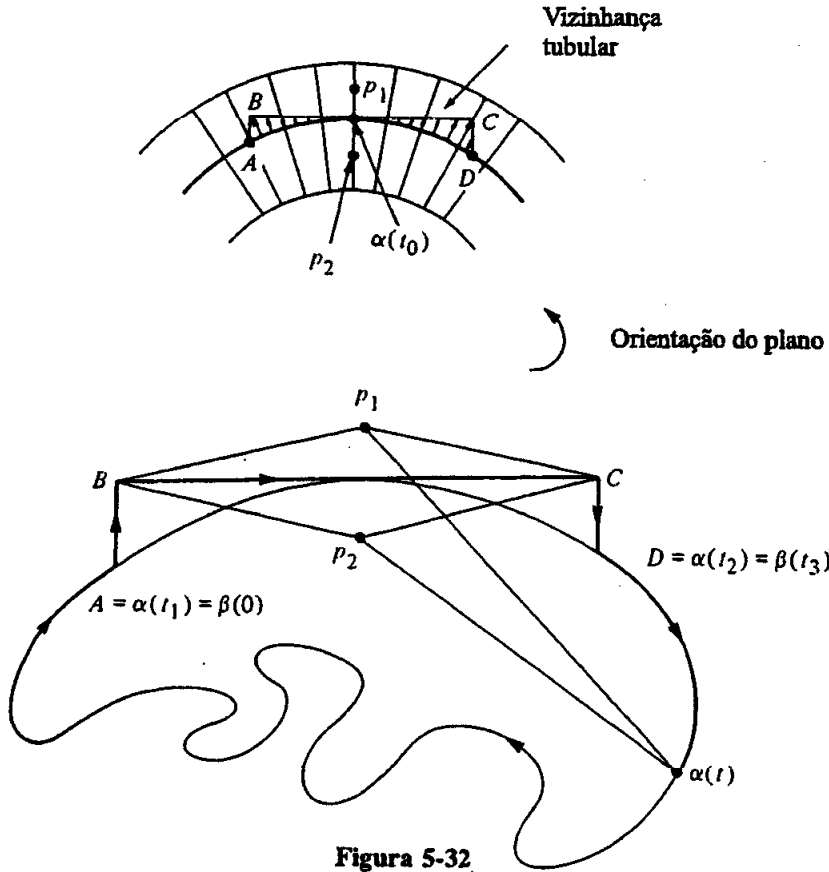



Figura 5-32

Pela observação acima, o primeiro termo torna-se arbitrariamente pequeno, digamos igual a $\varepsilon_3 < \pi/3$, se p_1 estiver suficientemente próximo de p_2. Assim,

$$2\pi(w(p_1)-w(p_2)) = \varepsilon_3 + \pi - \varepsilon_1 - (-\pi - \varepsilon_2) = 2\pi + \varepsilon,$$

onde $\varepsilon < \pi$ se p_1 está suficientemente próximo de p_2. Segue-se que $w(p_1) - w(p_2) = 1$, como havíamos afirmado.

Agora é fácil completar a demonstração. Como $w(p)$ é constante em cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 - \alpha([0,l]) = W$, segue-se do que foi visto acima que existem pelo menos duas componentes conexas em W. Vamos mostrar que existem exatamente duas tais componentes.

De fato, seja C uma componente conexa de W. Evidentemente $\partial C \neq \emptyset$ e $\partial C \subset \alpha([0,l])$. Por outro lado, se $p \in \alpha([0,l])$, existe uma vizinhança de p contendo pontos apenas de $\alpha([0,l])$, de T_1 e de T_2 (T_1, T_2 são as componentes conexas de $N_\varepsilon(\alpha) - \alpha([0,l])$. Assim, T_1 ou T_2 intersecta C. Como C é uma componente conexa, $C \supset T_1$ ou $C \supset T_2$. Portanto, existem no máximo duas (donde, exatamente duas) componentes conexas de W. Denote-as por C_1 e C_2. O argumento também mostra que $\partial C_1 = \alpha([0,l]) = \partial C_2$.

Q.E.D.

As duas componentes conexas dadas pelo Teorema 1 podem ser distinguidas facilmente. Pode-se observar inicialmente que se p_0 está fora de um disco fechado D contendo $\alpha([0,l])$ (como $[0,l]$ é compacto, um tal disco existe), então o número de voltas de α com relação a p_0 é zero. Isto decorre do fato de que as retas ligando p_0 a $\alpha(t)$, $t \in [0,l]$, estão dentro de uma região contendo D e limitada pelas duas tangentes de p_0 ao círculo ∂D. Assim, a componente conexa com número de voltas igual a zero é ilimitada e contém todos os pontos fora de um certo círculo. Evidentemente a componente conexa restante tem número de voltas igual a ± 1 e é limitada. Costuma-se chamá-las, respectivamente, de *exterior* e *interior* de α.

Observação 1. Um complemento útil ao teorema acima, que foi utilizado nas aplicações do teorema de Gauss-Bonnet (seção 4.5), é o fato de que o interior de α é homeomorfo a um disco aberto. Uma prova disto pode ser encontrada em J.J. Stoker, Differential Geometry, Wiley-Interscience, New York, 1969, pp. 43-45.

Vamos agora demonstrar uma versão diferenciável do teorema do índice de rotação.

Teorema 2. *Seja $\beta : [0,l] \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular plana simples e fechada. Então o índice de rotação de β é ± 1 (dependendo da orientação de β).*

Demonstração. Considere uma reta que não intersecta a curva e desloque-a paralelamente a si mesma até que ela seja tangente à curva. Denote por l esta posição da reta e por p um ponto de tangência da curva com l. Evidentemente a curva está inteiramente contida em um dos lados de l (Fig. 5.33). Escolha uma nova parametrização $\alpha : [0,l] \to \mathbb{R}^2$ para a curva de forma que $\alpha(0) = p$. Seja agora

$$T = \{(t_1, t_2) \in [0,l] \times [0,l];\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq l\}$$

um triângulo, e defina uma "aplicação secante" $\psi : T \to S^1$ por

$$\begin{aligned} \psi(t_1, t_2) &= \frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)|} \qquad \text{para } t_1 \neq t_2,\ (t_1, t_2) \in T - \{(0, l)\} \\ \psi(t, t) &= \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, \qquad \psi(0, l) = \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|}. \end{aligned}$$

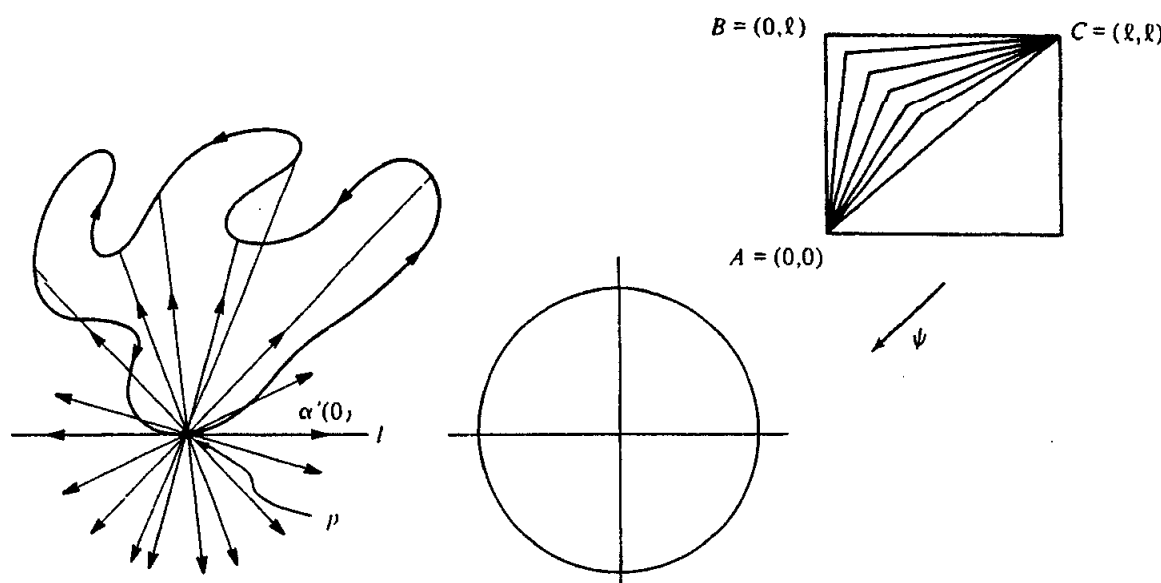



Figura 5-33

Como α é regular, vê-se facilmente que ψ é contínua. Sejam $A = (0,0)$, $B = (0,l)$, $C = (l,l)$ os vértices do triângulo T. Note que ψ restrita ao lado AC é a aplicação tangente de α, cujo grau é o índice de rotação de α. É claro que (Fig. 5.33) a aplicação tangente é homotópica à restrição de ψ aos lados restantes AB e BC. Assim, basta mostrarmos que o grau desta última aplicação é ± 1.

Suponha que as orientações do plano e da curva sejam tais que o ângulo orientado de $\alpha'(0)$ a $-\alpha'(0)$ seja π. Então a restrição de ψ a AB cobre metade de S^1 na direção positiva, e a restrição de ψ a BC cobre (também na direção positiva) a metade restante (Fig. 5.33). Assim, o grau de ψ restrito a AB e BC é $+1$. Invertendo a orientação, obtemos -1 para este grau, e isto completa a demonstração.

Q.E.D.

O teorema do índice de rotação pode ser usado para dar uma caracterização de uma uma importante classe de curvas, a saber, as curvas convexas.

Uma curva plana, regular e fechada $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ é convexa se, para cada $t \in [0, l]$, a curva está contida em um dos semi-planos fechados determinados pela reta tangente em t (Fig. 5.34; cf. seção 1.7). Se α é simples, a convexidade pode ser expressa em termos da curvatura. Lembramos que para curvas planas, curvatura sempre significa curvatura com sinal (seção 1.5, Observação 1).

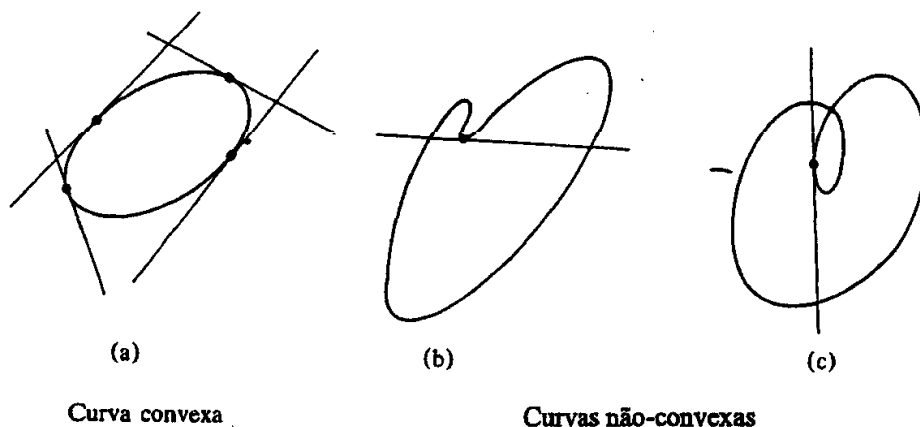



Figura 5-34

Proposição 1. *Uma curva plana, regular e fechada é convexa se e somente se ela é simples e a sua curvatura k não muda de sinal.*

Demonstração. Seja $\varphi : [0, l] \to S^1$ a aplicação tangente da curva α e $\tilde{\varphi} : [0, l] \to \mathbb{R}$ o levantamento de φ começando em $0 \in R$. Observamos primeiro que a condição de que k não muda de sinal é equivalente à condição de que $\tilde{\varphi}$ seja monótona (não-decrescente se $k \geq 0$, ou não-crescente se $k \leq 0$).

Suponha agora que α seja simples e que k não muda de sinal. Podemos orientar o plano da curva de modo que $k \geq 0$. Suponha que α não seja convexa. Então existe $t_0 \in [0, l]$ tal que os pontos de $\alpha([0, l])$ podem ser encontrados em ambos os lados da reta tangente T em $\alpha(t_0)$. Seja $n = n(t_0)$ o vetor normal em t_0, e faça

$$h_n(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), n \rangle, \qquad t \in [0, l].$$

Como $[0, l]$ é compacto e ambos os lados de T contém pontos da curva, a "função altura" h_n tem um máximo em $t_1 \neq t_0$ e um mínimo em $t_2 \neq t_0$. Os vetores tangentes nos pontos t_0, t_1, t_2 são paralelos, portanto dois deles, digamos, $\alpha'(t_0)$, $\alpha'(t_1)$ têm a mesma direção. Segue-se que $\varphi(t_0) = \varphi(t_1)$ e, pelo Teorema 2 (α é simples), $\tilde{\varphi}(t_0) = \tilde{\varphi}(t_1)$. Vamos supor que $t_1 > t_0$. Pela

observação acima, $\tilde{\varphi}$ é monótona não-decrescente, logo constante em $[t_0, t_1]$. Isto significa que $\alpha([t_0, t_1]) \subset T$. Mas isto contradiz a escolha de T e mostra que α é convexa.

Reciprocamente, suponha que α seja convexa. Vamos deixar como exercício mostrar que se α não é simples, em um ponto de auto-interseção (ver Fig. 5.35 (a)), ou perto dele (Fig. 5.35 (b)), a condição de convexidade é violada. Assim, α é simples.

Figura 5-35

Vamos agora supor que α seja convexa e que k mude de sinal em $[0, l]$. Então existem pontos $t_1, t_2 \in [0, l]$, $t_1 < t_2$, com $\tilde{\varphi}(t_1) = \tilde{\varphi}(t_2)$ e $\tilde{\varphi}$ não sendo constante em $[t_1, t_2]$.

Mostraremos que isto implica uma contradição, concluindo assim a demonstração. Pelo Teorema 2, existe $t_3 \in [0, l)$ com $\varphi(t_3) = -\varphi(t_1)$. Pela convexidade, duas das três retas paralelas em $\alpha(t_1), \alpha(t_2), \alpha(t_3)$ devem coincidir. Suponha que isto aconteça para $\alpha(t_1) = p$ e $\alpha(t_3) = q$, $t_3 > t_1$. Afirmamos que o arco de α entre p e q é o segmento de reta pq.

De fato, suponha que $r \neq q$ seja o último ponto para o qual este arco é um segmento de reta (r poderia coincidir com p). Como a curva está contida em um dos lados de pq, vê-se facilmente que alguma tangente T perto de p irá cruzar o segmento pq em um ponto interior (Fig. 5.36). Então p e q estão em lados distintos de T. Isto é uma contradição e prova a nossa afirmação.

Segue-se que as tangentes coincidentes têm as mesmas direções; isto é, elas são, em verdade, as retas tangentes em $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$. Assim, $\tilde{\varphi}$ é constante em $[t_1, t_2]$, e esta contradição prova que k não muda de sinal em $[0, l]$.

Q.E.D.

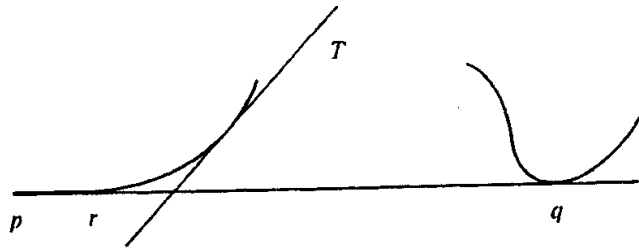



Figura 5-36

Observação 2. A condição de que α seja simples é essencial na proposição, como mostra o exemplo da curva na Fig. 5.34 (c).

Observação 3. A proposição deve ser comparada com as Observações 2 e 3 da seção 5.6; lá afirmamos que um resultado parecido vale para superfícies. Deve-se notar que, no caso das superfícies, a não existência de auto-interseções não é uma hipótese mas uma conseqüência.

Observação 4. Pode-se mostrar que uma curva plana, regular fechada é convexa se e somente se o seu interior é um conjunto convexo $K \subset \mathbb{R}^2$ (cf. Exercício 4).

Vamos agora tratar das curvas espaciais. No que se segue, a palavra curva significa uma curva parametrizada regular $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^3$ tendo o comprimento de arco s como parâmetro. Se α for uma curva plana, a curvatura $k(s)$ é a curvatura de α com sinal (cf. seção 1.5); caso contrário, vamos supor que $k(s)$ é positiva para todo $s \in [0, l]$. Convém chamar

$$\int_0^l |k(s)|\, ds$$

de *curvatura total* de α.

Provavelmente o teorema global para curvas espaciais mais conhecido seja o chamado teorema de Fenchel

Teorema 3 (Teorema de Fenchel). *A curvatura total de uma curva simples e fechada é $\geq 2\pi$, e a igualdade vale se e somente se a curva é uma curva plana convexa.*

Antes da demonstração, vamos introduzir uma superfície auxiliar que também será útil na demonstração do Teorema 4.

O *tubo* de raio r em torno da curva α é a superfície parametrizada

$$\mathbf{x}(s,v) = \alpha(s) + r(n\cos v + b\,\mathrm{sen}\,v), s \in [0,l],\ v \in [0,2\pi],$$

onde $n = n(s)$ e $b = b(s)$ são os vetores normal e binormal de α, respectivamente. Verifica-se facilmente que

$$|\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_v| = EG - F^2 = \mathbb{R}^2(1 - rk\cos v)^2.$$

Iremos supor que r seja suficientemente pequeno para que $rk_0 < 1$, onde $k_0 < \max|k(s)|$, $s \in [0,l]$. Então $\mathbf{x}$ é regular, e um cálculo direto nos dá

$$\begin{aligned} N &= -(n\cos v + b\,\mathrm{sen}\,v), \\ \mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_v &= r(1 - rk\cos v)N, \\ N_s \wedge N_v &= k\cos v(n\cos v + b\,\mathrm{sen}\,v) = -kN\cos v \\ &= -\frac{k\cos v}{r(1-rk\cos v)}\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Segue-se que a curvatura Gaussiana $K = K(s,v)$ do tubo é dada por

$$K(s,v) = -\frac{k\cos v}{r(1-rk\cos v)}.$$

Note que o traço T de $\mathbf{x}$ pode ter auto-interseções. Contudo, se α for simples, é possível escolher r suficientemente pequeno para que isto não aconteça; usamos a compacidade de $[0,l]$ e procedemos como no caso de uma vizinhança tubular construida na seção 2.7. Se, além disto, α for fechada, T é uma superfície regular homeomorfa a um toro, também chamado de *tubo em torno* de α. No que se segue, estaremos supondo esta situação.

Demonstração do Teorema 3. Seja T um tubo em torno de α, e seja $R \subset T$ uma região de T onde a curvatura Gaussiana de T é não-negativa. Por um lado,

$$\begin{aligned} \iint_R K\,d\sigma &= \iint_R K\sqrt{EG-F^2}\,ds\,dv \\ &= \int_0^l k\,ds \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos v\,dv = 2\int_0^l k(s)\,ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, cada semi-reta L passando pela origem de $\mathbb{R}^3$ aparece ao menos uma vez como uma direção normal a R. Pois se tomamos um plano P perpendicular a L tal que $P \cap T = \emptyset$ e movemos P paralelamente a si mesmo em direção a T (Fig. 5.37), ele irá encontrar T pela primeira vez em um ponto onde $K \geq 0$.

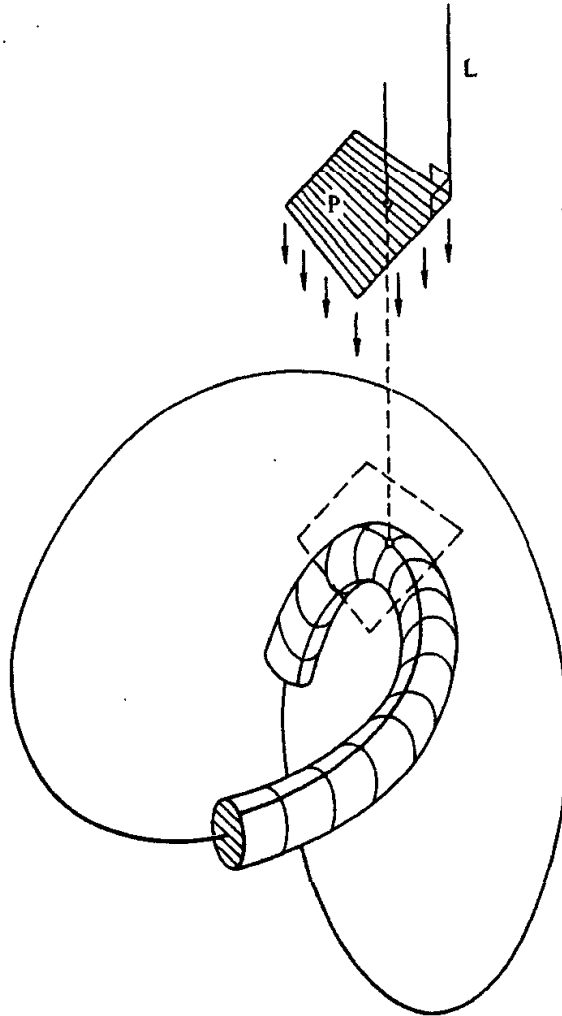



Figura 5-37

Segue-se que a aplicação de Gauss N de R cobre toda a esfera unitária S^2 pelo menos uma vez; logo, $\iint_R K \, d\sigma \geq 4\pi$. Portanto, a curvatura total de α é $\geq 2\pi$, e demonstramos a primeira parte do Teorema 3.

Observe que a aplicação de Gauss N restrita a cada círculo $s =$ const. é injetiva e a sua imagem é um grande círculo $\Gamma_s \subset S^2$. Vamos denotar por $\Gamma_s^+ \subset \Gamma_s$ o semi-círculo fechado correspondendo aos pontos onde $K \geq 0$.

Suponha que α seja uma curva plana convexa. Então todos os Γ_s^+ têm os mesmos pontos extremos p, q, e, pela convexidade, $\Gamma_{s_1} \cap \Gamma_{s_2} = \{p\} \cup \{q\}$ para $s_1 \neq s_2$, $s_1, s_2 \in [0, l)$. Pela primeira parte do teorema, segue-se que $\iint_R K\, d\sigma = 4\pi$; logo, a curvatura total de α é igual a 2π.

Suponha agora que a curvatura total de α seja igual a 2π. Pela primeira parte do teorema, $\iint_R K\, d\sigma = 4\pi$. Afirmamos que todos os Γ_s^+ têm os mesmos pontos extremos p e q. Caso contrário, existem dois grandes círculos distintos $\Gamma_{s_1}, \Gamma_{s_2}$, s_1 arbitrariamente próximos de s_2, que se intersectam em dois pontos antípodas que não estão em $N(R \cap Q)$, onde Q é o conjunto de pontos de T com curvatura não-positiva. Segue-se que existem dois pontos de curvatura positiva que são levados por N em um único ponto de S^2. Como N é um difeomorfismo local em tais pontos e cada ponto de S^2 é a imagem de, pelo menos, um ponto de R, concluímos que $\iint_R K\, d\sigma > 4\pi$, o que é uma contradição.

Observando que os pontos de curvatura Gaussiana nula em T são as interseções da binormal de α com T, vemos que o vetor binormal de α é paralelo à reta pq. Assim, α está contida em um plano normal a esta reta.

Para finalizar, provaremos que α é convexa. Podemos admitirir que α está orientada de forma que o seu índice de rotação seja positivo. Como a curvatura total de α é 2π, temos

$$2\pi = \int_0^l |k|\, ds \geq \int_0^l k\, ds.$$

Por outro lado,

$$\int_J k\, ds \geq 2\pi,$$

onde $J = \{s \in [0, l];\ k(s) \geq 0\}$. Isto acontece para qualquer curva plana fechada e segue-se de um argumento inteiramente análogo ao que foi utilizado para $R \subset T$ no começo desta demonstração. Assim,

$$\int_0^l k\, ds = \int_0^l |k|\, ds = 2\pi.$$

Portanto, $k \geq 0$, e α é uma curva plana convexa.

Q.E.D.

Observação 5. Não é difícil ver que a demonstração continua valendo mesmo que α não seja simples. O tubo neste caso teria auto-interseções, mas isto é irrelevante para o argumento. Na última etapa da demonstração (a convexidade de α), deve-se observar que mostramos em verdade que α tem curvatura não-negativa e que o seu índice de rotação é igual a 1. Olhando a primeira parte da demonstração da Prop. 1, vê-se facilmente que isto implica que α é convexa.

Queremos utilizar a método acima de demonstrar o teorema de Fenchel para obter um refinamento deste teorema. Tal refinamento afirma que se uma curva espacial é um nó (conceito que definiremos abaixo), então a curvatura total é, em verdade, maior que 4π.

Uma curva contínua e fechada $C \subset \mathbb{R}^3$ *não é um nó* se existe uma homotopia $H : S^1 \times I \to \mathbb{R}^3$, $I = [0,1]$, tal que

$$\begin{aligned} H(S^1 \times \{0\}) &= S^1, \\ H(S^1 \times \{1\}) &= C; \\ \text{e } H(S^1 \times \{t\}) &= C_t \subset \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

é homeomorfa a S^1 para todo $t \in [0,1]$. Intuitivamente, isto significa que C pode ser deformado continuamente até o círculo S^1 de forma que todas as posições intermediárias sejam homeomorfas a S^1. Uma tal homotopia é chamada uma *isotopia*; uma curva que não é um nó é então uma curva isotópica a S^1. Quando isto não acontece, diz-se que C *é um nó*. (Fig. 5.38).

Teorema 4 (Fary-Milnor). *A curvatura total de uma curva simples e fechada que é um nó é maior que* 4π.

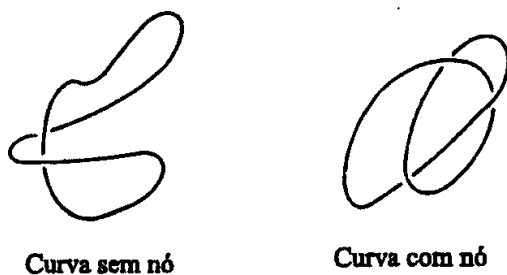



Figura 5-38

Demonstração. Sejam $C = \alpha([0,l])$, T um tubo em torno de α e $R \subset T$ a região de T onde $K \geq 0$. Seja $b = b(s)$ o vetor binormal de α, e seja $v \in \mathbb{R}^3$ um

vetor unitário, $v \neq b(s)$, para todo $s \in [0,l]$. Seja $h_v : [0,l] \to R$ a função altura de α na direção de v; isto é, $h_v(s) = \langle \alpha(s) - 0, v \rangle$, $s \in [0,l]$. Evidentemente, s é um ponto crítico de h_v se e somente se v é perpendicular à reta tangente em $\alpha(s)$. Além disto, em um ponto crítico,

$$\frac{d}{ds^2}(h_v) = \left\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2}, v \right\rangle = k \langle n, v \rangle \neq 0,$$

pois $v \neq b(s)$ para todo s e $k > 0$. Assim, os pontos críticos de h_v são pontos de máximo ou de mínimo.

Agora, suponha que a curvatura total de α seja menor ou igual a 4π. Isto significa que

$$\iint_R K \, d\sigma = 2 \int k \, ds \leq 8\pi.$$

Afirmamos que, para algum $v_0 \notin b([0,l]$, h_{v_0} tem exatamente dois pontos críticos (como $[0,l]$ é compacto, tais pontos correspondem ao máximo e ao mínimo de h_{v_0}). Suponha que o contrário seja verdadeiro. Então, para todo $v \notin b([0,l])$, h_v tem pelo menos três pontos críticos. Vamos supor que dois deles sejam pontos de mínimo s_1 e s_2; o caso dos máximos pode ser tratado de maneira análoga.

Considere um plano P perpendicular a v tal que $P \cap T = \emptyset$, e desloque-o paralelamente a si mesmo em direção a T. Temos duas possibilidades: ou $h_v(s_1) = h_v(s_2)$ ou, digamos, $h_v(s_1) < h_v(s_2)$. No primeiro caso, P encontra T em pontos $q_1 \neq q_2$, e como $v \notin b([0,l])$, $K(q_1)$ e $K(q_2)$ são positivos. No segundo caso, antes de encontrar $\alpha(s_1)$, P encontrará T em um ponto q_1 com $K(q_1) > 0$. Considere um segundo plano $\bar{P}$, paralelo a P e a uma distância r "acima" de P (r é o raio do tubo T). Mova $\bar{P}$ para cima até que ele toque $\alpha(s_2)$; então P encontrará T em um ponto $q_2 \neq q_1$ (Fig. 5.39). Como s_2 é um ponto de mínimo e $v \notin b([0,l])$, $K(q_2) > 0$. De qualquer maneira, teremos dois pontos distintos em T com $K > 0$ que são levados por N em um único ponto de S^2. Isto contradiz o fato de que $\iint_R K \, d\sigma \leq 8\pi$, e prova a nossa afirmação.

Sejam s_1 e s_2 os pontos críticos de h_{v_0}, e sejam P_1 e P_2 os planos perpendiculares a v_0 passando por $\alpha(s_1)$ e $\alpha(s_2)$, respectivamente. Cada plano paralelo a v_0 e entre P_1 e P_2 encontra C em exatamente dois pontos. Ligando estes pares de pontos por segmentos de retas, geramos uma superfície limitada por C que

é homeomorfa a um disco. (A verificação deste fato não oferece dificuldades). Assim, C não é um nó, e esta contradição completa a demonstração.

Q.E.D.

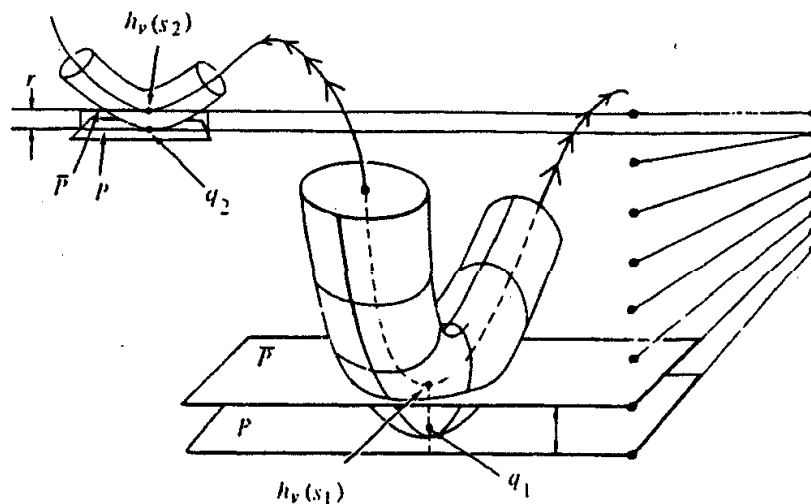



Figura 5-39

Antes de concluir esta Seção, gostariamos de mencionar o belo livro de H. Alencar e W. Santos, *Geometria diferencial das curvas planas*, Publicações Matemáticas do IMPA, 24º Colóquio Brasileiro de Matemática, 2003, onde parte dos resultados desta seção, e outros fatos sobre curvas planas, é apresentado de maneira elementar e independente de conhecimentos prévios de geometria diferencial.

Exercícios

1. Determine os índices de rotação das curvas (a), (b), (c) e (d) na Fig. 5.40.

2. Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, l]$, uma curva plana diferenciável e fechada. Seja $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \notin \alpha([0, l])$, e defina as funções

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{x(t) - x_0}{\{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2\}^{1/2}}, \\ b(t) &= \frac{y(t) - y_0}{\{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2\}^{1/2}}. \end{aligned}$$

a. Use o Lema 1 da seção 4.4 para mostrar que a função diferenciável

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t (ab' - ba')\, dt, \qquad a' = \frac{da}{dt}, \qquad b' = \frac{db}{dt},$$

é uma determinação diferenciável do ângulo que o eixo Ox faz com o vetor posição $(\alpha(t) - p_0)/\left|\alpha(t) - p_0\right|$.

b. Use a parte a para mostrar que quando α é uma curva plana diferenciável e fechada, o número de voltas de α com relação a p_0 é dado pela integral

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_0^l (ab' - ba')\, dt.$$

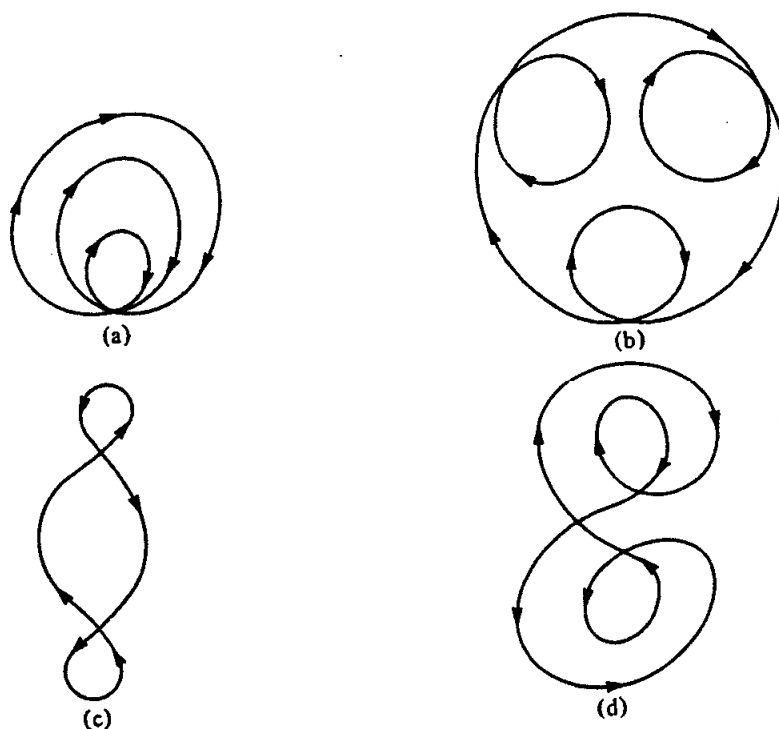



Figura 5-40

3. Sejam $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ e $\beta[0, l] \to \mathbb{R}^2$ duas curvas planas diferenciáveis e fechadas, e seja $p_0 \in \mathbb{R}^2$ um ponto tal que $p_0 \notin \alpha([0, l])$ e $p_0 \notin \beta([0, l])$.

Suponha que, para cada $t \in [0, l]$, os pontos $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ estejam mais próximos do que os pontos $\alpha(t)$ e p_0, i.e.

$$|\alpha(t) - \beta(t)| < |\alpha(t) - p_0|.$$

Use o Exercício 2 para provar que o número de voltas de α com relação a p_0 é igual ao número de voltas de β em relação a p_0.

4. **a.** Seja C uma curva plana regular fechada e convexa. Como C é simples, ela determina, pelo teorema da curva de Jordan, uma região interior $K \subset \mathbb{R}^2$. Prove que K é um conjunto convexo (i.e., dados $p, q \in K$, o segmento de reta $\overline{pq}$ está contido em K; cf. Exercício 9, seção 1.7).

b. Reciprocamente, seja C uma curva plana regular (não necessariamente fechada), suponha que C seja a fronteira de uma região convexa. Prove que C é convexa.

5. Seja C uma curva plana regular fechada e convexa. Pelo Exercício 4, o interior de C é um conjunto convexo K. Seja $p_0 \in K$, $p_0 \notin C$.

a. Mostre que a reta que liga p_0 a um ponto arbitrário $q \in C$ não é tangente a C em q.

b. Conclua, a partir da parte **a**, que o índice de rotação de C é igual ao número de voltas de C com relação a p_0.

c. Obtenha da parte **b** uma demonstração simples do fato de que o índice de rotação de uma curva fechada convexa é ± 1.

6. Seja $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular fechada parametrizada pelo comprimento de arco. Suponha que $0 \neq |k(s)| \leq 1$ para todo $s \in [0, l]$. Prove que $l \geq 2\pi$ e que $l = 2\pi$ se e somente se α é uma curva plana convexa.

7. (*Teorema de Schur para Curvas Planas.*) Sejam $\alpha : [0,l] \to \mathbb{R}^2$ e $\tilde{\alpha} : [0,l] \to \mathbb{R}^2$ duas curvas convexas parametrizadas pelo comprimento de arco, ambas com o mesmo comprimento l. Denote por k e $\tilde{k}$ as curvatura de α e $\tilde{\alpha}$, respectivamente, e por d e $\tilde{d}$ os comprimentos das cordas de α e $\tilde{\alpha}$, respectivamente; i.e.,

$$d(s) = |\alpha(0) - \alpha(s)|, \qquad \tilde{d}(s) = |\tilde{\alpha}(0) - \tilde{\alpha}(s)|.$$

Suponha que $k(s) \geq \tilde{k}(s)$, $s \in [0,l]$. Queremos provar que $d(s) \leq \tilde{d}(s)$, $s \in [0,l]$ (i.e., se esticamos uma curva, as suas cordas aumentam) e que vale a igualdade para $s \in [0,l]$ se e só se as duas curvas diferem por um movimento rígido. Observamos que o teorema pode ser estendido para o caso onde $\tilde{\alpha}$ é uma curva espacial e há muitas aplicações. Compare com S. S. Chern [10].

O seguinte esboço pode ser útil.

a. Fixe um ponto $s = s_1$. Coloque as duas curvas $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $\tilde{\alpha}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ no semi-plano inferior $y \leq 0$ de forma que $\alpha(0)$, $\alpha(s_1), \tilde{\alpha}(0)$ e $\tilde{\alpha}(s_1)$ estejam sobre o eixo Ox e $x(s_1) > x(0)$, $\tilde{x}(s_1) > \tilde{x}(0)$ (ver Fig. 5.41). Seja $s_0 \in [0, s_1]$ tal que $\alpha'(s_0)$ é paralelo ao eixo Ox. Escolha a função $\theta(s)$ que fornece uma determinação diferenciável do ângulo que $\alpha'(s)$ faz com o eixo Ox de modo que $\theta(s_0) = 0$. Mostre que, pela convexidade, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

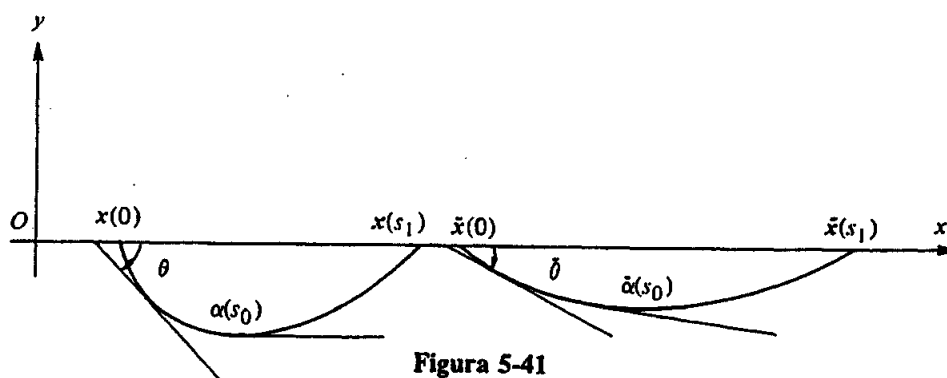



Figura 5-41

b. Seja $\tilde{\theta}(s)$, $\tilde{\theta}(s_0) = 0$, uma determinação diferenciável do ângulo que $\tilde{\alpha}'(s)$ faz com o eixo Ox. (Note que $\tilde{\alpha}'(s_0)$ pode não ser mais paralelo ao

eixo Ox.) Prove que $\tilde{\theta}(s) \leq \theta(s)$ e use a parte **a** para concluir que

$$d(s_1) = \int_0^{s_1} \cos\theta(s)\, ds \leq \int_0^{s_1} \cos\tilde{\theta}(s)\, ds \leq \tilde{d}(s_1).$$

Para o caso onde ocorre a igualdade, basta considerar os passos na ordem inversa e aplicar o teorema de unicidade para curvas planas.

8. (*Teorema de Stoker para Curvas Planas.*) Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular plana parametrizada pelo comprimento de arco. Suponha que α satisfaz as seguintes condições:

1. A curvatura de α é estritamente positiva.

2. $\lim_{s\to\pm\infty} |\alpha(s)| = \infty$; isto é, a curva se se estende para o infinito em ambas as direções.

3. α não tem auto-interseções.

O objetivo do exercício é provar que a curvatura total de α é $\leq \pi$.

As seguintes indicações podem ser úteis. Suponha que a curvatura total é $> \pi$ e que α não tem auto-interseções. Para obter uma contradição, proceda da seguinte maneira:

a. Prove que existem pontos, digamos, $p = \alpha(0)$, $q = \alpha(s_1)$, $s_1 > 0$, tal que as retas tangentes T_p, T_q nos pontos p e q, respectivamente, são paralelas e que não existe reta tangente a T_p no caminho $\alpha([0, s_1])$.

b. Mostre que quando s cresce, $\alpha(s)$ encontra T_p em um ponto, digamos, r (Fig. 5.42).

c. O arco $\alpha((-\infty, 0))$ tem que intersectar T_p em um ponto t entre p e r.

d. Complete o pedaço $tpqr$ de α com um caminho β que não tem auto-interseções ligando r a t, e obtenha uma curva fechada C. Mostre que o índice de rotação de $C \geq 2$. Mostre que isto implica que α tem auto-interseções, o que é uma contradição.

*9. Seja $\alpha : [0, l] \to S^2$ uma curva regular fechada em uma esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Suponha que α seja parametrizada pelo comprimento de arco e que a sua curvatura $k(s)$ nunca se anule. Prove que

$$\int \tau(s)\, ds = 0.$$

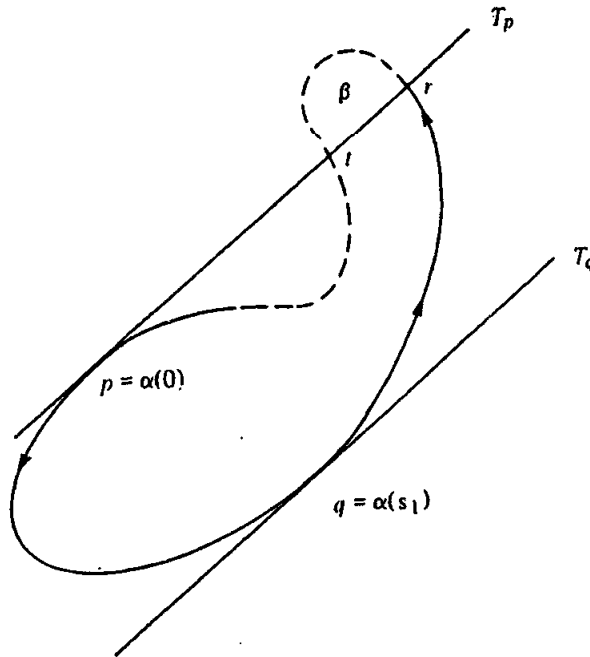



Figura 5-42

5.8 Superfícies com Curvatura Gaussiana Nula

Já foi visto (seção 4.6) que as superfícies regulares com curvatura Gaussiana identicamente nula são localmente isométricas ao plano. Nesta seção, vamos estudar tais superfícies sob o ponto de vista da sua posição em $\mathbb{R}^3$ e provar o seguinte teorema global.

Teorema. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície completa com curvatura Gaussiana nula. Então S é um cilindro ou um plano.*

Por definição, um *cilindro* é uma superfície regular S tal que por cada ponto $p \in S$ passa uma única reta $R(p) \subset S$ (a geratriz passando por p) que

satisfaz a condição de que se $p \neq q$, então as retas $R(p)$ e $R(q)$ são paralelas ou coincidem.

Um fato estranho na história da geometria diferencial é que o teorema acima foi provado bastante tarde. A primeira prova surgiu como um corolário de um teorema de P. Hartman e L. Nirenberg (" On Spherical Images Whose Jacobians Do Not Change Sign," Amer. J. Math. 81 (1959), 901-920) que trata de uma situação muito mais geral do que a nossa. Mais tarde, W. S. Massey ("Surfaces of Gaussian Curvature Zero in Euclidean Space," *Tohoku Math.* J. 14 (1962), 73-79) e J. J. Stoker ("Developable Surfaces in the Large," *Comm. Pure and Appl. Math.* 14 (1961), 627-635) obtiveram provas elementares e diretas deste teorema. A demonstração apresentada aqui é uma modificação da que foi dada por Massey. Deve-se também observar que o artigo de Stoker contém um teorema um pouco mais geral.

Vamos começar com o estudo de algumas propriedades locais de uma superfície com curvatura nula.

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular com curvatura Gaussiana $K \equiv 0$. Como $K = k_1 k_2$, onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais, os pontos de S são parabólicos ou planares. Denotamos por P o conjunto de pontos planares e por $U = S - P$ o conjunto de pontos parabólicos de S.

P é fechado em S. De fato, os pontos de P satisfazem a condição de que a curvatura média $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ é nula. Um ponto de acumulação de P tem, pela continuidade de H, curvatura média nula; logo, ele pertence a P. Segue-se que $U = S - P$ é aberto em S.

Um exemplo instrutivo das relações entre os conjuntos P e U é dado pelo exemplo seguinte.

Exemplo 1. Considere o triângulo aberto ABC e adicione a cada lado uma superfície cilíndrica, com as geratrizes paralelas ao lado em questão (ver Fig. 5.43). É possível realizar esta construção de forma que a superfície resultante seja regular. Por exemplo, para assegurar a regularidade ao longo do segmento aberto BC, basta que a secção FG da faixa cilindrica $BCDE$ por um plano normal a BC seja uma curva da forma

$$\exp(-\frac{1}{x^2}).$$

Observe que os vértices A, B, C do triângulo e as arestas BE, CD, etc., das faixas cilíndricas não pertencem a S.

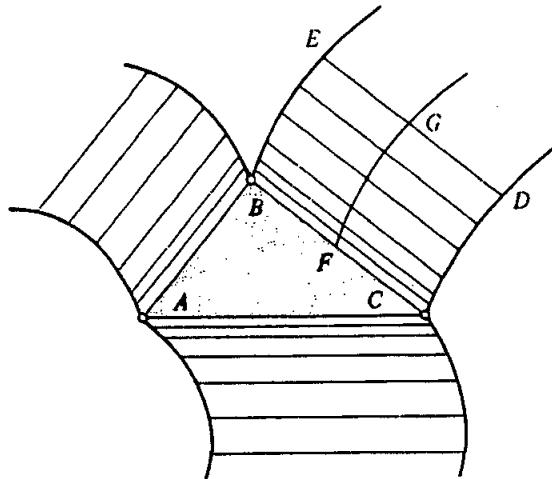



Figura 5-43

A superfície S assim construída tem curvatura $K \equiv 0$. O conjunto P é formado pelo triângulo fechado ABC menos os vértices. Observe que P é fechado em S mas não em $\mathbb{R}^3$. O conjunto U é formado pelos pontos que são interiores às faixas cilíndricas. Por cada ponto de U passa uma única reta que nunca encontra P. A fronteira de P é formada por segmentos abertos AB, BC e CA.

A seguir, provaremos que as propriedades relevantes deste exemplo aparecem no caso geral.

Primeiro, seja $p \in U$. Como p é um ponto parabólico, uma das direções principais em p é uma direção assintótica, e não há outra direção assintótica em p. Vamos provar que a única linha assintótica que passa por p é um segmento de reta.

Proposição 1. *A única linha assintótica que passa por um ponto parabólico $p \in U \subset S$ de uma superfície com curvatura $K \equiv 0$ é um segmento (aberto) de uma reta em S.*

Demonstração. Como p não é umbílico, é possível parametrizar uma vizinhança $V \subset U$ de p por $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}$ de tal maneira que as curvas coordenadas sejam linhas de curvatura. Suponha que $v =$ const. seja uma curva assintótica; isto é, que ela tenha curvatura normal nula. Então, pelo teorema de Olinde Rodrigues (seção 3.2, Prop. 3), $N_u = 0$ ao longo de $v =$ const. Como por cada ponto da vizinhança V passa uma curva $v =$ const., a relação $N_u = 0$ vale para todos os pontos de V.

Segue-se que em V

$$\langle \mathbf{x}, N \rangle_u = \langle \mathbf{x}_u, N \rangle + \langle \mathbf{x}, N_u \rangle = 0.$$

Portanto,

$$\langle \mathbf{x}, N \rangle = \varphi(v), \tag{1}$$

onde $\varphi(v)$ é uma função diferenciável que depende apenas de v. Derivando a Eq. (1) com relação a v, obtemos

$$\langle \mathbf{x}, N_v \rangle = \varphi'(v). \tag{2}$$

Por outro lado, N_v é normal a N e diferente de zero, pois os pontos de v são parabólicos. Portanto, N e N_v são linearmente independentes. Além disto, $N_{vu} = N_{uv} = 0$ em V.

Observamos agora que ao longo da curva $v = \text{const.} = v_0$ o vetor $N(u) = N_0$ e $N_v(u) = (N_v)_0 = \text{const.}$ Assim, a Eq. (1) implica que a curva $\mathbf{x}(u, v_0)$ pertence a um plano normal ao vetor constante N_0, e a Eq. (2) implica que esta curva pertence a um plano normal ao vetor constante $(N_v)_0$. Portanto, a curva está contida na interseção de dois planos (a interseção é não-vazia pois N_0 e $(N_v)_0$ são linearmente independentes); logo, ela é um segmento de reta.

Q.E.D.

Observação. É essencial que K seja identicamente nula na proposição acima. Por exemplo, o paralelo superior de um toro de revolução é uma curva assintótica formada por pontos parabólicos que não é um segmento de reta.

Vamos agora ver o que acontece quando estendemos este segmento de reta. A proposição a seguir mostra que (cf. Exemplo 1) o segmento estendido nunca encontra o conjunto P; ou ele "termina" em um ponto de fronteira de S ou continua indefinidamente em U.

Convém utilizar a seguinte terminologia. Uma linha assintótica passando por $p \in S$ é *máxima* se não é um subconjunto próprio de alguma linha assintótica passando por p.

Proposição 2 (Massey, loc. cit.). *Seja r uma linha assintótica máxima passando por um ponto parabólico $p \in U \subset S$ de uma superfície S com curvatura $K \equiv 0$ e seja $P \subset S$ o conjunto de pontos planares de S. Então $r \cap P = \emptyset$.*

A prova da Prop. 2 depende do seguinte lema local, que é demonstrado utilizando as equações de Mainardi-Codazzi (cf. Seção 4.3).

Lema 1. *Seja s o comprimento de arco de uma linha assintótica passando por um ponto parabólico p de uma superfície S com curvatura nula e seja $H = H(s)$ a curvatura média de S ao longo desta curva. Então, em U,*

$$\frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{H}) = 0.$$

Demonstração do Lema 1. Introduzimos em uma vizinhança $V \subset U$ de p um sistema de coordenadas (u, v) tal que as curvas coordenadas sejam linhas de curvatura e as curvas $v =$ const. sejam as linhas assintóticas de V. Sejam e, f e g os coeficientes da segunda forma fundamental nesta parametrização. Como $f = 0$ e a curva $v =$ const., $u = u(s)$ deve satisfazer a equação diferencial das linhas assintóticas

$$e(\frac{du}{ds})^2 + 2f\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + g(\frac{dv}{ds})^2 = 0,$$

concluimos que $e = 0$. Nestas condições, a curvatura média H é dada por

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right) = \frac{1}{2}\frac{g}{G}. \tag{3}$$

Introduzindo os valores $F = f = e = 0$ nas equações de Mainardi-Codazzi (seção 4.3, Eq. (7) e (7a)), obtemos

$$0 = \frac{1}{2}\frac{gE_v}{G}, \qquad g_u = \frac{1}{2}\frac{gG_u}{G}. \tag{4}$$

A partir da primeira equação de (4), segue-se que $E_v = 0$. Assim, $E = E(u)$ é uma função apenas de u. Portanto, é possível fazer uma mudança de parâmetros:

$$\bar{v} = v, \qquad \bar{u} = \int \sqrt{E(u)}du.$$

Vamos continuar denotando os novos parâmetros por u e v. Agora u mede o comprimento de arco ao longo de $v =$ const., donde $E = 1$.

Nesta nova parametrização ($F = 0$, $E = 1$) a expressão para a curvatura Gaussiana é

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu} = 0.$$

Portanto,

$$\sqrt{G} = c_1(v)u + c_2(v), \tag{5}$$

onde $c_1(v)$ e $c_2(v)$ são funções apenas de v.

Por outro lado, a segunda equação de (4) pode ser escrita ($g \neq 0$)

$$\frac{g_u}{g} = \frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{G}\sqrt{G}} = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}};$$

donde

$$g = c_3(v)\sqrt{G}, \tag{6}$$

onde $c_3(v)$ é uma função apenas de v. Introduzindo as equações (5) e (6) na Eq. (3) obtemos

$$H = \frac{1}{2}\frac{c_3(v)}{\sqrt{G}}\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G}} = \frac{1}{2}\frac{c_3(v)}{c_1(v)u + c_2(v)}.$$

Finalmente, lembrando que $u = s$ e derivando a expressão acima em relação a s, concluimos que

$$\frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{H}) = 0.$$

Q.E.D.

Demonstração da Prop. 2. Suponha que a linha assintótica máxima r passando por p e parametrizada pelo comprimento de arco s contém um ponto $q \in P$. Como r é conexo e U é aberto, existe um ponto p_0 de r, correspondendo a s_0, tal que $p_0 \in P$ e que os pontos de r com $s < s_0$ pertencem a U.

Por outro lado, pelo Lema 1, concluimos que ao longo de r e para $s < s_0$,

$$H(s) = \frac{1}{as + b},$$

onde a e b são constantes. Como os pontos de P têm curvatura média nula, obtemos

$$H(p_0) = 0 = \lim_{s \to s_0} H(s) = \lim_{s \to s_0} \frac{1}{as+b},$$

o que é uma contradição e conclui a demonstração.

Q.E.D.

Seja agora $\mathrm{Fr}\, U$ a fronteira de U em S; isto é, $\mathrm{Fr}\, U$ é o conjunto de pontos $p \in S$ tais que qualquer vizinhança de p em S contenha pontos de U e pontos de $S - U = P$. Como U é aberto em S, segue-se que $\mathrm{Fr}\, U \subset P$. Além disto, como a definição de ponto de fronteira é simétrica em U e P, temos que

$$Fr\, U = Fr\, P.$$

A proposição seguinte mostra que (como no Exemplo 1) o conjunto $\mathrm{Fr}\ U = \mathrm{Fr}\ P$ é formado por segmentos de retas.

Proposição 3 (Massey). *Seja $p \in \mathrm{Fr}\, U \subset S$ um ponto da fronteira do conjunto U de pontos parabólicos de uma superfície S com curvatura $K \equiv 0$. Então por p passa um único segmento de reta $C(p) \subset S$. Além disto, $C(p) \subset$ $\mathrm{Fr}\, U$; isto é, a fronteira de U é formada por segmentos de retas.*

Demonstração. Seja $p \in \mathrm{Fr}\, U$. Como p é um ponto de acumulação de U, é possível escolher uma seqüência $\{p_n\}$, $p_n \in U$, com $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Para todo p_n, seja $C(p_n)$ a única linha assintótica máxima (segmento de reta aberto) que passa por p_n (cf. Prop. 1). Vamos provar que, quando $n \to \infty$, as direções de $C(p_n)$ convergem para uma certa direção que não depende da escolha da seqüência $\{p_n\}$.

De fato, seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma esfera suficientemente pequena em torno de p. Como a esfera Σ é compacta, os pontos $\{q_n\}$ da interseção de $C(p_n)$ com Σ têm pelo menos um ponto de acumulação $q \in \Sigma$, que ocorre simultaneamente com o seu ponto antípoda. Se houvesse um outro ponto de acumulação r além de q e de seu antípoda, então por pontos arbitrariamente próximos p_n e p_m passariam linhas assintóticas $C(p_n)$ e $C(p_m)$ fazendo um ângulo maior que

$$\theta = \frac{1}{2} ang(pq, pr),$$

contradizendo assim a continuidade das linhas assintóticas. Segue-se que as retas $C(p_n)$ têm uma direção limite. Um argumento análogo mostra que a direção limite não depende da seqüência escolhida $\{p_n\}$ com $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, como afirmamos previamente.

Como as direções de $C(p_n)$ convergem e $p_n \to p$, os segmentos abertos das retas $C(p_n)$ convergem para um segmento $C(p) \subset S$ que passa por p. O segmento $C(p)$ não se reduz a um ponto p. Caso contrário, como $C(p_n)$ é máxima, $p \in S$ seria um ponto de acumulação das extremidades de $C(p_n)$, que não pertencem a S (cf. Prop. 2). Pelo mesmo raciocínio, o segmento $C(p)$ não contém seus pontos extremos.

Finalmente, vamos provar que $C(p) \subset \operatorname{Fr} U$. De fato, se $q \in C(p)$, existe uma seqüência

$$\{q_n\},\ q_n \in C(p_n) \subset U, \qquad \text{com } \lim_{n\to\infty} q_n = q.$$

Então $q \in U \cup \operatorname{Fr} U$. Suponha que $q \notin \operatorname{Fr} U$. Então $q \in U$, e, pela continuidade das direções assintóticas, $C(p)$ é a única linha assintótica que passa por q. Isto implica, pela Prop. 2, que $p \in U$, o que é uma contradição. Portanto, $q \in \operatorname{Fr} U$, isto é, $C(p) \subset \operatorname{Fr} U$, e isto conclui a demonstração.

Q.E.D.

Estamos agora prontos para provar o resultado global enunciado no começo desta seção.

Demonstração do teorema. Suponha que S não seja um plano. Então (seção 3.2, Prop. 4) S contém pontos parabólicos. Seja U o conjunto (aberto) dos pontos parabólicos de S e P o conjunto (fechado) de pontos planares de S. Vamos denotar por *int* P, o *interior* de P, o conjunto de pontos que têm uma vizinhança inteiramente contida em P. *int* P é um conjunto aberto em S que contém somente pontos planares. Portanto, cada componente conexa de *int* P está contida em um plano (seção 3.2, Prop. 5).

Vamos primeiro mostrar que se $q \in S$ e $q \notin$ *int* P, então por p passa uma única reta $R(q) \subset S$, e duas tais retas ou coincidem ou não se intersectam.

De fato, quando $q \in U$, existe uma única linha assintótica máxima r passando por q. r é um segmento de reta (logo, uma geodésica) e $r \cap P = \emptyset$ (cf. Props. 1 e 2). Parametrizando r pelo comprimento de arco vê-se que r não é um segmento finito. Caso contrário, existe uma geodésica que não pode ser estendida para todos os valores do parâmetro, o contradiz a completitude de

S. Portanto, r é uma reta inteira $R(q)$, e como $r \cap P = \emptyset$, concluimos que $R(q) \subset U$. Segue-se que quando p é um outro ponto de U, $p \notin R(q)$, então $R(p) \cap R(q) = \emptyset$. Caso contrário, por um ponto de interseção passariam duas linhas assintóticas, o que contradiz a unicidade enunciada acima.

Por outro lado, se $q \in \operatorname{Fr} U = \operatorname{Fr} P$, então, (cf. Prop. 3) por q passa um único segmento de reta aberto que está contido em $\operatorname{Fr} U$. Pelo argumento anterior, este segmento pode ser estendido a uma reta inteira $R(q) \subset \operatorname{Fr} U$, e se $p \in \partial U$, $p \notin R(q)$, então $R(p) \cap R(q) = \emptyset$.

Evidentemente, como U é aberto, se $q \in U$ e $p \in \operatorname{Fr} U$, então $R(p) \cap R(q) = \emptyset$. Deste modo, por cada ponto de $S - \operatorname{int} P = U \cup \operatorname{Fr} U$ passa uma única reta contida em $S - \operatorname{int} P$, e duas tais retas ou coincidem ou não se intersectam, como havíamos afirmado. Se provarmos que estas retas são paralelas, poderemos concluir que $\operatorname{Fr} U$ $(= \operatorname{Fr} P)$ é formada por retas paralelas e que cada componente conexa do $\operatorname{int} P$ é um conjunto aberto de um plano, limitado por duas retas paralelas. Assim, por cada ponto $t \subset \operatorname{int} P$ passa uma única reta $R(t) \subset \operatorname{int} P$ paralela à direção comum. Segue-se que por cada ponto de S passa uma única geratriz e que as geratrizes são paralelas, isto é, S é um cilindro, como desejado.

Para provar que as retas passando pelos pontos de $U \cup \operatorname{Fr} U$ são paralelas, vamos proceder da seguinte maneira. Seja $q \in U \cup \operatorname{Fr} U$ e $p \in U$. Como S é conexa, existe um caminho $\alpha : [0, l] \to S$, com $\alpha(0) = p$, $\alpha(l) = q$. A aplicação $\exp_p : T_pS \to S$ é uma aplicação de recobrimento (Prop. 7, seção 5.6) e uma isometria local (corolário do Lema 2, seção 5.6). Seja $\tilde{\alpha} : [0, l] \to T_pS$ o levantamento de α, com origem em $0 \in T_pS$. Para cada $\tilde{\alpha}(t)$, com $\exp_p \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) \in U \cup \partial U$, seja r_t o levantamento de $R(\alpha(t))$ com origem em $\tilde{\alpha}(t)$. Como $\exp_p$ é uma isometria local, r_1 é uma reta em T_pS. Além disto, quando $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, $t_1, t_2 \in [0, l]$, as retas r_{t_1} e r_{t_2} são paralelas em T_pS. De fato, se $v \in r_{t_1} \cap r_{t_2}$, então

$$\exp_p(v) \in R(\alpha(t_1)) \cap R(\alpha(t_2)),$$

o que é uma contradição.

Até então não definimos $R(\alpha(t))$ quando $\alpha(t) \in \operatorname{int} P$. Isto será feito agora. Quando $\tilde{\alpha}(t)$ é tal que $\exp_p \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) \in \operatorname{int} P$, traçamos a reta passando por $\tilde{\alpha}(t)$ em T_pS que é paralela à direção comum que acabamos de obter. É claro que $\exp_p(r) \subset \operatorname{int} P$, e como $\exp_p(r)$ é uma geodésica, $\exp_p(r)$ é uma reta inteira contida em S. Deste modo, a reta $R(\alpha(t))$ fica definida para todo $t \in [0, l]$.

Vamos agora provar que as retas $R(\alpha(t))$, $t \in [0, l]$, são paralelas. De fato, pelo argumento usual de compacidade, é possível cobrir o intervalo $[0, l]$ com um número finito de intervalos abertos $I_1, \ldots, I_n$ tais que $\tilde{\alpha}(I_i)$ esteja contido em uma vizinhança V_i de $\alpha(t_i)$, $t_i \in I_i$, onde a restrição de $\exp_p$ seja uma isometria em V_i. Afirmamos agora que quando $t_1, t_2 \in I_i$ e $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ então $R(\alpha(t_1))$ é paralela a $R(\alpha(t_2))$.

Para ver isto, parametrize a vizinhança V_i de $\alpha(t_i)$ por $\mathbf{x}(u, v)$ de tal modo que as curvas $v =$ const. em S são as linhas $R(\alpha(t))$, e que as curvas $u =$ const. em S são as suas trajetórias ortogonais. Como as curvas $v =$ const. são linhas assintóticas, não é difícil mostrar (cf. a prova do Lema 1) que o parâmetro u pode ser escolhido de tal modo que ele mede o comprimento de arco ao longo de $v =$ const. (isto é, $E_v = 0$). Como $\exp_p\big| V_i$ é uma isometria, duas linhas assintóticas quaisquer, $v = v_1$, $v = v_2$, são equidistantes em $S \cap V_i$, pois os seus levantamentos são equidistantes em T_pS; logo $G_u = 0$. Como $< \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u >= E$ e $< \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v >= G$, concluimos de $E_v = G_u = 0$ que $\mathbf{x}_{uv} = 0$, isto é, que a direção $\mathbf{x}_u$ da linha assintótica $v =$ const. é constante em $\mathbb{R}^3$. Segue-se que duas linhas assintóticas R_1 e R_2 contidas em V_i têm segmentos abertos paralelos em $\mathbb{R}^3$, a saber, $R_1 \cap V_i$ e $R_2 \cap V_i$, e são portanto retas paralelas em $\mathbb{R}^3$. Isto prova a nossa afirmação.

Em particular, a reta $R(q)$ é paralela a $R(p)$. Se s é um outro ponto de $U \cup \operatorname{Fr} U$, então, pelo mesmo argumento, $R(s)$ é paralela a $R(p)$ e daí paralela a $R(q)$. Desta maneira, fica provado que todas as retas que passam por $U \cup \operatorname{Fr} U$ são paralelas, e isto conclui a demonstração.

Q.E.D.

5.9 Os Teoremas de Jacobi

Uma propriedade fundamental de uma geodésica γ (seção 4.6, Prop. 4) é que quando dois pontos p e q de γ estão suficientemente próximos, então γ minimiza o comprimento de arco entre p e q. Isto significa que o comprimento de arco de γ entre p e q é menor ou igual ao comprimento de arco de qualquer curva ligando p a q. Suponha agora que estamos percorrendo a geodésica γ a partir do ponto p. É natural perguntar até onde a geodésica γ minimiza o comprimento de arco. No caso da esfera, por exemplo, uma geodésica γ (um

meridiano) começando em um ponto p minimiza o comprimento de arco até o primeiro ponto conjugado de p com relação a γ (isto é, até o ponto antípoda de p). Passando o ponto antípoda de p, a geodésica deixa de ser minimizante, como podemos ver intuitivamente pelas considerações abaixo.

Uma geodésica ligando dois pontos p e q de uma esfera pode ser pensada como um barbante esticado sobre uma esfera e ligando os dois pontos em questão. Quando o arco $\widehat{pq}$ é menor do que um semi-meridiano e os pontos p e q estão fixos, não é possível mover o barbante sem aumentar o comprimento. Por outro lado, quando o arco $\widehat{pq}$ é maior do que um semi-meridiano, um pequeno deslocamento do barbante (com p e q fixos) "afrouxa" o barbante (ver Fig. 5.44).

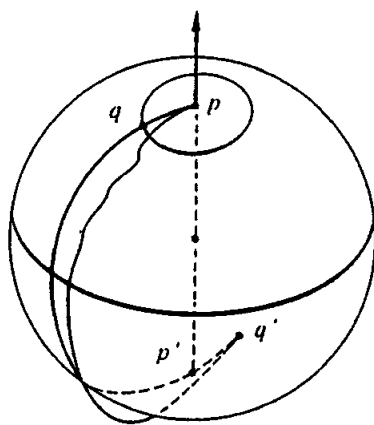



Figura 5-44

Em outras palavras, quando q está mais longe (ao longo de γ) do que o ponto antípoda de p, é possível obter curvas ligando p a q que são próximas ao arco geodésico $\widehat{pq}$ que são mais curtas do que este arco. Evidentemente, isto está longe de ser um argumento matemático.

Nesta seção vamos começar o estudo desta questão e provar um resultado, devido a Jacobi, que pode ser descrito a grosso modo da seguinte maneira. Uma geodésica γ começando em um ponto p minimiza o comprimento de arco, com relação a curvas "vizinhas" a γ, apenas até o "primeiro" ponto conjugado de p com relação a γ (enunciados mais precisos serão dados mais adiante ; ver Teoremas 1 e 2).

Por simplicidade, vamos supor que as superfícies nesta seção sejam completas e que as geodésicas estejam parametrizadas pelo comprimento de arco.

Precisamos de alguns resultados preliminares.

O lema seguinte mostra que a imagem por $\exp_p : T_pS \to S$ de um segmento de reta de T_pS com origem em $O \in T_pS$ (geodésica começando em p) é minimizante com relação às imagens por $\exp_p$ de curvas em T_pS ligando as extremidades deste segmento.

Mais precisamente, sejam

$$p \in S, \qquad u \in T_pS, \qquad l = |u| \neq 0,$$

e seja $\tilde{\gamma} : [0, l] \to T_pS$ a reta de T_pS dada por

$$\tilde{\gamma}(s) = sv, \qquad s \in [0, l], \qquad v = \frac{u}{|u|}.$$

Seja $\tilde{\alpha} : [0, l] \to T_pS$ uma curva parametrizada diferenciável de T_pS com $\tilde{\alpha}(0) = 0$, $\tilde{\alpha}(l) = u$, e $\tilde{\alpha}(s) \neq 0$ se $s \neq 0$. Além disto, sejam (Fig. 5.45)

$$\alpha(s) = \exp_p \tilde{\alpha}(s) \qquad \text{e} \qquad \gamma(s) = \exp_p \tilde{\gamma}(s).$$

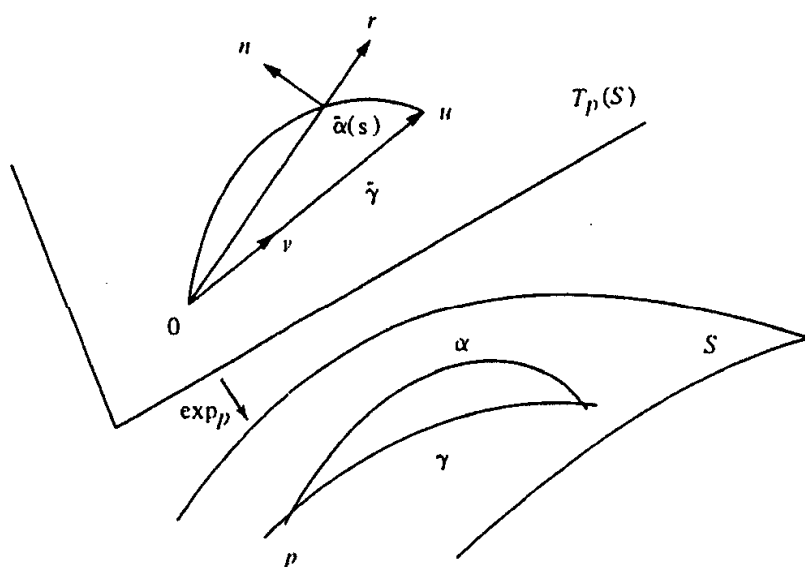



Figura 5-45

Lema 1. *Com a notação acima, temos*

1. $l(\alpha) \geq l(\gamma)$, *onde* $l(\ )$ *denota o comprimento de arco da curva correspondente.*

Além disto, se $\tilde{\alpha}(s)$ *não é um ponto crítico de* $\exp_p$, $s \in [0, l]$, *e se os traços de* α *e* γ *são distintos, então*

2. $l(\alpha) > l(\gamma)$.

Demonstração. Seja $\tilde{\alpha}(s)/|\tilde{\alpha}(s)| = r$, e seja n um vetor unitário de T_pS, com $\langle r, n\rangle = 0$. Na base $\{r, n\}$ de T_pS podemos escrever (Fig. 5.45)

$$\tilde{\alpha}'(s) = ar + bn,$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \langle \tilde{\alpha}', r\rangle, \\ b &= \langle \tilde{\alpha}', n\rangle. \end{aligned}$$

Por definição,

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= (d\exp_p)_{\tilde{\alpha}(s)}(\tilde{\alpha}'(s)) \\ &= a(d\exp_p)_{\tilde{\alpha}(s)}(r) + b(d\exp_p)_{\tilde{\alpha}(s)}(n). \end{aligned}$$

Portanto, utilizando o lema de Gauss (cf. seção 5.5, Lema 2), obtemos

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = a^2 + c^2,$$

onde

$$c^2 = b^2 \left|(d\exp_p)_{\tilde{\alpha}(s)}(n)\right|^2.$$

Segue-se que

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle \geq a^2.$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{ds}\langle \tilde{\alpha}(s), \tilde{\alpha}(s)\rangle^{1/2} = \frac{\langle \tilde{\alpha}'(s), \tilde{\alpha}(s)\rangle}{\langle \tilde{\alpha}(s), \tilde{\alpha}(s)\rangle^{1/2}} = \langle \tilde{\alpha}'(s), r\rangle = a.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= \int_0^l \langle \tilde{\alpha}'(s), \tilde{\alpha}'(s)\rangle^{1/2}\, ds \geq \int_0^l a\, ds \\ &= \int_0^l \frac{d}{ds}\langle \tilde{\alpha}(s), \tilde{\alpha}(s)\rangle^{1/2}\, ds = |\tilde{\alpha}(l)| = l = l(\gamma), \end{aligned}$$

e isto prova a parte 1.

Para provar a parte 2, vamos supor que $l(\alpha) = l(\gamma)$. Então

$$\int_0^l \langle \tilde{\alpha}'(s), \tilde{\alpha}'(s)\rangle^{1/2}\, ds = \int_0^l a\, ds,$$

e como

$$\langle \tilde{\alpha}'(s), \tilde{\alpha}'(s)\rangle^{1/2} \geq a,$$

a igualdade deve valer na expressão acima para todo $s \in [0, l]$. Portanto,

$$c = |b|\, \left|(d\exp_p)_{\tilde{\alpha}(s)}(n)\right| = 0.$$

Como $\tilde{\alpha}(s)$ não é um ponto crítico de $\exp_p$, concluimos que $b \equiv 0$. Segue-se que todas as retas tangentes à curva $\tilde{\alpha}(s)$ passam pela origem O de T_pS. Assim, $\tilde{\alpha}$ é uma reta de T_pS que passa por O. Como $\tilde{\alpha}(l) = \tilde{\gamma}(l)$, as retas $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\gamma}$ coincidem, contradizendo assim a hipótese de que os traços de α e γ são distintos. Segue-se desta contradição que $l(\alpha) > l(\gamma)$, o que prova a parte 2 e termina a demonstração do lema.

Q.E.D.

Estamos agora prontos para provar que se um arco geodésico não contém pontos conjugados, ele fornece um mínimo local para o comprimento de arco. Mais precisamente, temos

Teorema 1 (Jacobi). *Seja $\gamma : [0, l] \to S$, $\gamma(0) = p$, uma geodésica sem pontos conjugados; isto é, $\exp_p T_pS \to S$ é regular nos pontos da reta $\tilde{\gamma}(s) = s\gamma'(0)$ de T_pS, $s \in [0, l]$. Seja $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ uma variação própria de γ. Então*

1. *Existe um $\delta > 0$, $\delta \leq \varepsilon$, tal que se $t \in (-\delta, \delta)$,*

$$L(t) \geq L(0),$$

onde $L(t)$ é o comprimento da curva $h_t : [0, l] \to S$ que é dada por $h_t(s) = h(s, t)$.

2. *Se, além disto, o traço de h_t é distinto do traço de γ, $L(t) > L(0)$.*

Demonstração. A demonstração consiste essencialmente em mostrar que é possível, para todo $t \in (-\delta, \delta)$, levantar a curva h_t em uma curva $\tilde{h}_t$ de T_pS tal que $\tilde{h}_t(0) = 0$, $\tilde{h}_t(l) = \tilde{\gamma}(l)$ e então aplicar o Lema 1.

Como $\exp_p$ é regular nos pontos da reta $\tilde{\gamma}$ de T_pS, para cada $s \in [0, l]$ existe uma vizinhança U_s de $\tilde{\gamma}(s)$ tal que $\exp_p$ restrita a U_s é um difeomorfismo. A família $\{U_s\}$, $s \in [0, l]$ cobre $\tilde{\gamma}([0, l])$, e, por compacidade, é possível obter uma subfamília finita, digamos $U_1, \dots, U_n$ que ainda cobre $\tilde{\gamma}([0, l])$. Segue-se que podemos dividir o intervalo $[0, l]$ por pontos

$$0 = s_1 < s_2 < \cdots < s_n < s_{n+1} = l$$

de tal modo que $\tilde{\gamma}([s_i, s_{i+1}]) \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$. Como h é contínua e $[s_i, s_{i+1}]$ é compacto, existe um $\delta_i > 0$ tal que

$$h([s_i, s_{i+1}] \times (-\delta_i, \delta_i)) \subset \exp_p(U_i) = V_i.$$

Seja $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Para $t \in (-\delta, \delta)$, a curva $h_t : [0, l] \to S$ pode ser levantada em uma curva $\tilde{h}_t : [0, l] \to T_pS$, com origem $\tilde{h}_t(0) = 0$, da seguinte maneira. Seja $s \in [s_1, s_2]$. Então

$$\tilde{h}_t(s) = \exp_p^{-1}(h_t(s)),$$

onde $\exp_p^{-1}$ é a aplicação inversa da $\exp_p : U_1 \to V_1$. Aplicando a mesma técnica utilisada para os espaços de recobrimento (cf. Prop. 2, seção 5,6), podemos estender $\tilde{h}_t$ para todo $s \in [0, l]$ e obter $\tilde{h}_t(l) = \tilde{\gamma}(l)$.

Deste modo, concluimos que $\gamma(s) = \exp_p \tilde{\gamma}(s)$ e que $h_t(s) = \exp_p \tilde{h}_t(s)$, $t \in (-\delta, \delta)$, com $\tilde{h}_t(0) = 0$, $\tilde{h}_t(l) = \tilde{\gamma}(l)$. Aplicamos então o Lema 1 a esta situação e obtemos as conclusões desejadas.

Q.E.D.

Observação 1. Uma geodésica γ que não contenha pontos conjugados pode muito bem não ser minimizante em relação a curvas que não estão em uma vizinhança de γ. Uma tal situação acontece, por exemplo, no cilindro (que não tem pontos conjugados), como o leitor pode facilmente verificar observando uma geodésica fechada no cilindro.

Esta situação está relacionada com o fato de que os pontos conjugados nos informam apenas sobre a diferencial da aplicação exponencial, isto é, sobre a taxa de "espalhamento" das geodésicas vizinhas a uma geodésica dada. Por

outro lado, o comportamento global das geodésicas é controlado pela própria aplicação exponencial, que pode não ser globalmente injetiva mesmo quando a sua diferencial é não-singular em todos os pontos.

Um outro exemplo (desta vez simplesmente conexo) onde o mesmo fato acontece encontra-se no elipsóide, como o leitor pode verificar observando a figura do elipsóide na seção 5.5 (Fig. 5.19).

O estudo do lugar dos pontos para os quais as geodésicas começando em p deixam de ser globalmente minimizantes para o comprimento de arco (chamado o *lugar dos pontos mínimos* de p) é de importância fundamental em certos teoremas globais da geometria diferencial, mas não será tratado neste livro.

A seguir, provaremos que uma geodésica γ contendo pontos conjugados não é um *mínimo local* para o comprimento de arco; isto é, "arbitrariamente perto" de γ existe uma curva, ligando os seus pontos extremos, cujo comprimento é menor do que o de γ.

Precisaremos de alguns preliminares, o primeiro dos quais é uma extensão da definição de variação de uma geodésica para o caso onde admitimos curvas diferenciáveis por partes.

DEFINIÇÃO 1. *Seja $\gamma : [0,l] \to S$ uma geodésica de S e seja*

$$h : [0,l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$$

uma aplicação contínua com

$$h(s,0) = \gamma(s), \qquad s \in [0,l].$$

Dizemos que h é uma variação quebrada *de γ se existe uma partição*

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = l$$

de $[0,l]$ tal que

$$h : [s_i, s_{i+1}] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S, \; i = 0, 1, \dots, n-1,$$

é diferenciável. A variação quebrada é denominada própria *se $h(0,t) = \gamma(0)$, $h(l,t) = \gamma(l)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

As curvas $h_t(s)$, $s \in [0,l]$, da variação são agora diferenciávies por partes. O campo variacional $V(s) = (\partial h/\partial t)(s,0)$ é um campo de vetores diferenciável

por partes ao longo de γ; isto é, $V : [0, l] \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação contínua, diferenciável em cada $[s_i, s_{i+1}]$. A variação quebrada h é denominada *ortogonal* se $\langle V(s), \gamma'(s)\rangle = 0$, $s \in [0, l]$.

De um modo inteiramente análogo ao da Prop. 1 da seção 5.4, é possível provar que um campo de vetores V diferenciável por partes ao longo de γ dá origem a uma variação quebrada de γ, cujo campo variacional é V. Além disto, se

$$V(0) = V(l) = 0,$$

a variação pode ser escolhida de modo a ser própria.

Analogamente, a função $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ (o comprimento de arco de uma curva da variação) é definida como

$$\begin{aligned} L(t) &= \sum_0^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left|\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right| ds \\ &= \int_0^l \left|\frac{\partial h}{\partial s}(s,t)\right| ds. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1 da seção 5.4, cada parcela desta soma é diferenciável em uma vizinhança de 0. Portanto, L é diferenciável em $(-\delta, \delta)$ se δ é suficientemente pequeno.

A expressão da segunda variação do comprimento de arco ($L''(0)$), para variações quebradas ortogonais próprias, é exatamente a mesma da que foi obtida na Prop. 4 da seção 5.4, como pode-se verificar facilmente. Assim, se V é um campo de vetores diferenciável por partes ao longo de uma geodésica $\gamma : [0, l] \to S$ tal que

$$\langle V(s), \gamma'(s)\rangle = 0, \qquad s \in [0, l], \qquad \text{e} \qquad V(0) = V(l) = 0,$$

temos

$$L''_V(0) = \int_0^l \left(\left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DV}{ds} \right\rangle - K(s) \langle V(s), V(s)\rangle \right) ds.$$

Seja agora $\gamma : [0, l] \to S$ uma geodésica e denotemos por $\mathcal{V}$ o conjunto de campos de vetores diferenciáveis por partes ao longo de γ que são ortogonais a γ; isto é, se $V \in \mathcal{V}$, então $\langle V(s), \gamma'(s)\rangle = 0$ para todo $s \in [0, l]$. Observe que

$\mathcal{V}$, com as operações naturais de adição e multiplicação por um número real, forma um espaço vetorial. Defina uma aplicação $I : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to R$ por

$$I(V, W) = \int_0^l \left(\left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DW}{ds} \right\rangle - K(s) \langle V(s), W(s) \rangle \right) ds,$$

onde V, $W \in \mathcal{V}$.

É imediato verificar que I é uma aplicação bilinear simétrica; isto é, I é linear em cada variável e $I(V, W) = I(W, V)$. Portanto, I determina uma forma quadrática em $\mathcal{V}$, dada por $I(V, V)$. Esta forma quadrática é chamada a *forma do índice* de γ.

Observação 2. A forma do índice de uma geodésica foi intoduzida por M. Morse, que provou o seguinte resultado. Seja $\gamma(s_0)$ um ponto conjugado de $\gamma(0) = p$, relativo à geodésica $\gamma : [0, l] \to S$, $s_0 \in [0, l]$. A *multiplicidade* do ponto conjugado $\gamma(s_0)$ é a dimensão do maior subespaço E de T_pS tal que $(d\exp_p)_{\gamma(s_0)}(u) = 0$ para todo $u \in E$. O *índice* da forma quadrática $Q : E \to \mathbb{R}$ em um espaço vetorial E é a dimensão máxima de um subespaço L de E tal que $Q(u) < 0$, $u \in L$. Com esta terminologia, o teorema do índice de Morse é enunciado da seguinte maneira: *Seja $\gamma : [0, l] \to S$ uma geodésica. Então o índice da forma quadrática I de γ é finito, e é igual ao número de pontos conjugados a $\gamma(0)$ em $\gamma([0, l])$, cada um deles contado com a sua multiplicidade.* Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em J. Milnor, Morse Theory, Annals of Mathematics Studies, Vol. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

Para os nossos propósitos precisamos apenas do lema abaixo.

Lema 2. *Seja $V \in \mathcal{V}$ um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $\gamma : [0, l] \to S$ e $W \in \mathcal{V}$. Então*

$$I(V, W) = \left\langle \frac{DV}{ds}(l), W(l) \right\rangle - \left\langle \frac{DV}{ds}(0), W(0) \right\rangle.$$

Demonstração. Observando que

$$\frac{d}{ds} \left\langle \frac{DV}{ds}, W \right\rangle = \left\langle \frac{D^2V}{ds^2}, W \right\rangle + \left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DW}{ds} \right\rangle,$$

podemos escrever I na forma (cf. Observação 4, seção 5.4)

$$I(V,W) = \left\langle \frac{DV}{ds}, W \right\rangle \Bigg|_0^l - \int_0^l \left(\left\langle \frac{D^2V}{ds^2} + K(s)V(s), W(s) \right\rangle \right) ds.$$

Como V é um campo de Jacobi ortogonal a γ, concluimos que o integrando do segundo termo é zero. Portanto,

$$I(V,W) = \left\langle \frac{DV}{ds}(l), W(l) \right\rangle - \left\langle \frac{DV}{ds}(0), W(0) \right\rangle.$$

Q.E.D.

Estamos agora prontos para provar

Teorema 2 (Jacobi). *Sejam* $\gamma : [0,l] \to S$ *uma geodésica de* S *e* $\gamma(s_0) \in \gamma((0,l))$ *um ponto conjugado a* $\gamma(0) = p$ *em relação a* γ*, então existe uma variação quebrada própria* $h : [0,l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ *de* γ *e um número real* $\delta > 0$, $\delta \leq \varepsilon$, *tal que se* $t \in (-\delta, \delta)$ *temos* $L(t) < L(0)$.

Demonstração. Como $\gamma(s_0)$ é conjugado a p em relação a γ, existe um campo de Jacobi ao longo de γ, não identicamente nulo, com $J(0) = J(s_0) = 0$. Pela Prop. 4 da seção 5.5, segue-se que $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, $s \in [0,l]$. Além disto, $(DJ/ds)(s_0) \neq 0$; caso contrário, $J(s) \equiv 0$.

Sejam agora $\bar{Z}$ um campo de vetores paralelo ao longo de γ, com $\bar{Z}(s_0) = -(DJ/ds)(s_0)$, e $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com $f(0) = f(l) = 0$, $f(s_0) = 1$. Defina $Z(s) = f(s)\bar{Z}(s)$, $s \in [0,l]$.

Para cada número real $\eta > 0$, defina um campo de vetores Y_η ao longo de γ por

$$\begin{aligned} Y_\eta &= J(s) + \eta Z(s), \qquad && s \in [0, s_0], \\ &= \eta Z(s), && s \in [s_0, l]. \end{aligned}$$

Y_η é um campo de vetores diferenciável por partes ortogonal a γ. Como $Y_\eta(0) = Y_\eta(l) = 0$, ele dá origem a uma variação quebrada, própria e ortogonal de γ. Vamos calcular $L''(0) = I(Y_\eta, Y_\eta)$.

Para um segmento de geodésica entre 0 e s_0, utilizamos a bilinearidade de I e o Lema 2 para obter

$$\begin{aligned} I_{s_0}(Y_\eta, Y_\eta) &= I_{s_0}(J + \eta Z, J + \eta Z) \\ &= I_{s_0}(J, J) + 2\eta I_{s_0}(J, Z) + \eta^2 I_{s_0}(Z, Z) \\ &= 2\eta \left\langle \frac{DJ}{ds}(s_0), Z(s_0) \right\rangle + \eta^2 I_{s_0}(Z, Z) \\ &= -2\eta \left| \frac{DJ}{ds}(s_0) \right|^2 + \eta^2 I_{s_0}(Z, Z), \end{aligned}$$

onde I_{s_0} indica que a integral correspondente é tomada entre 0 e s_0. Usando I para denotar a integral entre 0 e l e notando que a integral é aditiva, temos

$$I(Y_\eta, Y_\eta) = -2\eta \left| \frac{DJ}{ds}(s_0) \right|^2 + \eta^2 I(Z, Z).$$

Observe agora que se $\eta = \eta_0$ é suficientemente pequeno, a expressão acima é negativa. Portanto, tomando Y_{η_0}, obtemos uma variação quebrada própria, com $L''(0) < 0$. Como $L'(0) = 0$, isto significa que 0 é um ponto de máximo local para L; isto é, existe $\delta > 0$ tal que se $t \in (-\delta, \delta)$, $t \neq 0$, então $L(t) < L(0)$.

Q.E.D.

Observação 3. O teorema de Jacobi é um caso particular do teorema do índice de Morse, citado na Observação 2. Em verdade, o ponto crucial da demonstração do teorema do índice é essencialmente uma extensão das idéias apresentadas na demonstração do Teorema 2.

Exercícios

1. (*Teorema de Bonnet.*) Seja S uma superfície completa com curvatura Gaussiana $K \geq \delta > 0$. Pelo exercício 5 da seção 5.5, toda geodésica $\gamma[0, \infty) \to S$ tem um ponto conjugado a $\gamma(0)$ no intervalo $(0, \pi/\sqrt{\delta}]$. Use os teoremas de Jacobi para mostrar que isto implica que S é compacta e que o diâmetro $\rho(S) \leq \pi/\sqrt{\delta}$ (*isto fornece uma nova prova do teorema de Bonnet da seção* 5.4).

2. (*Linhas em superfícies completas*) Dizemos que uma geodésica $\gamma : (-\infty, \infty) \to S$ é uma *linha* se o comprimento de γ realiza a distância (intrínseca) entre quaisquer dois de seus pontos.

a. Mostre que por cada ponto de um cilindro completo $x^2 + y^2 = 1$ passa uma linha.

b. Suponha que S seja uma superfíce completa com curvatura Gaussiana $K > 0$. Seja $\gamma(-\infty, \infty) \to S$ uma geodésica em S e $J(s)$ um campo de Jacobi ao longo de γ dado por$\langle J(0), \gamma'(0)\rangle = 0$, $|J(0)| = 1$, $J'(0) = 0$. Escolha uma base ortonormal $\{e_1(0) = \gamma'(0),\ e_2(0)\}$ em $T_{\gamma(0)}S$ e estenda-a pelo transporte paralelo ao longo de γ para obter uma base $\{e_1(s), e_2(s)\}$ em cada $T_{\gamma(s)}S$. Mostre que $J(s) = u(s)e_2(s)$ para alguma função $u(s)$ e que a equação de Jacobi para J é

$$u'' + Ku = 0, \qquad u(0) = 1, \qquad u'(0) = 0. \qquad (*)$$

c. Estenda à presente situação o teorema de comparação da parte **b** do Exercício 3, seção 5.5. Use o fato de que $K > 0$ para mostrar que é possível escolher $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que

$$u(\varepsilon) > 0, \qquad u(-\varepsilon) > 0, \qquad u'(\varepsilon) < 0, \qquad u'(-\varepsilon) > 0,$$

onde $u(s)$ é uma solução de $(*)$. Compare $(*)$ com

$$v''(s) = 0, \qquad v(\varepsilon) = u(\varepsilon), \qquad v'(\varepsilon) = u'(\varepsilon) \qquad \text{para } s \in [\varepsilon, \infty)$$

e com

$$w''(s) = 0,\ w(-\varepsilon) = u(-\varepsilon),\ w'(-\varepsilon) = u'(-\varepsilon) \text{ para } s \in [-\infty, -\varepsilon]$$

para concluir que se s_0 é suficientemente grande, então $J(s)$ tem dois zeros no intervalo $(-s_0, s_0)$.

d. Use o que foi provado acima para provar que *uma superfíce completa com curvatura Gaussiana positiva não contém linhas.*

5.10 Superfícies Abstratas; Outras Generalizações

Na seção 5.11, vamos provar um teorema, devido a Hilbert, que afirma que não existe uma superfície regular completa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante negativa.

Em verdade, o teorema é um pouco mais forte. Para entender o enunciado correto e a demonstração do teorema de Hilbert, convém introduzir a noção de superfície geométrica abstrata que emerge das seguintes considerações.

Até agora as superfícies de que tratamos são subconjuntos S de $\mathbb{R}^3$ nos quais faz sentido falar em funções diferenciá veis. Definimos um plano tangente T_pS em cada ponto $p \in S$ e desenvolvemos a geometria diferencial em torno de p como o estudo da variação de T_pS. Observamos, no entanto, que todas as noções da geometria intrínseca (curvatura Gaussiana, geodésicas, completitude, etc.) só dependem da escolha de um produto interno em cada T_pS. Se formos capazes de definir abstratamente (isto é, sem referência ao $\mathbb{R}^3$) um conjunto S no qual faça sentido falar de funções diferenciáveis, poderemos possivelmente estender a geometria intrínseca a tais conjuntos.

A definição abaixo é um desenvolvimento de nossa experiência no Capítulo 2. Historicamente, levou um longo tempo para aparecer, provavelmente devido ao fato de que o papel fundamental desempenhado pela mudança de parâmetros na definição de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ não era muito bem entendido.

DEFINIÇÃO 1. *Uma* superfície abstrata *(variedade diferenciável de dimensão 2) é um conjunto S munido de uma família de aplicações bijetivas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \to S$ de conjuntos abertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ em S tal que*

1. $\cup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = S$.

2. *Para cada par α, β com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, temos que $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$, $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^2$, e $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$, $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$ são aplicações diferenciáveis* (Fig. 5.46).

O par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ com $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou sistema de coordenadas) de S em torno de p. Dizemos que $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é uma *vizinhança coordenada*, e se $q = \mathbf{x}_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) \in S$, que (u_α, v_α) são as *coordenadas* de q neste sistema de coordenadas. A família $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$ é chamada uma *estrutura diferenciável* em S.

Segue-se imediatamente da condição 2 que a "mudança de parâmetros"

$$\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha : \mathbf{x}_\alpha^{-1}(W) \to \mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$$

é um difeomorfismo.

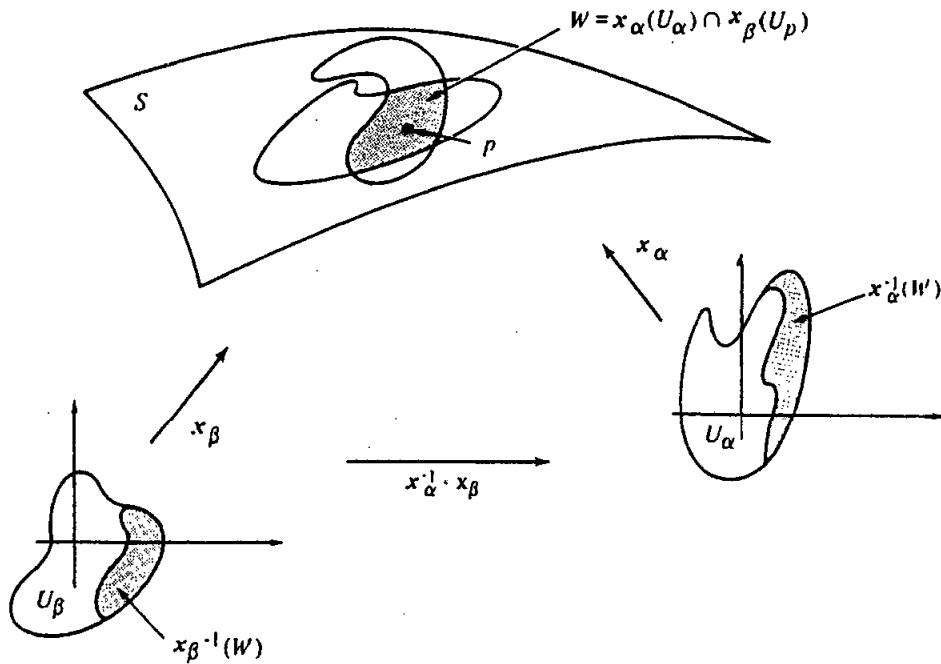



Figura 5-46

Observação 1. Convém às vezes acrescentar um axioma à Def. 1 e dizer que a estrutura diferenciável deve ser máxima em relação às condições 1 e 2. Isto significa que a família $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$ não está contida propriamente em nenhuma outra família de vizinhanças coordenadas satisfazendo as condições 1 e 2 da Definição 1.

Uma comparação da definição acima com a definição de uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ (seção 2.2, Def. 1) mostra que o ponto fundamental é incluir a propriedade da mudança de parâmetros (que é um teorema para superfícies em $\mathbb{R}^3$, cf. seção 2.3, Prop. 1) na definição de uma superfície abstrata. Como esta foi a propriedade que nos permitiu definir funções diferenciáveis em superfícies em $\mathbb{R}^3$ (seção 2.3), é natural propor a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2. *Sejam S_1 e S_2 superfícies abstratas. Uma aplicação $\varphi : S_1 \to S_2$ é* diferenciável *em $p \in S_1$ se dada uma parametrização $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$ em torno de $\varphi(p)$ existe uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S_1$ em torno de p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ e a aplicação*

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$. φ é diferenciável *em S_1 se é diferenciável em todo $p \in S_1$* (Fig. 5.47).

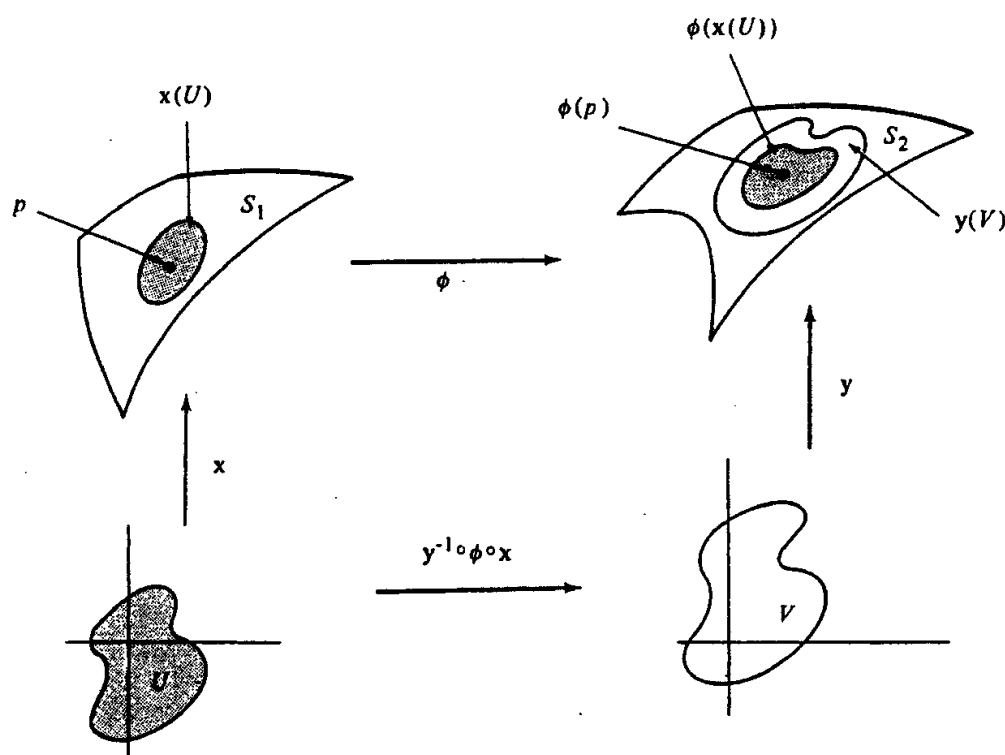



Figura 5-47

É claro, pela condição 2, que esta definição não depende das escolhas das parametrizações. A aplicação (1) é chamada a *expressão* de φ nas parametrizações $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Assim, faz sentido falar de aplicações diferenciáveis em superfícies abstratas, e já demos o primeiro passo rumo a uma generalização da geometria intrínseca.

Exemplo 1. Seja $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ a esfera unitária e seja $A: S^2 \to S^2$ a aplicação antípoda; i.e. $A(x,y,z) = (-x,-y,-z)$. Seja P^2 o conjunto obtido de S^2 identificando p com $A(p)$ e denote por $\pi: S^2 \to P^2$ a aplicação natural $\pi(p) = \{p, A(p)\}$. Cubra S^2 com parametrizações $\mathbf{x}_\alpha: U_\alpha \to S^2$ tais que $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap A \circ \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = \emptyset$. Como S^2 é uma superfície regular e A é um difeomorfismo, segue-se que P^2 munido da família $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha \circ \pi\}$ é uma superfície abstrata, que denotaremos também por P^2. P^2 é chamado de *plano projetivo real.*

Exemplo 2. Seja $T \subset \mathbb{R}^3$ um toro de revolução (seção 2.2, Exemplo 4) com centro em $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ e seja $A: T \to T$ definida por $A(x,y,z) = (-x,-y,-z)$ (Fig. 5.48). Seja K o espaço quociente de T pela relação de

equivalência $p \sim A(p)$ e denote por $\pi : T \to K$ a aplicação $\pi(p) = \{p, A(p)\}$. Cubra T com parametrizações $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \to T$ tais que $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap A \circ \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = \emptyset$. Como antes, é possível mostrar que K com a família $\{U_\alpha, \pi \circ \mathbf{x}_\alpha\}$ é uma superfície abstrata, que é chamada de *garrafa de Klein*.

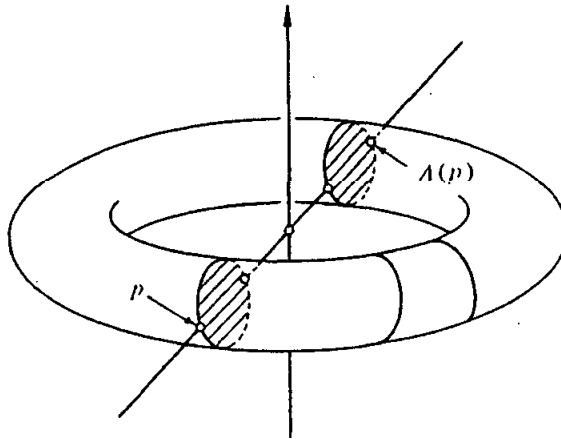



Figura 5-48

Precisamos agora associar um plano tangente a cada ponto de uma superfície abstrata S. Novamente convém utilizar a nossa experiência com superfícies em $\mathbb{R}^3$ (seção 2.4). Neste caso, o plano tangente é o conjunto de vetores tangentes em um ponto, sendo um vetor tangente em um ponto definido como a velocidade neste ponto de uma curva na superfície. Assim, precisamos definir o que é o vetor tangente de uma curva em uma superfície abstrata. Como não podemos contar com o $\mathbb{R}^3$, que é onde vivem os vetores tangentes às curvas, é necessário buscar uma propriedade característica de tais vetores tangentes que não dependa do $\mathbb{R}^3$.

As seguintes considerações irão motivar a definição que será dada abaixo. Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\alpha(0) = p$. Escreva $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, e $\alpha'(0) = (u'(0), v'(0)) = w$. Seja f uma função diferenciável definida em uma vizinhança de p. Podemos restringir f a α e escrever a derivada direcional de f com relação a w da seguinte maneira:

$$\left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\right|_{t=0} = \left\{u'(0)\frac{\partial}{\partial u} + v'(0)\frac{\partial}{\partial v}\right\} f.$$

Assim, a derivada direcional na direção do vetor w é um operador sobre funções diferenciáveis que depende apenas de w. Esta é a propriedade característica dos vetores tangentes que estávamos buscando.

DEFINIÇÃO 3. *Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ é chamada uma* curva *em S. Suponha que $\alpha(0) = p$ e seja D o conjunto de funções em S que são diferenciáveis em p. O* vetor tangente *à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : D \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)(f) = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \qquad f \in D.$$

Um vetor tangente *em um ponto $p \in S$ é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ com $\alpha(0) = p$.*

Escolhendo uma parametrização $\mathbf{x} : U \to S$ em torno de $p = \mathbf{x}(0,0)$ podemos expressar a função f e a curva α em $\mathbf{x}$ por $f(u,v)$ e $(u(t), v(t))$, respectivamente. Portanto,

$$\begin{aligned}\alpha'(0)(f) &= \left.\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}(f(u(t), v(t)))\right|_{t=0} \\ &= u'(0)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0 + v'(0)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0 = \left\{u'(0)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_0 + v'(0)\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_0\right\}(f).\end{aligned}$$

Isto sugere, dadas coordenadas (u, v) em torno de p, que denotemos por $(\partial/\partial u)_0$ o vetor tangente em p que aplica a função f em $(\partial f/\partial u)_0$; um significado análogo será dado ao símbolo $(\partial/\partial v)_0$. Observamos que $(\partial/\partial u)_0$, $(\partial/\partial v)_0$ podem ser interpretados como vetores tangentes em p das "curvas coordenadas"

$$u \to \mathbf{x}(u, 0), \qquad v \to \mathbf{x}(0, v),$$

respectivamente (Fig. 5.49).

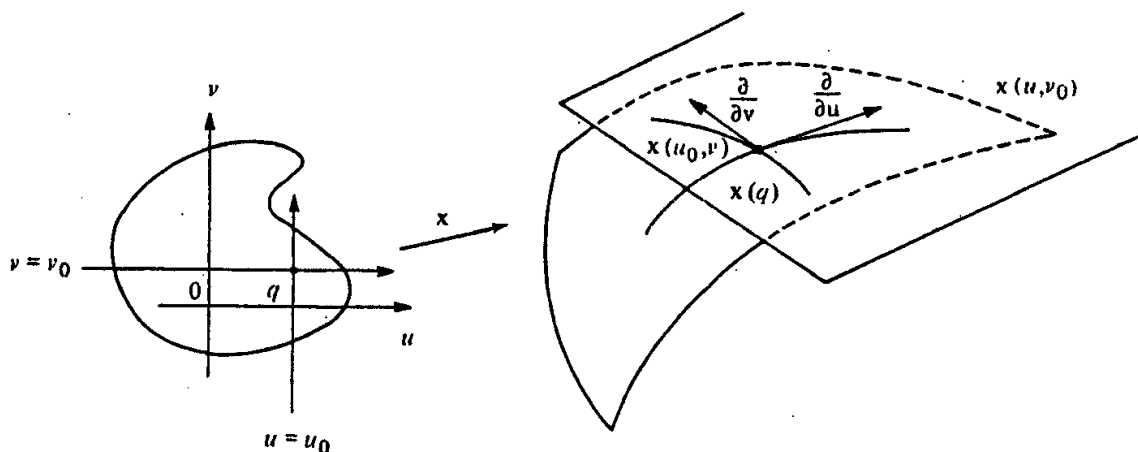



Figura 5-49

Segue-se do que foi visto acima que o conjunto de vetores tangentes em p, com as operações usuais para funções, é um espaço vetorial bi-dimensional T_pS chamado de *espaço tangente* de S em p. Também é claro que a escolha de uma parametrização $\mathbf{x} : U \to S$ em torno de p determina uma *base associada* $\{(\partial/\partial u)_q, (\partial/\partial v)_q\}$ de T_qS para todo $q \in \mathbf{x}(U)$.

Com a noção de espaço tangente, podemos estender às superfícies abstratas a definição de diferencial.

DEFINIÇÃO 4. *Sejam S_1 e S_2 superfícies abstratas e seja $\varphi : S_1 \to S_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in S_1$ e cada $w \in T_pS_1$, considere a curva diferenciável $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \to S_1$, com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pS_1 \to T_{\varphi(p)}S_2$ dada por $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear bem definida, chamada de* diferencial *de φ em p.*

A demonstração de que $d\varphi_p$ está bem definida e é linear é idêntica à da Prop. 2 na seção 2.4.

Estamos agora prontos para dar o passo final em nossa generalização da geometria intrínseca.

DEFINIÇÃO 5. *Uma* superfície geométrica *(Variedade Riemanniana de dimensão 2) é uma superfíce abstrata S munida de uma escolha de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ em cada T_pS, $p \in S$, que varia diferenciavelmente com p no seguinte sentido. Para alguma (logo, para todas) parametrização $\mathbf{x} : U \to S$ em torno de p, as funções*

$$E(u,v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle, \qquad F(u,v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle, \qquad G(u,v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$$

são funções diferenciáveis em U. O produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ é freqüentemente chamado uma métrica *(*Riemanniana*) em S.*

Agora é simples estender às superfícies geométricas as noções da geometria intrínseca. Com efeito, a partir das funções E, F, G definimos os símbolos de Christoffel para S pelo sistema 2 da seção 4.3. Como todas as noções da geometria intrínseca foram definidas em termos dos símbolos de Christoffel, elas podem agora ser definidas em S.

Assim, derivadas covariantes de campos de vetores ao longo de curvas são dados pela Eq. (1) da seção 4.4. A existência do transporte paralelo segue-se

da Prop. 2 da seção 4.4. e uma geodésica é uma curva tal que o campo de seus vetores tangentes tem derivada covariante nula. A curvatura Gaussiana tanto pode ser definida pela Eq. (5) da seção 4.3 como em termos do transporte paralelo, como é feito na seção 4.5.

As considerações a seguir mostram que esta nova noção abrange alguns objetos novos e interessantes. Começamos com um exemplo relacionado com o teorema de Hilbert.

Exemplo 3. Seja $S = \mathbb{R}^2$ um plano com coordenads (u, v) e defina um produto interno em cada ponto $q = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ colocando

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_q &= E = 1, \qquad \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_q = F = 0, \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_q &= G = e^{2u}. \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^2$ munido deste produto interno é uma superfície geométrica H chamada de *plano hiperbólico*. A geometria de H é diferente da geometria usual de $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, a curvatura de H é (seção 4.3, Exercício 1)

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} = -\frac{1}{2e^u} \left(\frac{2e^{2u}}{e^u} \right)_u = -1.$$

Em verdade, a geometria de H é um modelo exato para a geometria não-euclidiana de Lobachevski, na qual todos os axiomas de Euclides, exceto o axioma das paralelas, são válidos (cf. seção 4.5). Para tornar isto claro, vamos calcular as geodésicas de H.

Se olharmos para as equações diferenciais para as geodésicas quando $E = 1$, $F = 0$ (seção 4.6, Exercício 2), veremos imediatamente que as curvas $v =$ const. são geodésicas. Para encontrar as outras, convém definir uma aplicação

$$\phi : H \to R^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$$

por $\phi(u, v) = (v, e^{-u})$. É fácil ver que ϕ é diferenciável e, como $y > 0$, que tem uma inversa diferenciável. Assim, ϕ é um difeomorfismo, e podemos indtrouzir um produto interno em R^2_+ fazendo

$$\langle d\phi(w_1), d\phi(w_2) \rangle_{\phi(q)} = \langle w_1, w_2 \rangle_q .$$

Para calcular este produto interno observe que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = -e^u \frac{\partial}{\partial u},$$

logo,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = e^{2u} = \frac{1}{y^2}, \qquad \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0, \qquad \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{y^2}.$$

R^2_+ com este produto interno é isométrico a H, e é, às vezes, chamado de *semi-plano de Poincaré.*

Para determinar as geodésicas de H, trabalhamos com o semi-plano de Poincaré e efetuamos mais duas mudanças de coordenadas.

Primeiro, fixe um ponto $(x_0, 0)$ e faça (Fig. 5.50)

$$x - x_0 = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta,$$

$0 < \theta < \pi$, $0 < \rho < +\infty$. Isto é um difeomorfismo de R^2_+ sobre si mesmo, e

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \rho} \right\rangle = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta}, \qquad \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = 0, \qquad \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

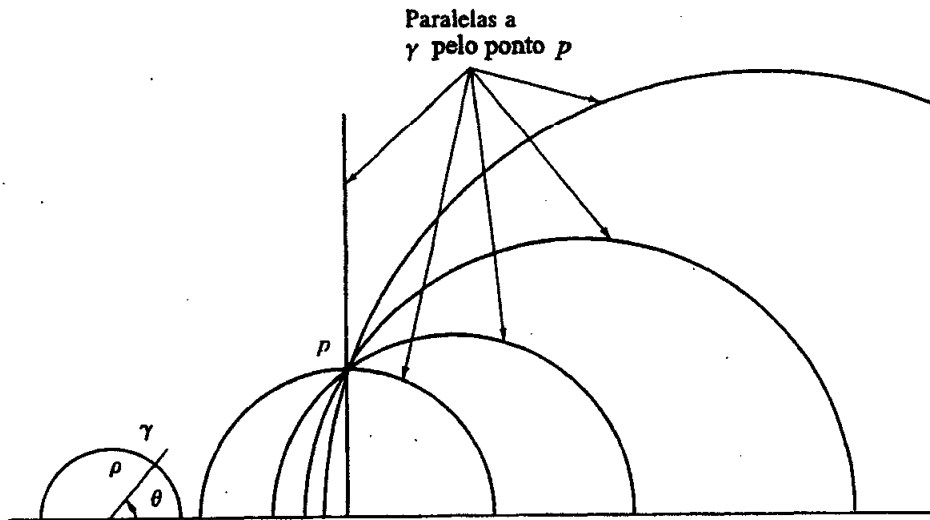



Figura 5-50

Em seguida, considere o difeomorfismo de R^2_+ dado por (queremos mudar θ por um parâmetro que meça o comprimento de arco ao longo de $\rho =$ const.)

$$\rho_1 = \rho, \qquad \theta_1 = \int_0^\theta \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta,$$

o que nos dá

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \rho_1}, \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right\rangle = \frac{1}{\rho_1^2 \operatorname{sen}^2 \theta}, \qquad \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right\rangle = 0, \qquad \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right\rangle = 1.$$

Olhando novamente para as equações diferenciais das geodésicas ($F = 0$, $G = 1$), vemos que $\rho_1 = \rho =$ const. são geodésicas. (Uma outra maneira de encontrar as geodésicas de R^2_+ é dada no Exercício 8.)

Juntando as nossas observações, concluímos que as retas e os semi-círculos que são perpendiculares ao eixo $Oy > 0$ são geodésicas do semi-plano de Poincaré R^2_+. Estas são todas as geodésicas de R^2_+, pois por cada ponto $q \in R^2_+$ e cada direção partindo de q passa ou um círculo tangente a esta direção e normal ao eixo $Oy = 0$, ou uma reta vertical (quando a direção é vertical).

A superfície geométrica R^2_+ é completa; isto é, as geodésicas podem ser definidas para todos os valores do parâmetro. A prova deste fato será deixada como exercício (Exercício 7; ver também o Exercício 6).

Agora fica fácil ver, se definirmos as retas de R^2_+ como as suas geodésicas, que todos os axiomas de Euclides menos o axioma das paralelas são válidos nesta geometria. O axioma das paralelas no plano Euclidiano P afirma que por um ponto que não pertença a uma reta $r \subset P$ pode-se traçar uma única reta $r' \subset P$ que não intersecta r. Em verdade, em R^2_+, a partir de um ponto que não pertença a uma geodésica γ podemos traçar uma infinidade de geodésicas que não intersectam γ.

Levanta-se então a questão se uma tal superfície pode ou não ser encontrada como uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$. O contexto natural para esta questão é a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 6. *Uma aplicação diferenciável $\varphi : S \to \mathbb{R}^3$ de uma superfície abstrata S em $\mathbb{R}^3$ é uma* imersão *se a diferencial $d\varphi_p : T_pS \to T_p\mathbb{R}^3$ é injetiva. Se, além disto, S tiver uma métrica $\langle\ ,\ \rangle$ e*

$$\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = \langle v, w \rangle_p, \qquad v, w \in T_pS,$$

dizemos que φ é uma imersão isométrica.

Note que o primeiro produto interno na relação acima é o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$, enquanto que o segundo é a métrica Riemanniana dada sobre S.

Isto significa que para uma imersão isométrica a métrica "induzida" pelo $\mathbb{R}^3$ sobre S coincide com a métrica dada sobre S.

O teorema de Hilbert, que será provado na seção 5.11, afirma que não existe uma imersão isométrica em $\mathbb{R}^3$ de todo o plano hiperbólico. Em particular, não se pode encontrar um modelo da geometria de Lobachevski como uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.

Em verdade, não precisamos nos restringir ao $\mathbb{R}^3$. A definição acima para uma imersão isométrica faz sentido quando trocamos $\mathbb{R}^3$ por $\mathbb{R}^4$, ou mesmo por um $\mathbb{R}^n$ arbitrário. Assim, podemos generalizar a nossa questão inicial, e perguntar: *Para quais valores de n existe uma imersão isométrica de todo o plano hiperbólico em $\mathbb{R}^n$?* O teorema de Hilbert afirma que $n \geq 4$. Até onde sabemos, o caso $n = 4$ ainda está em aberto.

Assim, a introdução de superfícies abstratas nos traz novos objetos e lança uma nova luz sobre questões importantes.

No restante desta seção, vamos explorar com mais detalhes algumas das idéias que acabamos de introduzir e iremos mostrar como elas nos levam naturalmente a outras generalizações importantes. Esta parte não é necessária para a compreensão da próxima seção.

Vamos olhar mais alguns exemplos.

Exemplo 4. Seja $\mathbb{R}^2$ um plano com coordenadas (x, y) e $T_{m,n} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação (translação) $T_{m,n}(x, y) = (x + m, y + n)$, onde m e n são inteiros. Defina uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$ por $(x, y) \sim (x_1, y_1)$ se existem inteiros m, n tais que $T_{m,n}(x, y) = (x_1, y_1)$. Seja T o espaço quociente de $\mathbb{R}^2$ por esta relação de equivalência, e seja $\pi : \mathbb{R}^2 \to T$ a projeção natural $\pi(x, y) = \{T_{m,n}(x, y);$ para todos m, n inteiros$\}$. Assim, em cada quadrado unitário aberto cujos vértices tenham coordenadas inteiras, existe apenas um representante de um elemento de T, e T pode ser pensado como um quadrado fechado com os lados opostos identificados (Ver Fig. 5.51. Note que todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ denotados por x representam o mesmo ponto p em T).

Seja $i_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma família de parametrizações de $\mathbb{R}^2$, onde i_α é a aplicação identidade, tal que $U_\alpha \cap T_{m,n}(U_\alpha) = \emptyset$ para quaisquer m, n inteiros. Como $T_{m,n}$ é um difeomorfismo, é fácil verificar que a família $(U_\alpha, \pi \circ i_\alpha)$ é uma estrutura diferenciável para T. T é chamado um *toro* (diferenciável). Segue-se da própria definição de estrutura diferenciável em T que $\pi : \mathbb{R}^2 \to T$ é uma aplicação diferenciável e um difeomorfismo local (a construção feita na Fig. 5.51 indica que T é difeomorfo ao toro usual em $\mathbb{R}^3$).

Note agora que $T_{m,n}$ é uma isometria de $\mathbb{R}^2$ e introduza uma estrutura geométrica (Riemanniana) em T da seguinte maneira. Sejam $p \in T$ e $v \in T_pT$. Sejam q_1, $q_2 \in \mathbb{R}^2$ e $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ tais que $\pi(q_1) = \pi(q_2) = p$ e $d\pi_{q_1}(w_1) = d\pi_{q_2}(w_2) = v$. Então $q_1 \sim q_2$; logo, existe $T_{m,n}$ tal que $T_{m,n}(q_1) = q_2$, $d(T_{m,n})_{q_1}(w_1) = w_2$. Como $T_{m,n}$ é uma isometria, $|w_1| = |w_2|$. Agora, defina o comprimento de v em T_pT por $|v| = |d\pi_q(w_1)| = |w_1|$. Pelo que acabamos de ver, isto está bem definido. Evidentemente, tal definição dá origem a um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ em T_pT para cada $p \in T$. Como este é essencialmente o produto interno usual do $\mathbb{R}^2$ e π é um difeomorfismo local, $\langle\ ,\ \rangle_p$ varia diferenciavelmente com p.

Observe que os coeficientes da primeira forma fundamental de T, em qualquer uma das parametrizações da família $\{U_\alpha, \pi \circ i_\alpha\}$, são $E = G = 1$, $F = 0$. Assim, este toro se comporta localmente como um espaço euclidiano. Por exemplo, a sua curvatura Gaussiana é identicamente nula (cf. Exercício 1, seção 4.3). Isto justifica o nome *toro plano*, que usualmente é dado a T munido do produto interno que acabamos de descrever.

Evidentemente o toro plano não pode ser isometricamente imerso em $\mathbb{R}^3$, pois, por compacidade, ele teria um ponto com curvatura positiva (cf. Exercício 16, seção 3.3, ou Lema 1, seção 5.2). No entanto, ele pode ser imerso isometricamente em $\mathbb{R}^4$.

De fato, seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dado por

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi}(\cos 2\pi x,\ \operatorname{sen} 2\pi x, \cos 2\pi y,\ \operatorname{sen} 2\pi y).$$

Como $F(x + m, y + n) = F(x, y)$ para quaisquer m, n inteiros, podemos definir uma aplicação $\varphi : T \to \mathbb{R}^4$ por $\varphi(p) = F(q)$, onde $q \in \pi^{-1}(q)$. É claro que $\varphi \circ \pi = F$ e, como $\pi : \mathbb{R}^2 \to T$ é um difeomorfismo local, φ é diferenciável. Além disto, o posto de $d\varphi$ é igual ao posto de dF que, por sua vez, verifica-se facilmente, é igual a 2. Assim, φ é uma imersão. Para ver que a imersão é isométrica, observamos primeiro que se $e_1 = (1, 0)$ $e_2 = (0, 1)$ são os vetores da base canônica em $\mathbb{R}^2$, os vetores $d\pi_q(e_1) = f_1$, $d\pi_q(e_2) = f_2$, $q \in \mathbb{R}^2$, formam uma base para $T_{\pi(q)}T$. Pela definição do produto interno em T, $\langle f_i, f_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$, $i, j = 1, 2$. Em seguida, calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= dF(e_1) = (-\operatorname{sen} 2\pi x, \cos 2\pi x, 0, 0), \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= dF(e_2) = (0, 0, -\operatorname{sen} 2\pi y, \cos 2\pi y), \end{aligned}$$

e obtemos que

$$\langle dF(e_i), dF(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \langle f_i, f_j\rangle .$$

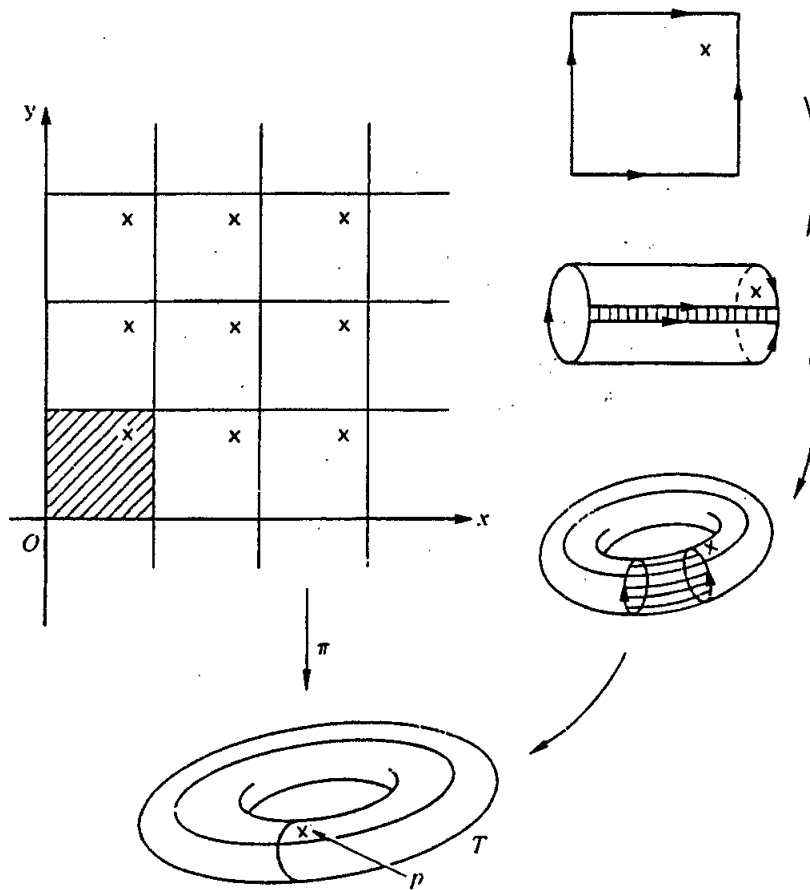



Figura 5-51. *O toro.*

Assim,

$$\langle d\varphi(f_i), d\varphi(f_j)\rangle = \langle d\varphi(d\pi(e_i)), d\varphi(d\pi(e_j))\rangle = \langle f_i, f_j\rangle .$$

Segue-se que φ é uma imersão isométrica, como havíamos afirmado.

Deve-se observar que a imagem $\varphi(S)$ de uma imersão $\varphi : S \to \mathbb{R}^n$ pode ter auto-interseções. No exemplo anterior, $\varphi : T \to \mathbb{R}^4$ é injetiva e, além disto φ é um homeomorfismo sobre a sua imagem. Convém utilizar a seguinte terminologia.

DEFINIÇÃO 7. *Seja S uma superfície abstrata. Uma aplicação diferenciável $\varphi : S \to \mathbb{R}^n$ é um* mergulho *se φ é uma imersão e um homeomorfismo sobre a sua imagem.*

Por exemplo, uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ pode ser caracterizada como a imagem de uma superfície abstrata S por um mergulho $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Isto significa que apenas aquelas superfícies abstratas que podem ser mergulhadas em $\mathbb{R}^3$ poderiam ter sido detectadas em nosso estudo prévio das superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$. O exemplo abaixo mostra que tal fato é uma séria restrição.

Exemplo 5. Observamos primeiramente que a definição de orientabilidade (cf. seção 2.6, Def. 1) pode ser estendida, sem que mudar uma única palavra, às superfícies abstratas. Considere agora o plano projetivo real P^2 do Exemplo 1. Afirmamos que P^2 é não-orientável.

Para provar isto, fazemos primeiro a seguinte consideração geral. Sempre que uma superfície abstrata S contenha um conjunto aberto M difeomorfo a uma faixa de Möbius (seção 2.6, Exemplo 3), ela é não-orientável. Caso contrário, existe uma família de parametrizações cobrindo S com a propriedade de que todas as mudanças de coordenadas têm Jacobiano positivo; a restrição de uma tal família a M induzirá uma orientação em M, o que é uma contradição.

Ora, P^2 é obtido a partir da esfera S^2 pela identificação de pontos antípodas. Considere em S^2 uma faixa fina B formada por segmentos abertos de meridianos cujos centros estão sobre metade de um equador (Fig. 5.52). Através da identificação dos pontos antípodas, é claro que B se torna uma faixa de Möbius em P^2. Assim, P^2 é não-orientável.

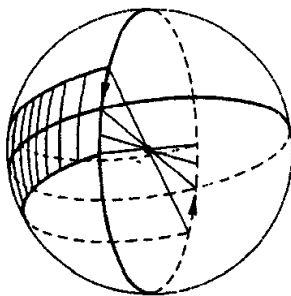



Figura 5-52. *O plano projetivo contém uma faixa de Möbius.*

Por um argumento análogo, pode-se mostrar que a garrafa de Klein K do Exemplo 2 também é não-orientável. Em geral, sempre que uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é simétrica em relação à origem de $\mathbb{R}^3$, a identificação dos pontos simétricos dá origem a uma superfície abstrata não-orientável.

Pode-se provar que uma superfície regular compacta em $\mathbb{R}^3$ é orientada (cf. Observação 2, seção 2.7). Assim, P^2 e K não podem ser mergulhados em

$\mathbb{R}^3$, e o mesmo acontece para as superfícies não-orientáveis geradas da maneira descrita acima. Assim, se nos limitarmos a superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ teremos que deixar de lado muitas superfícies.

No entanto, P^2 e K^2 podem ser mergulhados em $\mathbb{R}^4$. Para a garrafa de Klein K, considere a aplicação $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$G(u,v) = \left((r\cos v + a)\cos u, (r\cos v + a)\operatorname{sen} u, r\operatorname{sen} v\,\cos\frac{u}{2}, r\operatorname{sen} v\operatorname{sen}\frac{u}{2}\right).$$

Note que $G(u,v) = G(u + 2m\pi, 2n\pi - v)$, onde m e n são inteiros. Assim, G induz uma aplicação ψ da superfície que é obtida a partir do quadrado

$$[0,2\pi] \times [0,2\pi] \subset \mathbb{R}^2$$

quando se considera primeiro a reflexão de um de seus lados em relação ao centro deste lado e depois se faz a identificação dos lados opostos (ver Fig. 5.53). Podemos ver que tal conjunto é a garrafa de Klein, como foi definida no Exemplo 2, se desprezamos uma metade aberta do toro no qual os pontos simétricos estão sendo identificados e observamos que ambos os processos fornecem a mesma superfície (Fig. 5.53).

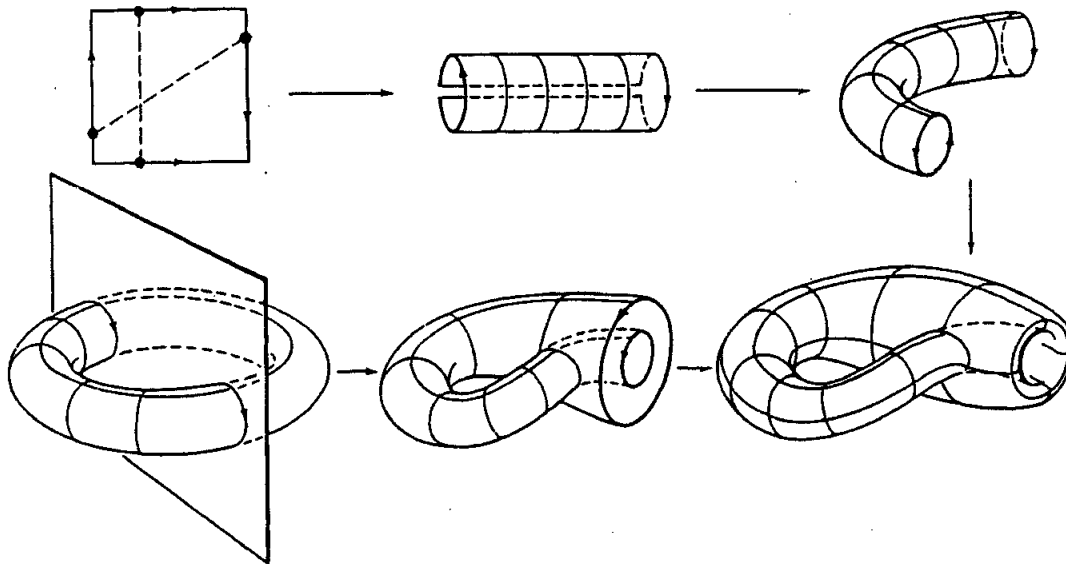



Figura 5-53. *Imagem em $\mathbb{R}^3$ da garrafa de Klein por uma imersão. Observe-se a auto-intersecção.*

Assim, ψ é uma aplicação de K em $\mathbb{R}^4$. Observe também que

$$G(u + 4m\pi, v + 2m\pi) = G(u,v).$$

Segue-se que $G = \psi \circ \pi_1 \circ \pi$, onde $\pi : \mathbb{R}^2 \to T$ é essencialmente a projeção natural do toro T (cf. Exemplo 4) e $\pi_1 : T \to K$ corresponde a identificar pontos "antípodas" em T. Pela definição de estruturas diferenciáveis em T e em K, π e π_1 são difeomorfismos locais. Assim, $\psi : K \to \mathbb{R}^4$ é diferenciável, e o posto de $d\psi$ coincide com o posto de dG. Calcula-se facilmente que este último é 2; logo, ψ é uma imersão. Como K é compacto e ψ é injetiva, vê-se sem dificuldades que ψ^{-1} é contínua em $\psi(K)$. Assim, ψ é um mergulho, como desejado.

Para o plano projetivo P^2, considere a aplicação $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^2$ a esfera unitária com centro na origem de $\mathbb{R}^3$. É claro que a restrição $\varphi = F|\, S^2$ é tal que $\varphi(p) = \varphi(-p)$. Assim, φ induz uma aplicação

$$\tilde{\varphi} : P^2 \to \mathbb{R}^4 \quad \text{por} \quad \tilde{\varphi}(\{p, -p\}) = \varphi(p).$$

Para ver que φ (logo, $\tilde{\varphi}$) é uma imersão, considere a parametrização $\mathbf{x}$ de S^2 dada por $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, +\sqrt{1 - x^2 - y^2})$, onde $x^2 + y^2 < 1$. Então

$$\varphi \circ \mathbf{x}(x, y) = (x^2 - y^2, xy, xD, yD), \qquad D = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Verifica-se facilmente que a matriz de $d(\varphi \circ \mathbf{x})$ tem posto 2. Assim, $\tilde{\varphi}$ é uma imersão.

Para ver que $\tilde{\varphi}$ é injetiva, faça

$$x^2 - y^2 = a, \qquad xy = b, \qquad xz = c, \qquad yz = d. \tag{2}$$

Basta mostrar que, sob a condição $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, as equações acima têm apenas duas soluções que são da forma (x, y, z) e $(-x, -y, -z)$. De fato, podemos escrever

$$\begin{aligned} x^2 d = bc, \qquad & y^2 c = bd, \\ z^2 b = cd, \qquad & x^2 - y^2 = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, & \end{aligned} \tag{3}$$

onde as três primeiras equações vem das três últimas equações de (2).

Se um dos números b, c, d é não-nulo, as equações (3) nos dão x^2, y^2 e z^2, e as equações (2) determinam o sinal de duas coordenadas, uma vez dado

o sinal da coordenada restante. Se $b = c = d = 0$, as equações em (2) e a última equação em (3) mostram que exatamente duas coordenadas serão nulas, e a restante será ± 1. Em todo caso, as soluções têm a forma desejada, e $\tilde{\varphi}$ é injetiva.

Por compacidade, φ é um mergulho, e isto conclui o exemplo.

Retornando à definição de superfície abstrata, vemos que o número 2 não desempenhou um papel essencial. Assim, podemos estender esta definição para um n (natural) arbitrário e, como veremos a seguir, isto pode ser útil.

DEFINIÇÃO 1a. *Uma* variedade diferenciável *de dimensão n é um conjunto M munido de uma família de aplicações bijetivas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \to M$ de conjuntos abertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ em M tal que*

1. $\cup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. *Para cada par α, β com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, temos que $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$, $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$, $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$ são aplicações diferenciáveis.*
3. *A família $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$ é máxima em relação às condições 1 e 2.*

A família $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$ satisfazendo as condições 1 e 2 é chamada uma *estrutura diferenciável* em M. Dada uma estrutura diferenciável em M podemos facilmente completá-la em uma máxima agregando a ela todas as possíveis parametrizações que, junto com alguma parametrização da família $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$, satisfazem a condição 2. Assim, com certo abuso de linguagem, podemos dizer que uma variedade diferenciável é um conjunto munido de uma estrutura diferenciável.

Observação. Uma família de conjuntos abertos pode ser definida em M pela seguinte regra: $V \subset M$ é um conjunto aberto se para todo α, $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(V \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Os leitores com algum conhecimento de topologia elementar irão notar que uma tal família define uma topologia natural em M. Nesta topologia, as aplicações $\mathbf{x}_\alpha$ são contínuas e os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ são abertos em M. Em alguns dos teoremas mais profundos sobre variedades, é necessário impor algumas condições sobre a topologia de M.

As definições de aplicações diferenciáveis e de vetor tangente se generalizam, com as mesmas palavras, para variedades diferenciáveis. É claro que, o espaço tangente é agora um espaço vetorial $n-$dimensional. As definições

de diferencial e orientabilidade também se estendem imediatamente para esta situação mais geral.

No exemplo seguinte mostramos como questões em variedades bi-dimensionais nos levam naturalmente a considerar variedades de dimensão maior.

Exemplo 6. (O *Fibrado Tangente*). Seja S uma superfície abstrata e seja $TS = \{(p, w),\ p \in S,\ w \in T_pS\}$. Vamos mostrar que o conjunto TS pode ser munido de uma estrutura diferenciável (de dimensão 4) e, com esta estrutura, TS é chamado o *fibrado tangente* de S.

Seja $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$ uma estrutura diferenciável em S. Vamos denotar por (u_α, v_α) as coordenadas de U_α, e por $\{\partial/\partial u_\alpha, \partial/\partial v_\alpha\}$ as bases associadas nos planos tangentes de $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$. Para cada α, defina uma aplicação $\mathbf{y}_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^2 \to TS$ por

$$\mathbf{y}_\alpha(u_\alpha, v_\alpha, x, y) = (\mathbf{x}_\alpha(u_\alpha, v_\alpha), x\frac{\partial}{\partial u_\alpha} + y\frac{\partial}{\partial v_\alpha}), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Geometricamente, isto significa que tomaremos como coordenadas de um ponto $(p, w) \in TS$ as coordenadas u_α, v_α de p mais as coordenadas de w na base $\{\partial/\partial u_\alpha, \partial/\partial v_\alpha\}$.

Vamos mostrar que $\{U_\alpha \times \mathbb{R}^2, \mathbf{y}_\alpha\}$ é uma estrutura diferenciável em TS. Como $\cup \mathbf{x}_\sigma(U_\alpha) = S$ e $(d\mathbf{x}_\alpha)_q(\mathbb{R}^2) = T_{\mathbf{x}_\alpha(q)}S$, $q \in U_\alpha$, temos que

$$\cup\, \mathbf{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^2) = TS,$$

e isto verifica a condição 1 da Def. 1a. Seja agora

$$(p, w) \in \mathbf{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^2) \cap \mathbf{y}_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^2).$$

Então

$$(p, w) = (\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathbf{x}_\alpha(w_\alpha)) = (\mathbf{y}_\beta(q_\beta), d\mathbf{y}_\beta(w_\beta)),$$

onde $q_\alpha \in U_\alpha$, $q_\beta \in U_\beta$, w_α, $w_\beta \in \mathbb{R}^2$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \mathbf{y}_\alpha(q_\alpha, w_\alpha) &= \mathbf{y}_\beta^{-1}(\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathbf{x}_\alpha(w_\alpha)) \\ &= (\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)(w_\alpha)). \end{aligned}$$

Como $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ é diferenciável, $d(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)$ também é. Segue-se que $\mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \mathbf{y}_\alpha$ é diferenciável, o que verifica a condição 2 da Def. 1a.

O fibrado tangente de S é o espaço natural para se trabalhar quando lidamos com equações diferenciais de segunda ordem em S. Por exemplo, as equações de uma geodésica em uma superfície geométrica S podem ser escritas, em uma vizinhança coordenada, como (cf. seção 4.7)

$$\begin{aligned} u'' &= f_1(u, v, u', v'), \\ v'' &= f_2(u, v, u', v'). \end{aligned}$$

O "truque clássico" de introduzir novas variáveis $x = u'$, $y = v'$ para reduzir as equações acima a um sistema de primeira ordem

$$\begin{aligned} x' &= f_1(u, v, x, y), \\ y' &= f_2(u, v, x, y), \\ u' &= f_3(u, v, x, y), \\ v' &= f_4(u, v, x, y), \end{aligned} \tag{4}$$

pode ser interpretado em termos do fibrado tangente TS, com coordenadas (u, v, x, y) se olharmos para as geodésicas como trajetórias de um campo de vetores localmente dado por (4) em TS. Pode-se mostrar que tal campo de vetores está bem definido em TS por toda parte; isto é, na interseção de duas vizinhanças coordenadas, os campos de vetores dados por (4) coincidem. Este campo (ou melhor, suas trajetórias) é chamado *fluxo geodésico* em TS. É um objeto natural para se trabalhar quando se estudam as propriedades globais das geodésicas em S.

Voltando à seção 4.7, pode-se notar que utilizamos, de forma disfarçada, a variedade TS. Como estávamos interessados apenas em propriedades locais, foi possível trabalhar apenas com uma vizinhança coordenada (que, essencialmente, é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^4$). No entanto, mesmo este trabalho local se torna mais elegante quando a noção de fibrado tangente é utilizada.

É claro que podemos também definir o fibrado tangente de uma variedade diferenciável de dimensão n. Exceto pela notação, os detalhes são os mesmos e serão deixados como exercício.

Podemos também estender a definição de uma superfície geométrica para uma dimensão arbitrária.

DEFINIÇÃO 5a. *Uma* variedade Riemanniana *é uma varidedade diferenciável n-dimensional M munida de uma escolha de um produto interno* $\langle\ ,\ \rangle_p$

em cada T_pM, $p \in M$, *que varia diferenciavelmente com* p *no seguinte sentido. Para alguma (logo, para todas) parametrização* $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \to M$ *com* $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$, *as funções*

$$g_{ij}(u_1, \dots, u_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right\rangle, \qquad i,\ j = 1, \dots, n,$$

são diferenciáveis em $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(p)$; *aqui* $(u_1, \dots, u_n)$ *são as coordenadas de* $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$.

A família diferenciável $\{\langle\ ,\ \rangle_p, p \in M\}$ é chamada uma *estrutura Riemanniana* (ou métrica Riemanniana) em M.

Note que para o caso das superfícies nós utilizamos a notação tradicional $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$.

A extensão das noções da geometria intrínseca a variedades Riemannianas não é tão direta quanto no caso das variedades diferenciáveis.

Primeiro, precisamos definir a noção de derivada covariante para variedades Riemannianas. Para isto, seja $\mathbf{x} : U \to M$ uma parametrização com coordenadas $(u_1, \dots, u_n)$ e coloque $\mathbf{x}_i = \partial/\partial u_i$. Assim, $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$.

Queremos definir a derivada covariante $D_w v$ de um campo de vetores v com relação a um campo de vetores w. Gostaríamos que $D_w v$ tivesse as propriedades com as quais estamos acostumados e que se mostraram efetivas em nosso estudo das superfícies regulares. Primeiro, ela deve ter as propriedades distributivas da derivada covariante tradicional. Assim, se u, v, w são campos de vetores em M e f, g são funções diferenciáveis em M, queremos

$$D_{fu+gw}(v) = fD_u v + gD_w v, \tag{5}$$

$$D_u(fv + gw) = fD_u v + \frac{\partial f}{\partial u} v + gD_u w + \frac{\partial g}{\partial u} w, \tag{6}$$

onde $\partial f/\partial u$, por exemplo, é uma função cujo valor em $p \in M$ é a derivada $(f \circ \alpha)'(0)$ da restrição de f a uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = u$.

As equações (5) e (6) mostram que a derivada covariante D fica inteiramente definida se conhecemos seus valores em uma base de vetores

$$D_{\mathbf{x}_i} \mathbf{x}_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k, \qquad i, j, k = 1, \dots, n,$$

onde os coeficientes Γ_{ij}^k são funções ainda a determinar.

Em segundo lugar, queremos que os Γ_{ij}^k sejam simétricos em i e j ($\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$); isto é

$$D_{\mathbf{x}_i}\mathbf{x}_j = D_{\mathbf{x}_j}\mathbf{x}_i \qquad \text{para todos } i, j. \tag{7}$$

Em terceiro lugar, queremos que a lei do produto seja válida; isto é,

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle = \langle D_{\mathbf{x}_k}\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle + \langle \mathbf{x}_i, D_{\mathbf{x}_k}\mathbf{x}_j\rangle. \tag{8}$$

A partir das equações (7) e (8), segue-se que

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle + \frac{\partial}{\partial u_i}\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k\rangle - \frac{\partial}{\partial u_j}\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_i\rangle = 2\langle D_{\mathbf{x}_i}\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j\rangle,$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{\partial}{\partial u_k}g_{ij} + \frac{\partial}{\partial u_i}g_{jk} - \frac{\partial}{\partial u_j}g_{ki} = 2\sum_l \Gamma_{ik}^l g_{lj}.$$

Como $\det(g_{ij}) \neq 0$, podemos resolver este último sistema, e obter os Γ_{ij}^k como funções da métrica Riemanniana g_{ij} e de suas derivadas (o leitor deve comparar o sistema acima com o sistema (2) da seção 4.3). Se pensarmos em g_{ij} como uma matriz e escrevermos a sua inversa como g^{ij}, a solução do sistema acima é

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_l g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l}\right).$$

Assim, dada uma métrica Riemanniana em M, existe uma única derivada covariante em M (também chamada *conexão* de Levi-Civita da estrutura Riemanianna dada) *satisfazendo as* Eqs. (5)-(8).

Partindo da derivada covariante, podemos definir transporte paralelo, geodésicas, curvatura geodésica, aplicação exponencial, completitude, etc. As definições são exatamente as mesmas que aquelas que foram dadas anteriormente. A noção de curvatura, no entanto, requer mais elaboração. O conceito a seguir, devido a Riemann, é provavelmente o melhor análogo em geometria Riemanniana da curvatura Gaussiana.

Seja $p \in M$ e seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM. Considere todas as geodésicas de M começando em p que são

tangentes a σ. A partir do fato de que a aplicação exponencial é um difeomorfismo local na origem de T_pM,pode-se mostrar que pequenos segmentos de tais geodésicas formam uma superfície abstrata S contendo p. S tem uma estrutura geométrica natural induzida pela estrutura Riemanniana de M. A curvatura Gaussiana de S em p é chamada *curvatura seccional* $K(p, \sigma)$ de M em p ao longo de σ.

É possível formalizar a curvatura seccional em termos da conexão de Levi-Civita, mas isto é demasiado técnico para ser descrito aqui. Mencionaremos apenas que a maioria dos teoremas deste capítulo podem ser colocados como questões naturais em geometria Riemanniana. Alguns deles continuam valendo com pouca ou nenhuma modificação nas demonstrações (Os teoremas de Hopf-Rinow, Bonnet, Jacobi e o primeiro teorema de Hadamard se enquadram nesta categoria). Alguns outros, no entanto, precisam de hipóteses adicionais para que sejam válidos (por exemplo, o segundo teorema de Hadamard) e serviram de motivação para os desenvolvimentos posteriores da teoria.

Um desenvolvimento completo das idéias acima nos levaria ao domínio da geometria Riemanniana. Paramos então por aqui, e convidamos o leitor a consultar a bibliografia no final do livro.

Exercícios

1. Introduza uma métrica no plano projetivo P^2 (Exemplo 1) de forma que a projeção natural $\pi : S^2 \to P^2$ seja uma isometria local. Qual a curvatura (Gaussiana) de uma tal métrica?

2. (*A Faixa de Möbius Infinita.*) Seja

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1\}$$

um cilindro e $A : C \to S$ a aplicação (antípoda) $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Seja M o quociente de C pela relação de equivalência $p \sim A(p)$, e seja $\pi : C \to M$ a aplicação $\pi(p) = \{p, A(p)\}$, $p \in C$.

a. Mostre que M pode ser munida de uma estrutura diferenciável de forma que π seja um difeomorfismo local (M é então chamada *faixa de Möbius infinita*).

b. Prove que M é não-orientável.

c. Introduza uma métrica Riemanniana em M de forma que π seja uma isometria local. Qual é a curvatura de uma tal métrica?

3. **a.** Mostre que a projeção $\pi : S^2 \to P^2$ da esfera sobre o plano projetivo tem as seguintes propriedades: (1) π é contínua e $\pi(S^2) = P^2$; (2) cada ponto $p \in P^2$ admite uma vizinhança U tal que $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são conjuntos abertos disjuntos de S^2, e a restrição de π a cada V_i, $i = 1, 2$, é um homeomorfismo sobre U. Assim, π satisfaz formalmente as condições de uma aplicação de recobrimento (ver seção 5.6, Def. 1) com duas folhas. Por causa disto, dizemos que S^2 é um *recobrimento duplo orientável* de P^2.

b. Mostre que, neste sentido, o toro T é um recobrimento duplo orientável da garrafa de Klein K (Exemplo 2) e que o cilindro é um recobrimento duplo orientável da faixa de Möbius infinita (cf. Exercício 2).

4. (*Recobrimento duplo Orientável.*) Este exercício fornece uma construção geral para um recobrimento duplo orientável de uma superfície não-orientável. Seja S uma superfície abstrata conexa, não-orientável. Para cada $p \in S$, considere o conjunto B de todas as bases de T_pS e diga que duas bases são equivalentes se elas estão relacionadas por uma matriz com determinante positivo. É claro que isto define uma relação de equivalência e divide B em dois conjuntos disjuntos (cf. seção 1.4). Seja $\mathcal{O}_p$ o espaço quociente de B por esta relação de equivalência. $\mathcal{O}_p$ tem dois elementos, e cada elemento $O_p \in \mathcal{O}_p$ é uma orientação de T_pS (cf. seção 1.4). Seja $\tilde{S}$ o conjunto

$$\tilde{S} = \{(p, O_p);\ p \in S;\ O_p \in \mathcal{O}_p\}.$$

Para dar a $\tilde{S}$ uma estrutura diferenciável, seja $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$ uma estrutura diferenciável máxima de S e defina $\tilde{\mathbf{x}}_\alpha : U_\alpha \to \tilde{S}$ por

$$\tilde{\mathbf{x}}_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) = \left(\mathbf{x}_\alpha(u_\alpha, v_\alpha), \left[\frac{\partial}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\right]\right),$$

onde $(u_\alpha, v_\alpha) \in U_\alpha$ e $[\partial/\partial u_\alpha, \partial/\partial v_\alpha]$ denota o elemento de $\mathcal{O}_p$ determinado pela base $\{\partial/\partial u_\alpha, \partial/\partial v_\alpha\}$. Mostre que

a. $\{U_\alpha, \tilde{\mathbf{x}}_\alpha\}$ é uma estrutura diferenciável em $\tilde{S}$ e $\tilde{S}$ com esta estrutura diferenciável é uma superfície orientável.

b. A aplicação $\pi : \tilde{S} \to S$ dada por $\pi(p, O_p) = p$ é uma aplicação diferenciável sobrejetiva. Além disto, cada ponto $p \in S$ admite uma vizinhança U tal que $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são conjuntos abertos disjuntos de $\tilde{S}$, e a restrição de π a cada V_i, $i = 1, 2$, é um difeomorfismo sobre U. Por causa disto, $\tilde{S}$ é chamado um *recobrimento duplo orientável* de S.

5. Estenda o teorema de Gauss-Bonnet (ver seção 4.5) para as superfícies geométricas orientáveis e aplique-o para provar os seguintes fatos:

a. Não existe uma métrica Riemanniana em uma superfície abstrata T difeomorfa a um toro cuja curvatura seja positiva (ou negativa) em todos os pontos de T.

b. Sejam T e S^2 superfícies abstratas difeomorfas ao toro e à esfera, respectivamente, e seja $\varphi : T \to S^2$ uma aplicação diferenciável. Então φ tem, pelo menos, um ponto crítico, i.e. um ponto $p \in T$ tal que $d\varphi_p$ não é um isomorfismo.

6. Considere o semi-plano superior R^2_+ (cf. Exemplo 3) com a métrica

$$E(x,y) = 1, \quad F(x,y) = 0, \quad G(x,y) = \frac{1}{y}, \quad (x,y) \in R^2_+.$$

Mostre que os comprimentos dos vetores tornam-se arbitrariamente grandes à medida que nos aproximamos da fronteira de R^2_+ mas que o comprimento do segmento vertical

$$x = 0, \quad 0 < \varepsilon \leq y \leq 1,$$

tende a 2 quando $\varepsilon \to 0$. Conclua que uma tal métrica não é completa.

*7. Prove que o semi-plano de Poincaré (cf. Exemplo 3) é uma superfície geométrica completa. Conclua que o plano hiperbólico é completo.

8. Uma outra maneira de encontrar as geodésicas do semi-plano de Poincaré (cf. Exemplo 3) é utilizando a equação de Euler-Lagrange para o problema variacional correspondente (cf. Exercício 4, seção 5.4). Como sabemos que as retas verticais são geodésicas, podemos nos restringir a

geodésicas na forma $y = y(x)$. Assim, precisamos encontrar os pontos críticos da integral ($F = 0$)

$$\int \sqrt{E + G(y')^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y}\,dx,$$

pois $E = G = 1/y^2$. Use o Exercício 4, seção 4.5, para mostrar que a solução deste problema variacional é uma família de círculos na forma

$$(x + k_1)^2 + y^2 = k_2^2, \qquad k_1,\ k_2 = \text{const.}.$$

9. Sejam $\tilde{S}$ e S superfícies geométricas conexas e seja $\pi : \tilde{S} \to S$ uma aplicação diferenciável sobrejetiva com a seguinte propriedade: Para cada $p \in S$, existe uma vizinhança U de p tal que $\pi^{-1}(U) = \cup_\alpha V_\alpha$, onde os V_α são subconjuntos abertos disjuntos de $\tilde{S}$ e π restrita a cada V_α é uma isometria sobre U (assim, π é essencialmente uma aplicação de recobrimento e uma isometria).

a. Prove que S é completa se e somente se $\tilde{S}$ é completa.

b. A métrica sobre a faixa de Möbius infinita, introduzida no Exercício 2, parte **c**, é uma métrica completa?

10. (*Resultados de Kazdan e Warner.*) **a.** Considere uma métrica em $\mathbb{R}^2$ dada por

$$E(x,y) = 1, \qquad F(x,y) = 0, \qquad G(x,y) > 0, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mostre que a curvatura desta métrica é dada por

$$\frac{\partial^2(\sqrt{G})}{\partial x^2} + K(x,y)\sqrt{G} = 0. \qquad (*)$$

b. Reciprocamente, dada uma função $K(x,y)$ em $\mathbb{R}^2$, considere y como um parâmetro e seja $\sqrt{G}$ uma solução de $(*)$ com as condições iniciais

$$\sqrt{G}(x_0,y) = 1, \quad \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x}(x_0,y) = 0.$$

Prove que G é positiva em uma vizinhança de (x_0, y) e assim define uma métrica nesta vizinhança. Isto mostra que *toda função diferenciável é localmente a curvatura de alguma métrica (abstrata).*

***c.** Suponha $K(x,y) \leq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que a solução da parte **b** satisfaz

$$\sqrt{G(x,y)} \geq \sqrt{G(x_0,y)} = 1, \quad \text{para todo } x.$$

Assim, $G(x,y)$ define uma métrica no $\mathbb{R}^2$ inteiro. Prove também que esta métrica é completa. Isto mostra que *qualquer função diferenciável não-positiva em $\mathbb{R}^2$ é a curvatura de alguma métrica completa em $\mathbb{R}^2$*. Se não exigirmos que a métrica seja completa, o resultado vale para qualquer função diferenciável K em $\mathbb{R}^2$. Compare com J. Kazdan e F. Warner, "Curvature Functions for Open 2-Manifolds," *Ann. of Math.* 99 (1974), 203-219, onde também se prova que a condição sobre K no Exercício 2 da seção 5.4 é necessária e suficiente para que a métrica seja completa.

5.11 O Teorema de Hilbert

O teorema de Hilbert pode ser enunciado da seguinte maneira.

Teorema. *Uma superfície geométrica completa S com curvatura negativa constante não pode ser imersa isometricamente em $\mathbb{R}^3$.*

Observação 1. O teorema de Hilbert foi tratado primeiramente em D. Hilbert, "Über Flächen von konstanter Gausscher Krümung" *Trans. Amer. Math. Soc.* 2 (1901), 87-99. Uma demonstração diferente foi dada logo depois por E. Holmgren, "Sur les surfaces à courbure constante negative," *C.R. Acad. Sci. Paris* 134 (1902), 740-743. A demonstração que daremos aqui segue-se as idéias originais de Hilbert. A parte local é essencialmente igual ao que está no artigo de Hilbert; contudo, a parte global é bem diferente. Agradecemos a J. A. Scheinkman por ter colaborado nesta demonstração em um seminário no IMPA em 1970 e a M. Spivak por ter sugerido o Lema 7 abaixo.

Começaremos com algumas observações. Multiplicando o produto interno por um fator constante, podemos supor que a curvatura $K \equiv -1$. Além disto, como $\exp_p : T_pS \to S$ é um difeomorfismo local (corolário do teorema da

seção 5.5), ela induz um produto interno em T_pS. Denote por S' a superfície geométrica T_pS com este produto interno. Se $\psi : S \to \mathbb{R}^3$ é uma imersão isométrica, o mesmo vale para $\varphi = \psi \circ \exp_p : S' \to \mathbb{R}^3$. Assim, basta mostrar que não existe uma imersão isometrica $\varphi : S' \to \mathbb{R}^3$ de um plano S' com um produto interno tal que $K \equiv -1$.

Lema 1. *A área de S' é infinita.*

Demonstração. Vamos mostrar que S' é (globalmente) isométrica ao plano hiperbólico H. Como a área deste último é (cf. Exemplo 3, seção 5.10)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^u\,du\,dv = \infty,$$

isto demonstrará o lema.

Sejam $p \in H$, $p' \in S'$, e escolha uma isometria linear $\psi : T_pH \to T_pS'$ entre seus espaços tangentes. Defina uma aplicação $\varphi : H \to S'$ por $\varphi = \exp_p \circ \psi \circ \exp_p^{-1}$. Como cada ponto de H é ligado a p por uma única geodésica minimizante, φ está bem definida.

Utilizamos agora coordenadas polares (ρ, θ) e (ρ', θ') em torno de p e p', respectivamente, com a condição de que φ aplique o eixo $\theta = 0$ sobre o eixo $\theta' = 0$. Pelos resultados da seção 4.6, φ preserva a primeira forma fundamental; logo, é uma isometria local. Usando a observação feita após o teorema de Hadamard, concluimos que φ é uma aplicação de recobrimento. Como S' é simplesmente conexo, φ é um homeomorfismo e, portanto, uma isometria (global).

Q.E.D.

No restante desta seção vamos supor que existe uma imersão isométrica $\varphi : S' \to \mathbb{R}^3$, onde S' é uma superfície geométrica homeomorfa a um plano e que tem $K \equiv -1$.

Para evitar as dificuldades associadas com possíveis auto-interseções de $\varphi(S')$, vamos trabalhar com S' e usar a imersão φ para induzir em S' a geometria extrínseca local de $\varphi(S') \subset \mathbb{R}^3$. Mais precisamente, como φ é uma imersão, para cada $p \in S'$ existe uma vizinhança $V' \subset S'$ de p tal que a restrição $\varphi| V' = \tilde{\varphi}$ é um difeomorfismo. Em cada $\tilde{\varphi}(q) \in \tilde{\varphi}(V')$ existem, por exemplo, duas direções assintóticas. Por meio de $\tilde{\varphi}$, estas direções induzem duas direções em $q \in S'$, que serão chamadas as *direções assintóticas de S'*

em q. Deste modo, faz sentido falar de curvas assintóticas em S', e o *mesmo procedimento pode ser aplicado para qualquer outra entidade local de* $\varphi(S')$.

Recordemos que as curvas coordenadas de uma parametrização constituem uma *rede de Tchebyshef* se os lados opostos de qualquer quadrilátero formado por elas tiverem o mesmo comprimento (cf. Exercício 7, seção 2.5). Se este for o caso, é possível reparametrizar a vizinhança coordenada de modo que $E = 1$, $F = \cos\theta$, $G = 1$, onde θ é o ângulo formado pelas curvas coordenadas, (seção 2.5, Exercício 8). Além disto, nesta situação, $K = -(\theta_{uv}/\operatorname{sen}\theta)$ (seção 4.3, Exercício 5).

Lema 2. *Para cada* $p \in S'$ *existe uma parametrização* $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S'$, $p \in \mathbf{x}(U)$, *tal que as curvas coordenadas de* $\mathbf{x}$ *são as linhas assintóticas de* $\mathbf{x}(U) = V'$ *e constituem uma rede de Tchebyshef (*vamos expressar isto dizendo que as curvas assintóticas de V' formam uma rede de Tchebyshef*).*

Demonstração. Como $K < 0$, uma vizinhança $V' \subset S'$ de p pode ser parametrizada por $\mathbf{x}(u,v)$ de tal modo que as curvas coordenadas de $\mathbf{x}$ sejam as linhas assintóticas de V'. Assim, se e, f, e g são os coeficientes da segunda forma fundamental de S' nesta parametrização, temos $e = g = 0$. Note que estamos utilizando a convenção mencionada acima de nos referirmos à segunda forma fundamental de S' em vez de $\varphi(S') \subset \mathbb{R}^3$.

Em $\varphi(V') \subset \mathbb{R}^3$, temos

$$N_u \wedge N_v = K(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v);$$

logo, fazendo $D = \sqrt{EG - F^2}$,

$$(N \wedge N_v)_u - (N \wedge N_u)_v = 2(N_u \wedge N_v) = 2KDN.$$

Além disto,

$$\begin{aligned} N \wedge N_u &= \frac{1}{D}\{(\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) \wedge N_u\} = \frac{1}{D}\{\langle \mathbf{x}_u, N_u\rangle\, \mathbf{x}_v - \langle \mathbf{x}_v, N_u\rangle\, \mathbf{x}_u\} \\ &= \frac{1}{D}(f\mathbf{x}_u - e\mathbf{x}_v), \end{aligned}$$

e, de forma análoga,

$$N \wedge N_v = \frac{1}{D}(g\mathbf{x}_u - f\mathbf{x}_v).$$

Como $K = -1 = -(f^2/D^2)$ e $e = g = 0$, obtemos

$$N \wedge N_u = \pm \mathbf{x}_u, \qquad N \wedge N_v = \pm \mathbf{x}_v;$$

donde,

$$2KDN = -2DN = \pm \mathbf{x}_{uv} \pm \mathbf{x}_{vu} = \pm 2\mathbf{x}_{uv}.$$

Segue-se que $\mathbf{x}_{uv}$ é paralelo a N; logo, $E_v = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u\rangle = 0$ e $G_u = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v\rangle = 0$. Mas $E_v = G_u = 0$ implica (seção 2.5, Exercício 7) que as curvas coordenadas formam uma rede de Tchebyshef.

Q.E.D.

Lema 3. *Seja $V' \subset S'$ uma vizinhança coordenada de S' tal que as curvas coordenadas sejam linhas assintóticas em V'. Então a área de qualquer quadrilátero formado pelas curvas coordenadas é menor que 2π.*

Demonstração. Sejam $(\bar{u}, \bar{v})$ as coordenadas de V'. Pelo argumento do Lema 1, as curvas coordenadas formam uma rede de Tchebyshef. Assim, é possível reparametrizar V' , digamos, por (u, v) de forma que $E = G = 1$ e $F = \cos\theta$. Seja R um quadrilátero formado pelas curvas coordenadas com vértices em (u_1, v_1), (u_2, v_1), (u_2, v_2), (u_1, v_2) e ângulos internos α_1, α_2, α_3, α_4, respectivamente (Fig. 5.54). Como $E = G = 1$, $F = \cos\theta$, e $\theta_{uv} = \operatorname{sen}\theta$, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \int_R dA = \int_R \operatorname{sen}\theta \, du\, dv = \int_R \theta_{uv}\, du\, dv \\ &= \theta(u_1, v_1) - \theta(u_2, v_1) + \theta(u_2, v_2) - \theta(u_1, v_2) \\ &= \alpha_1 + \alpha_3 - (\pi - \alpha_2) - (\pi - \alpha_4) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i - 2\pi < 2\pi, \end{aligned}$$

pois $\alpha_i < \pi$.

Q.E.D.

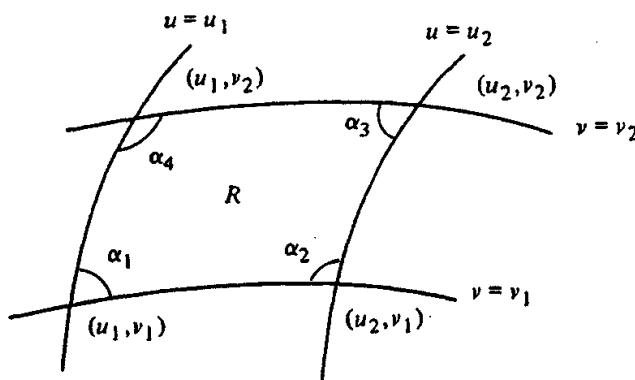



Figura 5-54

Até aqui as considerações foram todas locais. Vamos agora definir uma aplicação $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to S'$ e mostrar que $\mathbf{x}$ é uma parametrização para S' tal que $\mathbf{x}(\mathbb{R}^2) = S'$.

A aplicação $\mathbf{x}$ é definida da seguinte maneira (Fig. 5.55). Fixe um ponto $O \in S'$ e escolha orientações para as linhas assintóticas passando por O. Escolha uma destas linhas assintóticas, denote-a por a_1, e a outra por a_2. Para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, percorra um comprimento igual a s ao longo de a_1 começando em O. Seja p' o ponto obtido deste modo. Por p' passam duas linhas assintóticas, uma delas sendo a_1. Considere então a outra com a orientação que é obtida por uma extensão contínua, ao longo de a_1, da orientação de a_2. Percorra sobre esta linha assintótica orientada um comprimento igual a t começando em p'. O ponto obtido por este processo é $\mathbf{x}(s,t)$.

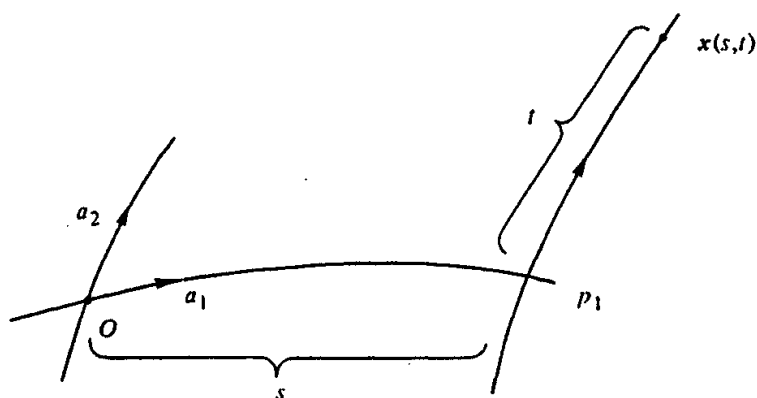



Figura 5-55

$\mathbf{x}(s,t)$ está bem definida para todo $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. De fato, se $\mathbf{x}(s,0)$ não estiver bem definida, existe s_1 tal que $a_1(s)$ está definida para todo $s < s_1$ mas

não para $s = s_1$. Seja $q = \lim_{s \to s_1} a_1(s)$. Por completitude, $q \in S'$. Utilizando o Lema 2, vemos que $a_1(s)$ está definida, o que é uma contradição e mostra que $\mathbf{x}(s, 0)$ está definida para todo $s \in R$. Com o mesmo argumento mostra-se que $\mathbf{x}(s, t)$ está definida para todo $t \in R$.

Precisamos agora mostrar que $\mathbf{x}$ é uma parametrização de S'. Isto será feito através de uma série de lemas.

Lema 4. *Para um t fixado, a curva $\mathbf{x}(s, t)$, $-\infty < s < \infty$, é uma curva assintótica tendo s como comprimento de arco.*

Demonstração. Para cada ponto $\mathbf{x}(s', t') \in S'$, existe pelo Lema 2 uma vizinhança "retangular" (isto é, na forma $t_a < t < t_b$, $s_a < s < s_b$) tal que as linhas assintóticas desta vizinhança formam uma rede de Tchebyschef. Observamos primeiro que se para algum t_0, $t_a < t_0 < t_b$, a curva $\mathbf{x}(s, t_0)$, $s_a < s < s_b$, é uma linha assintótica, então sabemos que isto também vale para toda curva $\mathbf{x}(s, \bar{t})$, $t_a < \bar{t} < t_b$. De fato, o ponto $\mathbf{x}(s, \bar{t})$ é obtido ao percorrermos um comprimento $\bar{t}$ partindo de $\mathbf{x}(s, 0)$, o que equivale a percorrer um comprimento $\bar{t} - t_0$ partindo de $\mathbf{x}(s, t_0)$. A afirmação segue-se então do fato de que as curvas assintóticas formam uma rede de Tchebyschef nesta vizinhança.

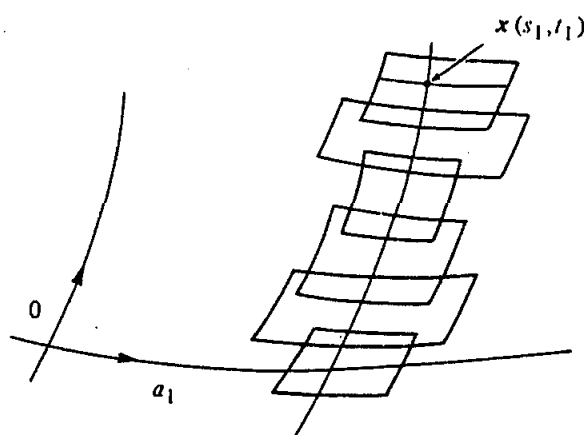



Figura 5-56

Seja $\mathbf{x}(s_1, t_1) \in S'$ um ponto arbitrário. Pela compacidade do segmento $\mathbf{x}(s_1, t)$, $0 \leq t \leq t_1$, é possível cobri-lo com um número finito de vizinhanças retangulares de modo que as curvas assintóticas em cada uma delas forme uma rede de Tchebyshef (Fig. 5.56). Como $\mathbf{x}(s, 0)$ é uma curva assintótica, iteramos a observação anterior e mostramos que $\mathbf{x}(s, t_1)$ é uma curva assintótica em uma vizinhança de s_1. Como (s_1, t_1) é arbitrário, a afirmação do lema fica demonstrada. **Q.E.D.**

Lema 5. x *é um difeomorfismo local.*

Demonstração. Isto segue-se do fato de que, por um lado, $x(s_0, t)$, $x(s, t_0)$ são curvas assintóticas parametrizadas pelo comprimento de arco, e de que, por outro lado, S' pode ser localmente parametrizada de tal maneira que as curvas coordenadas sejam as curvas assintóticas de S' e $E = G = 1$. Assim, x coincide localmente com uma tal parametrização.

Q.E.D.

Lema 6. x *é sobrejetiva.*

Demonstração. Seja $Q = x(\mathbb{R}^2)$. Como x é um difeomorfismo local, Q é aberto em S'. Observamos também que se $p' = x(s_0, t_0)$, então as duas curvas assintóticas que passam por p' estão inteiramente contidas em Q.

Vamos supor que $Q \neq S'$. Como S' é conexa, a fronteira $\operatorname{Fr} Q \neq \emptyset$. Seja $p \in \operatorname{Fr} Q$. como Q é aberto em S', $p \notin Q$. Considere agora uma vizinhança retangular R de p na qual as linhas assintóticas formam uma rede de Tchebyschef (Fig. 5.57). Seja $q \in Q \cap R$. Então uma das curvas assintóticas passando por q intersecta uma das linhas assintóticas passando por p. Pela observação acima, isto é uma contradição.

Q.E.D.

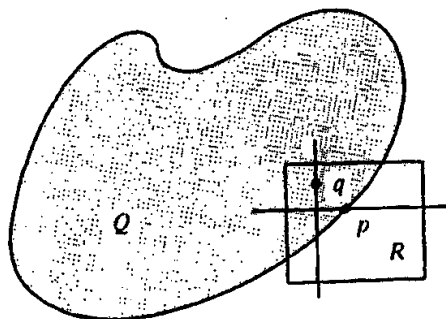



Figura 5-57

Lema 7. *Em S' há dois campos de vetores diferenciáveis linearmente independentes que são tangentes às linhas assintóticas de S'.*

Demonstração. Por cada ponto de S' passam duas curvas assintóticas distintas. Fixe um ponto $p \in S'$ e escolha dois vetores unitários $v_1(p)$ e $v_2(p)$, tangentes às linhas assintóticas passando por p. Seja $q \in S'$ um ponto arbitrário e seja $\alpha_0 : [0,l] \to S'$ um arco tal que $\alpha_0(0) = p$, $\alpha_0(l) = q$. Defina $v_1(\alpha_0(s))$, $s \in [0,l]$, como a (única) extensão contínua unitária de $v_1(p)$ ao longo de α_0 que é tangente a uma curva assintótica. Defina de maneira análoga $v_2(\alpha_0(s))$, $s \in [0,l]$. Afirmamos que $v_1(q)$ e $v_2(q)$ não dependem da escolha do caminho ligando p a q. Sendo assim, v_1 e v_2 ficam bem definidos como campos de vetores contínuos em S' e tangentes às linhas assintóticas. Logo, v_1 e v_2 serão diferenciáveis, e o lema estará demonstrado.

Para provar a nossa afirmação, vamos trabalhar com v_1, o caso de v_2 sendo análogo. Seja $\alpha_1 : [0,l] \to S'$ um outro caminho com $\alpha_1(0) = p$, $\alpha_1(l) = q$. Como S' (que é homeomorfo a um plano) é simplesmente conexo (cf. seção 5.6, Def. 3), existe uma homotopia $\alpha_t(s) = H(s,t)$, $s \in [0,l]$, $t \in [0,1]$, entre α_0 e α_1 (cf. seção 5.6, Def. 2); isto é, $\alpha_t(s)$ é uma família contínua de caminhos ligando p a q. Pela continuidade das direções assintóticas e pela compacidade de $[0,l]$, segue-se que dado $\varepsilon > 0$ existe $t_0 \in [0,1]$ tal que se $t < t_0$, então $|v_1(\alpha_t(l)) - v_1(\alpha_0(l))|$. Assim, se t_0 é suficientemente pequeno, temos que $v_1(\alpha_t(l)) = v_1(\alpha_0(l))$ para $t < t_0$. Como $[0,1]$ é compacto, podemos estender este argumento passo a passo para todo $t \in [0,1]$. Logo, $v_1(\alpha_1(l)) = v_1(\alpha_0(l))$. Isto prova a nossa afirmação e conclui a demonstração do lema.

Q.E.D.

Lema 8. x *é injetiva.*

Demonstração. Queremos mostrar que $\mathbf{x}(s_0,t_0) = \mathbf{x}(s_1,t_1)$ implica que $(s_0,t_0) = (s_1,t_1)$.

Vamos primeiro supor que $\mathbf{x}(s_0,t_0) = \mathbf{x}(s_1,t_0)$, $s_1 > s_0$, e mostrar que isto nos leva a uma contradição. Pelo Lema 7, uma linha assintótica não pode se auto-intersectar a menos que as retas tangentes coincidam no ponto de interseção. Como x é um difeomorfismo local, existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathbf{x}(s_0,t) = \mathbf{x}(s_1,t), \qquad t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon.$$

Pela mesma razão, os pontos da curva $\mathbf{x}(s_0,t)$ para os quais

$$\mathbf{x}(s_0,t) = \mathbf{x}(s_1,t)$$

formam um conjunto que é aberto e fechado desta curva; logo, $\mathbf{x}(s_0, t) = \mathbf{x}(s_1, t)$ para todo t. Além disto, pela construção da aplicação $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(s_0 + a, t_0) = \mathbf{x}(s_1 + a, t_0)$, $0 \leq a \leq s_1 - s_0$; donde, $\mathbf{x}(s_0 + a, t) = \mathbf{x}(s_1 + a, t)$ para todo t. Assim, ou

1. $\mathbf{x}(s_0, t_0) \neq \mathbf{x}(s_0, t)$ para todo $t > t_0$, ou
2. Existe $t = t_1 > t_0$ tal que $\mathbf{x}(s_0, t_0) = \mathbf{x}(s_0, t_1)$; por um argumento análogo, provaremos que $\mathbf{x}(s, t_0 + b) = \mathbf{x}(s, t_1 + b)$ para todo s, $0 \leq b \leq t_1 - t_0$.

No caso 1, $\mathbf{x}$ aplica cada faixa de $\mathbb{R}^2$ entre duas retas verticais a uma distância $s_1 - s_0$ sobre S' e identifica pontos destas retas com o mesmo t. Isto implica que S' é homeomorfo a um cilindro, e isto é uma contradição (Fig. 5.58).

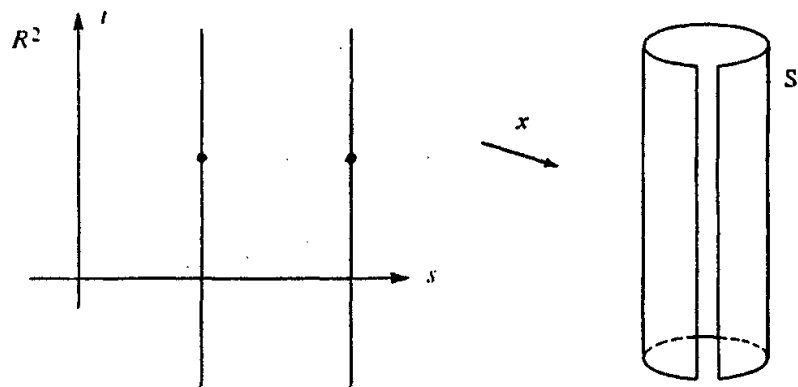



Figura 5-58

No caso 2, $\mathbf{x}$ aplica cada quadrado formado por duas retas horizontais a uma distância $s_1 - s_0$ e duas retas verticais a uma distância $t_1 - t_0$ sobre S' e identifica pontos correspondentes em lados opostos da fronteira. Isto implica que S' é homeomorfo a um toro, e isto é uma contradição (Fig. 5.59).

Por um argumento análogo, mostramos que $\mathbf{x}(s_0, t_0) = \mathbf{x}(s_0, t_1)$, $t_1 > t_0$, nos leva à mesma contradição.

Consideramos agora o caso $\mathbf{x}(s_0, t_0) = \mathbf{x}(s_1, t_1)$, $s_1 > s_0$, $t_1 > t_0$. Utilizando o fato de que linhas assintóticas não são tangentes, vemos que $\mathbf{x}(s_0, t) = \mathbf{x}(s_1, t)$ para todo t e, analogamente, $\mathbf{x}(s, t_0) = \mathbf{x}(s, t_1)$ para todo s. Segue-se, como acima, que S é um toro, o que é uma contradição.

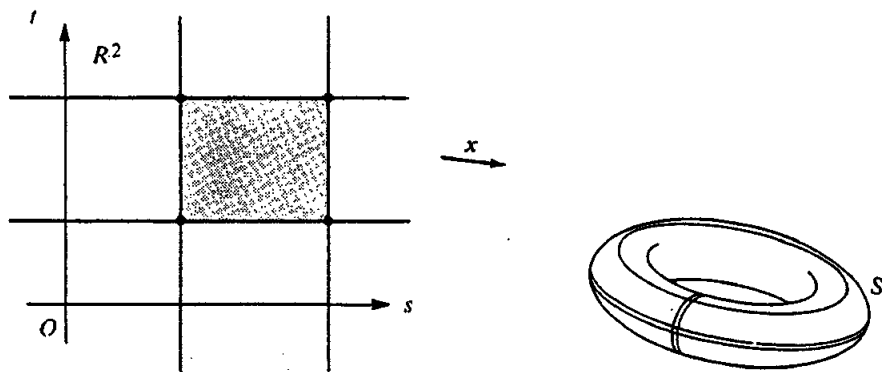



Figura 5-59

Q.E.D.

Obteremos agora sem dificuldades o teorema de Hilbert.

Demonstração do Teorema. Suponha que exista uma imersão isométrica $\psi : S \to \mathbb{R}^3$, onde S é uma superfície completa com $K \equiv -1$. Seja $p \in S$ e denote por S' o plano tangente T_pS com a métrica induzida por $\exp_p : T_pS \to S$. Então $\varphi = \psi \circ \exp_p : S' \to \mathbb{R}^3$ é uma imersão isométrica e os Lemas 5, 6 e 8 mostram a existência de uma parametrização $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to S'$ que cobre inteiramente S' tal que as curvas coordenadas de $\mathbf{x}$ são as curvas assintóticas de S' (Lema 4). Assim, podemos cobrir S' por uma união de "quadriláteros coordenados" Q_n, com $Q_n \subset Q_{n+1}$. Pelo Lema 3, a área de cda Q_n é menor que 2π. Por outro lado, pelo Lema 1, a área de S' é ilimitada. Isto é uma contradição e conclui a demonstração.

Q.E.D.

Observação 2. O teorema de Hilbert foi generalizado por N.V. Efimov, "Appearance of Singularities on Surfaces of Negative Curvature," *Math. Sb.* 106 (1954). A.M.S. Translations Series 2, Vol. 66, 1968, 154-190, que provou a seguinte conjectura de Cohn-Vossen: *Seja S uma superfície completa com curvatura K satisfazendo $K \leq \delta < 0$. Então não existe uma imersão isométrica de S em* $\mathbb{R}^3$. A demonstração de Efimov é muito longa e seria interessante obter uma demonstração mais curta.

Uma exposição excelente da demonstração de Efimov pode ser encontrada em um artigo de T. Klotz Milnor, "Efimov's Theorem About Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature," *Advances in Mathematics* 8 (1972),

474-543. Este artigo também contém uma outra demonstração do teorema de Hilbert que vale para superfícies de classe C^2.

Para mais detalhes sobre imersões do plano hiperbólico veja M. L. Gromov e V.A. Rokhlin, "Embeddings and Immersions in Riemannian Geometry," *Russian Math. Surveys* (1970), 1-57, especialmente a p.15.

Exercícios

1. (*A Observação de Stoker.*) Seja S uma superfície geométrica completa. Suponha que a curvatura Gaussiana K satisfaça $K \leq \delta < 0$. Mostre que não existe uma imersão isométrica $\varphi : S \to \mathbb{R}^3$ tal que o módulo da curvatura média H seja limitado. Isto prova o teorema de Efimov citado na Observação 2 com a condição adicional sobre a curvatura média. As seguintes indicações podem ser úteis:

   a. Suponha que uma tal φ exista e considere a aplicação de Gauss $N : \varphi(S) \subset \mathbb{R}^3 \to S^2$, onde S^2 é a esfera unitária. Como $K \neq 0$ por toda a parte, N induz uma nova métrica $(\ ,\ )$ em S ao exigirmos que $N \circ \varphi : S \to S^2$ seja uma isometria local. Escolha coordenadas em S tais que as imagens de φ pelas curvas coordenadas sejam linhas de curvatura de $\varphi(S)$. Mostre que os coeficientes da nova métrica neste sistema de coordenadas são

$$g_{11} = (k_1)^2 E, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = (k_2)^2 G,$$

   onde E, $F(= 0)$ e G são os coeficientes da métrica inicial no mesmo sistema.

   b. Mostre que existe uma constante $M > 0$ tal que $k_1^2 > M$, $k_2^2 > M$. Use o fato de que a métrica inical é completa para concluir que a nova métrica também é completa.

   c. Use a parte b para mostrar que S é compacta; logo, ela possui pontos com curvatura positiva, o que é uma contradição.

2. O objetivo deste exercício é provar que não existe uma superfície regular de revolução completa S em $\mathbb{R}^3$ com $K \leq \delta < 0$ (isto prova o teorema

de Efimov para superfícies de revolução). Suponha a existência de uma tal $S \subset \mathbb{R}^3$.

a. Prove que as únicas formas possíveis para a curva geratriz de S são as que estão na Fig. 5.60 (a) e (b), onde a curva meridiano vai para infinito em ambas as direções. Note que na Fig. 5.60 (b) a parte inferior do meridiano é assintótica ao eixo Oz.

b. Parametrize a curva geratriz $(\varphi(s), \psi(s))$ pelo comprimento de arco $s \in R$ de forma que $\psi(0) = 0$. Use as relações $\varphi'' + K\varphi = 0$ (cf. Exemplo 4, seção 3.3, Eq. (9)) e $K \leq \delta < 0$ para concluir que existe um ponto $s_0 \in [0, +\infty)$ tal que $(\varphi'(s_0))^2 = 1$.

c. Mostre que cada uma das três possibilidades para continuar o meridiano $(\varphi(s), \psi(s))$ de S além do ponto $p_0 = (\varphi(s_0), \psi(s_0))$ (descritas na Fig. 5.60 (c) como I, II e III) conduz a uma contradição. Logo, S não é completa.

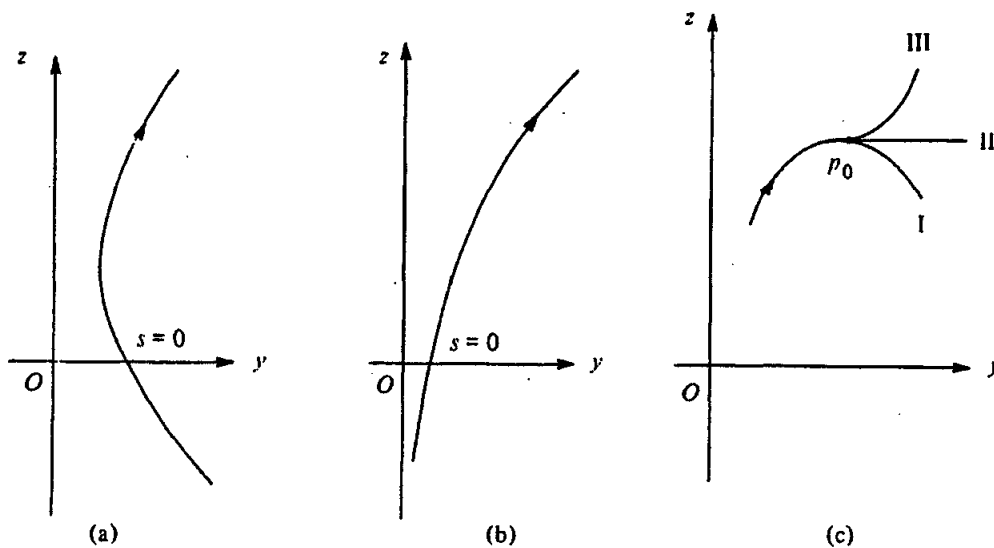



Figura 5-60

3. (*A Demonstração de T. K. Milnor do Teorema de Hilbert.*) Seja S um plano com uma métrica completa g_1 tal que a sua curvatura seja $K \equiv -1$. Suponha que exista uma imersão isométrica $\varphi : S \to \mathbb{R}^3$. Para obter uma contradição, siga os seguintes passos:

a. Considere a aplicação de Gauss $N : \varphi(S) \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e seja g_2 a métrica em S obtida ao se exigir que $N \circ \varphi : S \to S^2$ seja uma isometria local. Escolha coordenadas locais em S de modo que as imagens das curvas coordenadas por φ sejam as linhas assintóticas de $\varphi(S)$. Mostre que, em um tal sistema de coordenadas, g_1 pode ser escrita como

$$du^2 + 2\cos\theta du\, dv + dv^2,$$

e que g_2 pode ser escrita como

$$du^2 - 2\cos\theta du\, dv + dv^2.$$

b. Prove que $g_3 = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$ é uma métrica em S com curvatura nula. Use o fato de que g_1 é uma métrica completa e $3g_3 \geq g_1$ para concluir que a métrica g_3 também é completa.

c. Prove que o plano com a métrica g_3 é globalmente isométrico ao plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ (com a métrica canônica). Assim, existe uma isometria $\psi : S \to \mathbb{R}^2$. Prove também que ψ aplica as linhas assintóticas de S, parametrizadas pelo comprimento de arco, em um sistema retangular de retas em $\mathbb{R}^2$, parametrizadas pelo comprimento de arco.

d. Use o sistema de global coordenadas em S dado na parte **c**, e obtenha uma contradição como foi feito na demonstração do teorema de Hilbert apresentada no texto.

Apêndice: Topologia Elementar dos Espaços Euclidianos

No Capítulo 5 utilizamos com uma certa liberdade algumas propriedades topológicas do $\mathbb{R}^n$. As propriedades usuais dos subconjuntos compactos e conexos de $\mathbb{R}^n$, da maneira como são vistas em um curso de Análise, são essencialmente as que foram utilizadas. Por completitude, vamos fazer aqui uma breve apresentação deste material, com demonstrações. Vamos admitir a familiaridade do leitor com o material do apêndice ao Capítulo 2, Parte A, bem como as propriedades básicas dos números reais.

A. Preliminares

Vamos aqui completar em alguns pontos o material do apêndice ao Capítulo 2, Parte A.

No que vem a seguir, $U \subset \mathbb{R}^n$ denota um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. O índice i assume os valores $1, 2, \dots, m, \dots$, e se $p = (x_1, \dots, x_n)$, $q = (y_1, \dots, y_n)$, $|p - q|$ denota a distância de p a q; isto é,

$$|p-q|^2 = \sum_j (x_i - y_i)^2, \qquad j = 1, \dots, n.$$

DEFINIÇÃO 1. *Uma seqüência* $p_1, \dots, p_i, \dots \in \mathbb{R}^n$ converge *para* $p_0 \in \mathbb{R}^n$ *se dado* $\varepsilon > 0$, *existe um índice* i_0 *da seqüência tal que* $p_i \in B_\varepsilon(p_0)$ *para todo* $i > i_0$. *Nesta situação,* p_0 *é o* limite *da seqüência* $\{p_i\}$, *e isto é denotado por* $\{p_i\} \to p_0$.

A convergência está relacionada com a continuidade pela seguinte proposição.

Proposição 1. *Uma aplicação* $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é contínua em* $p_0 \in U$ *se e somente se para cada seqüência convergente* $\{p_i\} \to p_0$ *em* U, *a seqüência* $\{F(p_i)\}$ *converge para* $F(p_0)$.

Demonstração. Suponha que F seja contínua em p_0 e seja dado $\varepsilon > 0$. Pela continuidade, existe $\delta > 0$ tal que $F(B_\delta(p_0)) \subset B_\varepsilon(F(p_0))$. Seja $\{p_i\}$ uma seqüência em U, com $\{p_i\} \to p_0 \in U$. Então existe um índice i_0, que depende de δ, tal que $p_i \in B_\delta(p_0)$ para $i > i_0$. Assim, para $i > i_0$,

$$F(p_i) \in F(B_\delta(p_0)) \subset B_\varepsilon(F(p_0)),$$

o que implica que $\{F(p_i)\} \to F(p_0)$.

Suponha agora que F não seja contínua em p_0. Então existe um número $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer $\delta > 0$ nós podemos encontrar um ponto $p \in B_\delta(p_0)$, com $F(p) \notin B_\varepsilon(F(p_0))$. Fixe este ε, e faça $\delta = 1, 1/2, \ldots, 1/i, \ldots$, obtendo assim uma seqüência $\{p_i\}$ que converge para p_0. No entanto, como $F(p_i) \notin B_\varepsilon(F(p_0))$, a seqüência $\{F(p_i)\}$ não converge para $F(p_0)$.

Q.E.D.

DEFINIÇÃO 2. *Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é um* ponto de acumulação *de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se toda vizinhança de p em $\mathbb{R}^n$ contém um ponto de A distinto de p.*

A Definição 2 é equivalente a dizer que toda vizinhança V de p contém uma infinidade de pontos de A. De fato, seja $q_1 \neq p$ um ponto de A dado pela definição, e considere a bola $B_\varepsilon(p) \subset V$ tal que $q_1 \notin B_\varepsilon(p)$. Então existe um ponto $q_2 \neq p$, $q_2 \in A \cap B_\varepsilon(p)$. Repetindo este processo, obtemos uma seqüência $\{q_i\}$ em V, onde os $q_i \in A$ são todos distintos. Como $\{q_i\} \to p$, o argumento mostra que p é um ponto de acumulação de A se e somente se p é o limite de alguma seqüência de pontos distintos em A.

Exemplo 1. A seqüência $1, 1/2, \ldots, 1/i, \ldots$ converge para 0. A seqüência $3/2, 4/3, \ldots, i+1/i, \ldots$ converge para 1. A seqüência "alternada" $1, 3/2, 1/2, 4/3, 1/3, \ldots, 1+(1/i), 1/i, \ldots$ não converge e tem dois pontos de acumulação, a saber, 0 e 1 (Fig. A5.1).

Figura A5-1

Deve-se observar que o limite p_0 de uma seqüência convergente tem a propriedade de que qualquer vizinhança de p_0 contém, exceto um número finito, todos os pontos da seqüência, enquanto um ponto de acumulação p de um conjunto tem a propriedade mais fraca de que qualquer vizinhança de p contém uma infinidade de pontos do conjunto. Assim, uma seqüência que não tenha uma subseqüência constante é convergente se e somente se, como um conjunto, ela possuir apenas um ponto de acumulação.

Um exemplo interessante é dado pelos números racionais Q. Pode-se mostrar que Q é um conjunto enumerável; isto é, pode ser considerado como uma seqüência. Como arbitrariamente próximo a qualquer número real existem números racionais, o conjunto de pontos de acumulação da seqüência Q é a reta real $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 3. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é* fechado *se todo ponto de acumulação de F pertence a F. O* fecho *de $A \subset \mathbb{R}^n$ denotado por $\bar{A}$, é a união de A com os seus pontos de acumulação.*

Intuitivamente, F é fechado se ele contém os limites de todas as suas seqüências convergentes, ou, em outras palavras, ele é invariante pela operação de passagem ao limite.

É óbvio que o fecho de um conjunto é um conjunto fechado. Vamos utilizar uma convenção conveniente e dizer que o conjunto vazio $\emptyset$ é aberto e fechado.

Existe uma relação muito simples entre conjuntos abertos e fechados.

Proposição 2. *$F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se e somente se o seu complementar $\mathbb{R}^n - F$ é aberto.*

Demonstração. Suponha que F seja fechado e seja $p \in \mathbb{R}^n - F$. Como p não é um ponto de acumulação de F, existe uma bola $B_\varepsilon(p)$ que não contém pontos de F. Assim, $B_\varepsilon(p) \subset \mathbb{R}^n - F$; logo $\mathbb{R}^n - F$ é aberto.

Reciprocamente, suponha que $\mathbb{R}^n - F$ seja aberto e que p seja um ponto de acumulação de F. Queremos provar que $p \in F$. Suponha o contrário. Então existe uma bola $B_\varepsilon(p) \subset \mathbb{R}^n - F$. Isto implica que $B_\varepsilon(p)$ não contém pontos de F e contradiz o fato de que p é um ponto de acumulação de F.

Q.E.D.

A continuidade também pode ser expressa em termos de conjuntos fechados; isto é uma conseqüência do seguinte fato.

Proposição 3. *Uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua se e somente se para cada conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^m$, $F^{-1}(V)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração. Suponha que F seja contínua e seja $V \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto em $\mathbb{R}^m$. Se $F^{-1}(V) = \emptyset$, não há nada a provar, pois convencionamos que o conjunto vazio é aberto. Se $F^{-1}(V) \neq \emptyset$, seja $p \in F^{-1}(V)$. Então $F(p) \in V$,

e como V é aberto, existe uma bola $B_\varepsilon(F(p)) \subset V$. Pela continuidade de F, existe uma bola $B_\delta(p)$ tal que

$$F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p)) \subset V.$$

Assim, $B_\delta(p) \subset F^{-1}(V)$; portanto, $F^{-1}(V)$ é aberto.

Suponha agora que $F^{-1}(V)$ seja aberto para todo conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^m$. Seja $p \in U$ e $\varepsilon > 0$. Então $A = F^{-1}(B_\varepsilon(F(p))$ é aberto. Assim, existe um $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subset A$. Portanto,

$$F(B_\delta(p)) \subset F(A) \subset B_\varepsilon(F(p));$$

donde, F é contínua em p.

Q.E.D.

Corolário. *$F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua se e somente se para todo conjunto fechado $A \subset \mathbb{R}^m$, $F^{-1}(A)$ é um conjunto fechado.*

Exemplo 2. A Proposição 3 e o seu corolário provavelmente fornecem a melhor maneira de descrever subconjuntos abertos e fechados de $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = (x^2/a^2) - (y^2/b^2) - 1$. Observe que f é contínua, $0 \in \mathbb{R}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}$, e $(0, +\infty)$ é um conjunto aberto em R. Assim, o conjunto

$$F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) = 0\} = f^{-1}(0)$$

é fechado em $\mathbb{R}^2$, e os conjuntos

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) > 0\}, \\ U_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) < 0\} \end{aligned}$$

são abertos em $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, o conjunto

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\} \\ \cup\{(x,y) &\in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0\} \end{aligned}$$

não é nem fechado nem aberto (Fig. A5.2).

O exemplo acima sugere a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 4. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. A* fronteira $\operatorname{Fr} A$ *de A é o conjunto de pontos p em $\mathbb{R}^n$ tais que qualquer vizinhança de p contenha pontos de A e pontos de $\mathbb{R}^n - A$.*

Assim, se A é o conjunto do Exemplo 2, $\operatorname{Fr} A$ é o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Evidentemente, $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se e somente se nenhume ponto de $\operatorname{Fr} A$ pertence a A, e $B \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se e somente se todos os pontos de $\operatorname{Fr} B$ pertencem a B.

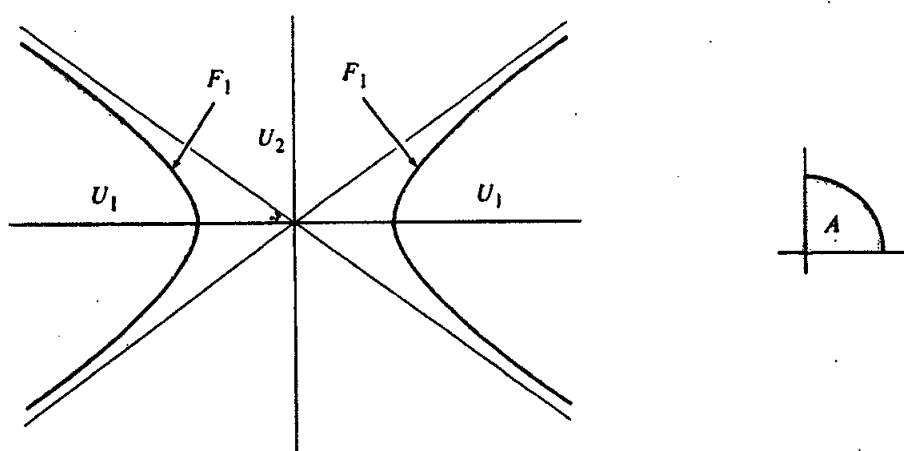



Figura A5-2

Uma observação final sobre estas noções preliminares: Aqui, como no apêndice ao Capítulo 2, as definições foram dadas supondo-se que o $\mathbb{R}^n$ fosse o espaço "ambiente". Convém às vezes, como já observamos no apêndice ao Capítuilo 2, estender estas noções a subconjuntos de um conjunto arbitrário $A \subset \mathbb{R}^n$. Para isto, adotamos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 5. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $V \subset A$ é um* conjunto aberto *em A se existe um conjunto aberto U em $\mathbb{R}^n$ tal que $V = U \cap A$. Uma* vizinhança *de $p \in A$ em A é um conjunto aberto em A contendo p.*

Com esta noção de "proximidade" em A, é simples estender as definições prévias a subconjuntos de A e verificar que as proposições já demonstradas continuam válidas com estas novas definições.

Gostaríamos agora de recordar uma propriedade básica dos números reais. Precisamos de algumas definições.

DEFINIÇÃO 6. *Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ da reta real $\mathbb{R}$ é* limitado superiormente *se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \geq a$ para todo $a \in A$. O número M é chamado uma* cota superior *para A. Quando A é limitado superiormente, o* supremo *ou a* menor cota superior *de A, $\sup A$, é uma cota superior de A que satisfaz a seguinte condição: Dado $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $M - \varepsilon < a$. Trocando os sinais nas desigualdades acima, definimos de modo análogo uma* cota inferior *de A e o* ínfimo *de A,* $\inf A$.

Axioma de Completitude dos Números Reais. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio e limitado superiormente (inferiormente). Então existe* $\sup A$ ($\inf A$).

Há várias maneiras equivalentes de expressar a propriedade básica de completitude dos números reais. Escolhemos a que está acima, que, embora não sendo a mais intuitiva, é provavelmente a mais efetiva.

Convém estabelecer a seguinte convenção. Se $A \subset R$ não é limitado superiormente (inferiormente), dizemos que $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$). Com esta convenção, podemos enunciar o axioma acima da seguinte maneira: *Todo subconjunto não-vazio de números reais tem um* sup *e um* inf.

Exemplo 3. O sup do conjunto $(0, 1)$ é 1, que não pertence ao conjunto. O sup do conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\} \cup \{2\}$$

é 2. O ponto 2 é um ponto *isolado* de B; isto é, ele pertence a B mas não é um ponto de acumulação de B. Observe que o maior ponto de acumulação de B é 1, que não é o sup de B. Contudo, se um conjunto limitado não possui pontos isolados, certamente o seu sup é um ponto de acumulação do conjunto.

Uma conseqüência importante da completitude dos números reais é a seguinte caracterização "intrínseca" da convergência, que, em verdade, é equivalente à completitude (isto, no entanto, não será provado aqui).

Lema 1. *Uma seqüência $\{x_i\}$ de números reais é chamada uma seqüência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$ existe i_0 tal que $|x_i - x_j| < \varepsilon$ para todo i, $j > i_0$. Uma seqüência é convergente se e somente se ela é uma seqüência de Cauchy.*

Demonstração. Seja $\{x_i\} \to x_0$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe i_0 tal que $|x_i - x_0| < \varepsilon/2$ para $i > i_0$. Assim, para i, $j > i_0$, nós temos

$$|x_i - x_j| \leq |x_i - x_0| + |x_j - x_0| < \varepsilon;$$

portanto, $\{x_i\}$ é uma seqüência de Cauchy.

Reciprocamente, seja $\{x_i\}$ uma seqüência de Cauchy. O conjunto $\{x_i\}$ é evidentemente um conjunto limitado. Seja $a_1 = \inf\{x_i\}$, $b_1 = \sup\{x_i\}$. Ou um destes pontos é um ponto de acumulação de $\{x_i\}$ e então $\{x_i\}$ converge para este ponto, ou ambos são pontos isolados do conjunto $\{x_i\}$. Neste último caso, considere o conjunto de pontos no intervalo aberto (a_1, b_1), e sejam a_2 e b_2 os seus inf e sup, respectivamente. Procedendo assim, obtemos que ou $\{x_i\}$ converge ou existem duas seqüências limitadas $a_1 < a_2 < \dots$ e $b_1 > b_2 > \dots$. Seja $a = \sup\{a_i\}$ e $b = \inf\{b_i\}$. Como $\{x_i\}$ é uma seqüência de Cauchy, $a = b$, e este valor comum x_0 é o único ponto de acumulação de $\{x_i\}$. Assim, $\{x_i\} \to x_0$.

Q.E.D.

Esta forma de completitude estende-se naturalmente aos espaços euclidianos.

DEFINIÇÂO 7. *Uma seqüência* $\{p_i\}$, $p_i \in \mathbb{R}^n$ *é chamada uma* seqüência de Cauchy *se dado* $\varepsilon > 0$ *existe* i_0 *tal que a distância* $|p_i - p_j| < \varepsilon$ *para todo* i, $j > i_0$.

Proposição 4. *Uma seqüência* $\{p_i\}$, $p_i \in \mathbb{R}^n$, *converge se e somente se ela é uma seqüência de Cauchy.*

Demonstração. Uma seqüência convergente evidentemente é uma seqüência de Cauchy (veja o argumento no Lema 1). Reciprocamente, seja $\{p_i\}$ uma seqüência de Cauchy, e considere a sua projeção sobre o eixo j do $\mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n$. Isto nos dá uma seqüência de números reais $\{x_{ji}\}$ que, como a projeção não aumenta distâncias, também é uma seqüência de Cauchy. Pelo Lema 1, $\{x_{ji}\} \to x_{j0}$. Segue-se que $\{p_i\} \to p_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$.

Q.E.D.

B. Conjuntos Conexos

DEFINIÇÃO 8. *Uma curva contínua* $\alpha : [a,b] \to A \subset \mathbb{R}^n$ *é chamada um caminho em* A *ligando* $\alpha(a)$ *a* $\alpha(b)$.

DEFINIÇÃO 9. $A \subset \mathbb{R}^n$ *é conexo por caminhos se, dados dois pontos* $p, q \in A$, *existe um caminho em* A *ligando* p *a* q.

Em seções anteriores deste livro, usamos a palavra conexo com o sentido de conexo por caminhos (seção 2.2). Como estávamos considerando apenas superfícies regulares, isto pode ser justificado, como será feito dentro em pouco. No entanto, para um conjunto arbitrário de $\mathbb{R}^n$ a noção de conexidade por caminhos é muito restritiva, e é mais conveniente usar a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 10. $A \subset \mathbb{R}^n$ *é conexo quando não é possível escrever* $A = U_1 \cup U_2$, *onde* U_1, U_2 *são subconjuntos abertos não vazios de* A *e* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Intuitivamente, isto significa que é impossível decompor A em partes disjuntas. Por exemplo, os conjuntos U_1 e U_2 e F_1 no Exemplo 2 não são conexos. Tomando os complementares de U_1 e U_2, podemos trocar a palavra "aberto" por "fechado" na Def. 10.

Proposição 5. *Seja* $A \subset \mathbb{R}^n$ *conexo e seja* $B \subset A$ *ao mesmo tempo aberto e fechado em* A. *Então ou* $B = \emptyset$ *ou* $B = A$.

Demonstração. Suponha que $B \neq \emptyset$ e $B \neq A$ e escreva $A = B \cup (A - B)$. Como B é fechado em A, $A - B$ é aberto em A. Assim, A é a união de conjuntos abertos, não-vazios e disjuntos, a saber, B e $A - B$. Isto contradiz a conexidade de A.

Q.E.D.

A proposição seguinte mostra que a imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é conexa.

Proposição 6. *Seja* $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *contínua e* A *conexo. Então* $F(A)$ *é conexo.*

Demonstração. Suponha que $F(A)$ não seja conexo. Então $F(A) = U_1 \cup U_2$, onde U_1 e U_2 são conjuntos disjuntos, não-vazios e fechados em $F(A)$. Como

F é contínua, $F^{-1}(U_1) \cup F^{-1}(U_2)$ também são conjuntos disjuntos, não-vazios e abertos em A. Como $A = F^{-1}(U_1) \cup F^{-1}(U_2)$, isto contradiz a conexidade de A.

Q.E.D.

Para os propósitos desta seção, convém estender a definição de intervalo da seguinte maneira:

DEFINIÇÃO 11. *Um* intervalo *da reta real* $\mathbb{R}$ *é qualquer conjunto da forma* $a < x < b$, $a \leq x \leq b$, $a < x \leq b$, $a \leq x < b$, $x \in \mathbb{R}$. *Os casos* $a = b$, $a = -\infty$, $b = +\infty$ *não estão excluídos, de forma que um intervalo pode ser um ponto, uma semi-reta ou o próprio* $\mathbb{R}$.

Proposição 7. *$A \subset R$ é conexo se e somente se A é um intervalo.*

Demonstração. Seja $A \subset R$ um intervalo e suponha que A não seja conexo. Vamos chegar a uma contradição.

Como A não é conexo, $A = F_1 \cup F_2$, onde F_1 e F_2 são não-vazios, disjuntos e fechados em A. Seja $a_1 \in F_1$, $b_1 \in F_2$ e suponha que $a_1 < b_1$. Dividindo o intervalo fechado $[a_1, b_1] = I_1$ pelo ponto médio $(a_1 + b_1)/2$, obtemos dois intervalos, um dos quais, que denotaremos por I_2, tem um dos seus pontos extremos em F_1 e o outro em F_2. Considerando o ponto médio de I_2 e procedendo como antes, obtemos um intervalo $I_3 \subset I_2 \subset I_1$. Assim, obtemos uma família de intervalos fechados $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ cujos comprimentos se aproximam de zero. Vamos reescrever $I_i = [c_i, d_i]$. Então $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n \leq \cdots$, e $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq \cdots$. Seja $c = \sup\{c_i\}$ e $d = \inf\{d_i\}$. Como $d_i - c_i$ é arbitrariamente pequeno, $c = d$. Além disto, qualquer vizinhança de c contém algum I_i para i suficientemente grande. Assim, c é um ponto de acumulação tanto de F_1 quanto de F_2. Como F_1 e F_2 são fechados, $c \in F_1 \cap F_2$, e isto contradiz o fato de que F_1 e F_2 são disjuntos.

Reciprocamente, suponha que A seja conexo. Se A possui um único elemento, A é trivialmente um intervalo. Suponha que A tenha pelo menos dois elementos, e sejam $a = \inf A$ e $b = \sup A$, $a \neq b$. Evidentemente, $A \subset [a, b]$. Vamos mostrar que $(a, b) \subset A$, e isto implica que A é um intervalo. Suponha o contrário; isto é, existe t, $a < t < b$, tal que $t \notin A$. Os conjuntos $A \cap (-\infty, t) = V_1$, $A \cap (t, +\infty) = V_2$ são abertos em $A = V_1 \cup V_2$. Como A é conexo, um destes conjuntos, digamos V_2, é vazio. Como $b \in (t, +\infty)$, isto

implica que $b \notin A$ e que b não é um ponto de acumulação de A. Isto contradiz o fato de que $b = \sup A$. Analogamente, se $V_1 = \emptyset$, obtemos uma contradição com o fato de que $a = \inf A$.

Q.E.D.

Proposição 8. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua e A conexo. Suponha que $f(q) \neq 0$ para todo $q \in A$. Então f não muda de sinal em A.*

Demonstração. Pela Prop. 5, $f(A) \subset \mathbb{R}$ é conexo. Pela Prop. 7, $f(A)$ é um intervalo. Por hipótese, $f(A)$ não contém zero. Assim, os pontos em $f(A)$ têm todos o mesmo sinal.

Q.E.D.

Proposição 9. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ conexo por caminhos. Então A é conexo.*

Demonstração. Suponha que A não seja conexo. Então $A = U_1 \cup U_2$, onde U_1, U_2 são conjuntos disjuntos, não-vazios e abertos em A. Seja $p \in U_1$, e $q \in U_2$. Como A é conexo por caminhos, existe um caminho $\alpha : [a, b] \to A$ ligando p a q. Como α é contínua, $B = \alpha([a, b]) \subset A$ é conexo. Coloque $V_1 = B \cap U_1$, $V_2 = B \cap U_2$. Então $B = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são conjuntos disjuntos, não-vazios e abertos em B, e isto é uma contradição.

Q.E.D.

A recíproca, em geral, não é verdadeira. No entanto, existe um caso importante para o qual vale a recíproca.

DEFINIÇÃO 12 *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é* localmente conexo por caminhos *se para cada $p \in A$ e cada vizinhança V de p em A existe uma vizinhança conexa por caminhos $U \subset V$ de p em A.*

Intuitivamente, isto significa que cada ponto de A tem vizinhanças conexas por caminhos arbitrariamente pequenas. Um exemplo simples de um conjunto localmente conexo por caminhos em $\mathbb{R}^3$ é uma superfície regular. De fato, para cada $p \in S$ e cada vizinhança W de p em $\mathbb{R}^3$, existe uma vizinhança $V \subset W$ de p em $\mathbb{R}^3$ tal que $V \cap S$ é homeomorfo a um disco aberto em $\mathbb{R}^2$; como discos abertos são conexos por caminhos, cada vizinhança $W \cap S$ de $p \in S$ contém uma vizinhança conexa por caminhos.

A proposição a seguir mostra que o nosso uso da palavra conexa para uma superfície conexa por caminhos era inteiramente justificado.

Proposição 10. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto localmente conexo por caminhos. Então A é conexo se e somente se ele é conexo por caminhos.*

Demonstração. Metade do enunciado já foi provado na Prop. 9. Agora suponha que A seja conexa. Seja $p \in A$ e seja A_1 o conjunto de pontos em A que podem ser ligados a p por algum caminho em A. Afirmamos que A_1 é aberto em A.

De fato, seja $q \in A_1$ e $\alpha : [a, b] \to A$ um caminho ligando p a q. Como A é localmente conexo por caminhos, existe uma vizinhança V de q em A tal que q pode ser ligado a qualquer ponto $r \in V$ por um caminho $\beta : [b, c] \to V$ (Fig. A5.3).

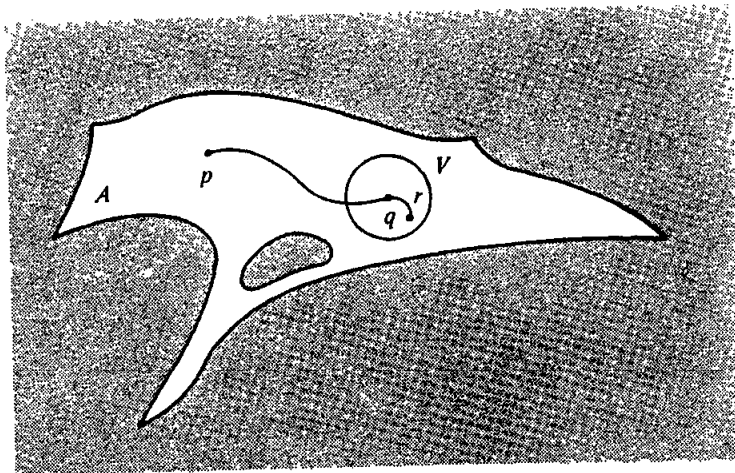



Figura A5-3

Segue-se que o caminho em A,

$$\alpha \circ \beta = \begin{cases} \alpha(t), & t \in [a, b], \\ \beta(t), & t \in [b, c], \end{cases}$$

liga q a r, e isto prova a nossa afirmação.

Por um argumento análogo, prova-se que o complementar de A_1 também é aberto em A. Assim, A_1 é ao mesmo tempo aberto e fechado em A. Como A é localmente conexo por caminhos, A_1 não é vazio. Como A é conexo, $A_1 = A$.

Q.E.D.

Exemplo 4. Um conjunto pode ser conexo por caminhos mas não ser localmente conexo por caminhos. Por exemplo, seja $A \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto constituído de retas verticais passando por $(1/n, 0)$, $n = 1, \dots$, e dos eixos Ox e Oy. É claro que A é conexo por caminhos, mas uma pequena vizinhança de $(0, y)$, $y \neq 0$, não é conexa por caminhos. Isto vem do fato de que embora exista um caminho longo ligando quaisquer dois pontos p, $q \in A$, pode não existir um caminho curto ligando estes pontos (Fig. A5.4).

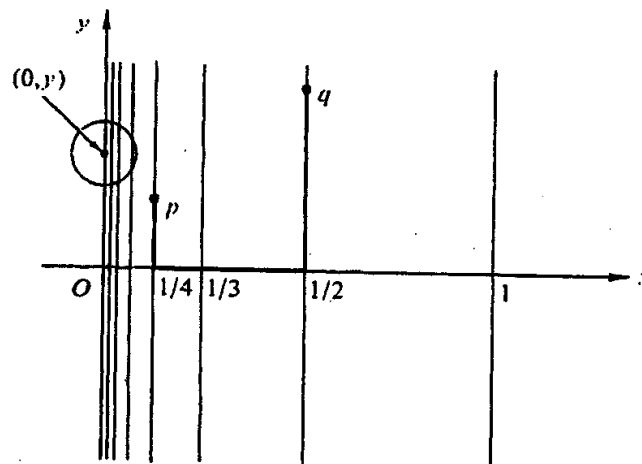



Figura A5-4

C. Conjuntos Compactos

DEFINIÇÃO 13. *Um conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *é* limitado *se ele está contido em alguma bola do* $\mathbb{R}^n$. *Um conjunto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *é* compacto *se ele é fechado e limitado.*

Já nos deparamos com conjuntos compactos na seção 2.7. Por completitude, vamos provar aqui as propriedades 1 e 2 dos conjuntos compactos, que foram utilizadas na seção 2.7.

DEFINIÇÃO 14. *Uma* cobertura aberta *de um conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *é uma família de conjuntos abertos* $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$ *tal que* $\cup_\alpha U_\alpha = A$. *Quando há apenas um número finito na família, dizemos que a cobertura é* finita. *Se a subfamília* $\{U_\beta\}$, $\beta \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, *ainda cobre* A, *isto é,* $\cup_\beta U_\beta = A$, *dizemos que* $\{U_\beta\}$ *é uma* subcobertura *de* $\{U_\alpha\}$.

Proposição 11. *Para um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *K é compacto.*
2. (Heine-Borel). *Toda cobertura aberta de K tem uma subcobertura finita.*
3. (Bolzano-Weierstrass). *Todo subconjunto infinito de K tem um ponto de acumulação em K.*

Demonstração. Vamos provar que $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 1$.

$1 \Longrightarrow 2$: Seja $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, uma cobertura aberta do compacto K, e suponha que $\{U_\alpha\}$ não tenha uma subcobertura finita. Vamos mostrar que isto conduz a uma contradição.

Como K é compacto, ele está contido em uma região retangular

$$B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_j \leq x_j \leq b_j, \qquad j = 1, \dots, n\}.$$

Vamos dividir B pelos hiperplanos $x_j = (a_j + b_j)/2$ (por exemplo, se $K \subset \mathbb{R}^2$, B é um retângulo, e estamos dividindo B em $2^2 = 4$ retângulos). Obtemos assim 2^n regiões retangulares fechadas menores. Por hipótese, pelo menos uma destas regiões, que denotaremos por B_1, é tal que $B_1 \cap K$ não é coberta por um número finito de conjuntos abertos de $\{U_\alpha\}$. Dividimos agora B_1 de forma análoga, e, repetindo este processo, obtemos uma seqüência de regiões retangulares fechadas (Fig. A5.5)

$$B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_1 \supset \dots$$

tal que nenhum $B_i \cap K$ é coberto por um número finito de conjuntos abertos de $\{U_\alpha\}$ e o comprimento do maior lado de B_i converge para zero.

Afirmamos que existe $p \in \cap B_i$. De fato, projetando cada B_i sobre o eixo j de $\mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n$, obtemos uma seqüência de intervalos fechados

$$[a_{j1}, b_{j1}] \supset [a_{j2}, b_{j2}] \supset \dots \supset [a_{ji}, b_{ji}] \supset \dots .$$

Como $(b_{ji} - a_{ji})$ é arbitrariamente pequeno, vemos que

$$a_j = \sup\{a_{ji}\} = \inf\{b_{ji}\} = b_j;$$

donde,

$$a_j \in \cap_i [a_{ji}, b_{ji}].$$

Assim, $p = (a_1, \dots, a_n) \in \cap_i B_i$, como afirmamos.

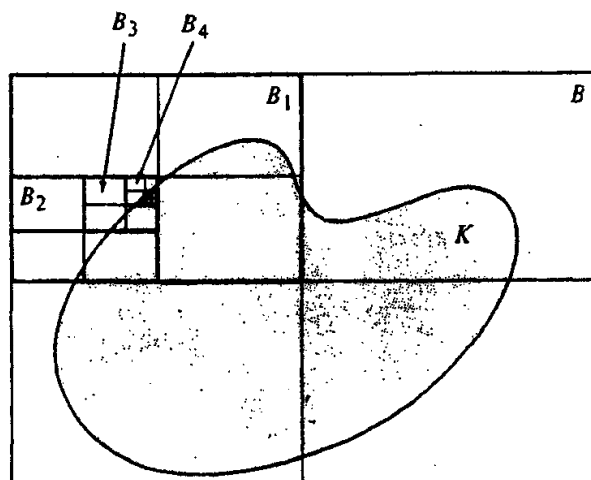



Figura A5-5

Observe que qualquer vizinhança de p contém algum B_i para i suficientemente grande; logo, ela contém uma infinidade de pontos de K. Assim, p é um ponto de acumulação de K, e como K é fechado, $p \in K$. Seja U_0 um elemento da família $\{U_\alpha\}$ que contém p. Como U_0 é aberto, existe uma bola $B_\varepsilon(p) \subset U_0$. Por outro lado, para i suficientemente grande, $B_i \subset B_\varepsilon(p) \subset U_0$. Isto contradiz o fato de que nenhum $B_i \cap K$ pode ser coberto por um número finito de elementos de $\{U_\alpha\}$ e prova que $1 \Longrightarrow 2$.

$2 \Longrightarrow 3$: Suponha que $A \subset K$ é um subconjunto infinito de K e que nenhum ponto de K é um ponto de acumulação de A. Então é possível, para cada $p \in K$, $p \notin A$, escolher uma vizinhança V_p de p tal que $V_p \cap A = \emptyset$ e para cada $q \in A$ escolher uma vizinhança W_q de q tal que $W_q \cap A = q$. Assim, a família $\{V_p, W_q\}$, $p \in K - A$, $q \in A$, é uma cobertura aberta de K. Como A é infinito e a omissão de qualquer W_q da família deixa o ponto q descoberto, a família $\{V_p, W_q\}$ não tem uma subcobertura finita. Isto contradiz a afirmação 2.

$3 \Longrightarrow 1$: Temos que mostrar que K é fechado e limitado. K é fechado, pois se p é um ponto de acumulação de K, tomando bolas concentricas $B_{1/i}(p) = B_i$, obtemos uma seqüência $p_1 \in B_1 - B_2, p_2 \in B_2 - B_3, \dots, p_i \in B_i - B_{i+1}, \dots$ que tem p como ponto de acumulação. Pela afirmação 3, $p \in K$.

K é limitado. Caso contrário, tomando bolas concentricas $B_i(p)$, de raios $1, 2, \dots, i, \dots$, obtemos uma seqüência $p_1 \in B_1$, $p_2 \in B_2 - B_1, \dots, p_i \in B_i - B_{i-1}, \dots$ que não tem ponto de acumulação. Isto prova que $3 \Longrightarrow 1$. **Q.E.D.**

A proposição seguinte mostra que a imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.

Proposição 12. *Seja $F : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínua e seja K compacto. Então $F(K)$ é compacto.*

Demonstração. Se $F(K)$ é finito, ele é trivialmente compacto. Suponha que $F(K)$ não seja finito e considere um subconjunto infinito $\{F(p_\alpha)\} \subset F(K)$, $p_\alpha \in K$. Evidentemente, o conjunto $\{p_\alpha\} \subset K$ é infinito e tem, por compacidade, um ponto de acumulação $q \in K$. Assim, existe uma seqüência $p_1, \ldots, p_i, \ldots, \to q$, $p_i \in \{p_\alpha\}$. Pela continuidade de F, a seqüência $F(p_i) \to F(q) \in F(K)$ (Prop. 1). Assim, $\{F(p_\alpha)\}$ tem um ponto de acumulação $F(q) \in F(K)$; donde $F(K)$ é compacto.

Q.E.D.

A propriedade mais importante dos conjuntos compactos é provavelmente a seguinte.

Proposição 13. *Seja $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um conjunto compacto K. Então existem $p_1, p_2 \in K$ tais que*

$$f(p_2) \leq f(p) \leq f(p_1) \qquad \text{para todo } p \in K;$$

isto é, f atinge um máximo em p_1 e um mínimo em p_2.

Demonstração. Vamos provar a existência de p_1; o caso do mínimo pode ser tratado analogamente.

Pela Prop. 12, $f(K)$ é compacto, e portanto fechado e limitado. Assim, existe $\sup F(K) = x_1$. Como $f(K)$ é fechado, $x_1 \in f(K)$. Segue-se que existe $p_1 \in K$ com $x_1 = f(p_1)$. É claro que $f(p) \leq f(p_1) = x_1$, para todo $p \in K$.

Q.E.D.

Mesmo sem utilizá-la, a noção de continuidade uniforme cabe tão naturalmente neste contexto que vamos dizer algumas palavras sobre ela.

Uma aplicação $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é *uniformemente contínua* em A se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p))$ para todo $p \in A$.

Formalmente, a diferença entre esta definição e a definição de continuidade (simples) é o fato de que aqui, dado ε, o número δ é o mesmo para todo $p \in A$,

enquanto que na continuidade simples, dado ε, o número δ pode variar com p. Assim, a continuidade uniforme é uma noção global, e não meramente local.

Um fato importante é que em conjuntos compactos estas duas noções coincidem. Mais precisamente, *seja* $F : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *contínua e* K *compacto. Então* F *é uniformemente contínua em* K.

A prova de ste fato é simples se lembrarmos da noção de número de Lebesgue de uma cobertura aberta, introduzida na seção 2.7. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe para cada $p \in K$ um número $\delta(p) > 0$ tal que $F(B_{\delta(p)}(p)) \subset B_{\varepsilon/2}(F(p))$. A família $\{B_{\delta(p)}(p),\ p \in K\}$ é uma cobertura aberta de K. Seja $\delta > 0$ o número de Lebesgue desta família (seção 2.7, propriedade 3). Se $q \in B_\delta(p)$, $p \in K$, então q e p pertencem a algum elemento da cobertura aberta. Assim, $|F(p) - F(q)| < \varepsilon$. Como q é arbitrário, $F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p))$. Isto mostra que δ satisfaz a definição de continuidade uniforme, como desejávamos.

D. Componentes Conexas

Quando um conjunto não é conexo, ele pode ser separado em suas componentes conexas. Para tornar esta idéia precisa, vamos primeiro provar a seguinte proposição.

Proposição 14. *Seja* $C_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ *uma família de conjuntos conexos tais que*

$$\cap_\alpha C_\alpha \neq \emptyset.$$

Então $\cup_\alpha C_\alpha = C$ *é um conjunto conexo*

Demonstração. Suponha que $C = U_1 \cup U_2$, onde U_1 e U_2 são conjuntos disjuntos, não-vazios e abertos em C, e que algum ponto $p \in \cap_\alpha C_\alpha$ pertence a U_1. Seja $q \in U_2$. Como $C = \cup_\alpha C_\alpha$ e $p \in \cap_\alpha C_\alpha$, existe algum C_α tal que $p, q \in C_\alpha$. Então $C_\alpha \cap U_1$ e $C_\alpha \cap U_2$ são conjuntos disjuntos, não-vazios e abertos em C_α e isto mostra que C é conexo.

Q.E.D.

DEFINIÇÃO 15. *Seja* $A \subset \mathbb{R}^n$ *e* $p \in A$. *A união de todos os subconjuntos conexos de* A *que contêm* p *é chamada a* componente conexa *de* A *contendo* p.

Pela Prop. 14, uma componente conexa é um conjunto conexo. Intuitivamente a componente conexa de A contendo $p \in A$ é o maior subconjunto conexo de A(isto é, ele não está contido em nenhum outro subconjunto conexo de A que contenha p).

Uma componente conexa de um conjunto A é sempre fechada em A. Isto é uma conseqüência da seguinte proposição.

Proposição 15. *Seja $C \subset A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto conexo. Então o fecho $\bar{C}$ de C em A é um conjunto conexo.*

*Demonstração.*Vamos supor que $\bar{C} = U_1 \cup U_2$, onde U_1 e U_2 são conjuntos disjuntos, não-vazios e abertos em $\bar{C}$. Como $\bar{C} \supset C$, os conjuntos $C \cap U_1 = V_1$, $C \cap U_2 = V_2$ são abertos em C, disjuntos e $V_1 \cap V_2 = C$. Vamos provar que V_1 e V_2 não são vazios, obtendo assim uma contradição com a conexidade de C.

Seja $p \in U_1$. Como U_1 é aberto em $\bar{C}$, existe uma vizinhança W de p em A tal que $W \cap \bar{C} \subset U_1$. Como p é um ponto de acumulação de C, existe $q \in W \cap C \subset W \cap \bar{C} \subset U_1$. Assim, $q \in C \cap U_1 = V_1$, e V_1 não é vazio. De maneira análoga, pode-se mostrar que V_2 não é vazio.

Q.E.D.

Corolário. *Uma componente conexa $C \subset A \subset \mathbb{R}^n$ de um conjunto A é fechada em A.*

De fato, se $\bar{C} \neq C$, existe um conjunto conexo de A, a saber, $\bar{C}$ que contém C propriamente. Isto contradiz a maximalidade da componente conexa C.

Em alguns casos especiais, uma componente conexa de um conjunto A também é um conjunto aberto em A.

Proposição 16. *Seja $C \subset A \subset \mathbb{R}^n$ uma componente conexa de um conjunto localmente conexo por caminhos A. Então C é aberto em A.*

Demonstração. Seja $p \in C \subset A$. Como A é localmente conexo por caminhos, existe uma vizinhança conexa por caminhos V de p em A. Pela Prop. 9, V é conexa. Como C é máxima, $C \supset V$; donde, C é aberto em A.

Q.E.D.

Bibliografia e Comentários

O trabalho básico de geometria diferencial de superfícies é o artigo de Gauss "Disquisitiones generales circa superficies curvas," *Comm. Soc. Göttingen* Bd 6, 1823-1827. Há traduções em várias línguas, por exemplo,

1. Gauss, K. F., *General Investigations of Curved Surfaces*, Raven Press, New York, 1965.

Acreditamos que o leitor deste livro está em condições de tentar entender este artigo. Serão necessários pacência e mente aberta, mas a experiência é muito compensadora.

Uma referência clássica para a geometria diferencial de superfícies é o tratado, em quatro volumes, de Darboux:

2. Darboux, G., *Théorie des Surfaces*, Gauthiers-Villars, Paris, 1887, 1889, 1894, 1896. Há uma reimpressão publicada pela Chelsea Publishing Co., Inc., New York.

A leitura é difícil para iniciantes. No entanto, além do grande volume de informação, há ainda muitas idéias neste livro que não foram exploradas e vale a pena voltar a ele de tempos em tempos.

O texto clássico em inglês que exerceu maior influência foi provavelmente

3. Eisenhart, L.P., *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Ginn and Company, Boston, 1909, reimpresso pela Dover, New York, 1960.

Uma excelente apresentação de algumas idéias intuitivas da geometria diferencial clássica pode ser encontrada no Capítulo 4 de

4. Hilbert, D., e S. Cohn-Vossen, Geometry and Imagination, Chelsea Publishing Company, Inc., New York, 1962 (tradução de um livro em alemão, publicado originalmente em 1932).

Apresentaremos abaixo, em ordem cronológica, alguns outros livros texto. Eles estão mais ou menos no nível deste livro. Uma lista mais completa pode ser encontrada em [9], que, além disto, contém vários teoremas globais.

5. Struik, D. J., *Lectures on Classical Differential Geometry,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950.

6. Pogorelov, A. V., *Differential Geometry*, Noordhoff, Groningen, Netherlands, 1958.

7. Willmore, T. J., *An Introduction to Differential Geometry*, Oxford University Press, Inc., London, 1959.

8. O'Neill, B., *Elementary Differential Geometry,* Academic Press, New York, 1966.

9. Stoker, J.J., *Differential Geometry,* Wiley-Interscience, New York, 1969.

Uma exposição clara e elementar do método do referêncial móvel, que não é tratado em nosso livro, pode ser encontrada em [8]. Mais detalhes sobre a teoria das curvas, tratada aqui de forma sucinta, podem ser encontrados em [5], [6] e [9].

Mesmo não sendo livros texto, as seguintes referências devem ser incluídas. A referência [10] é uma bela apresentação de alguns resultados globais sobre curvas e superfícies, e [11] é um conjunto de notas que se tornou um clássico desta área.

10. Chern, S. S., *Curves and Surfaces in Euclidean Spaces*, Studies in Global Geometry and Analysis, MAA Studies in Mathematics, The Mathematical Association of America, 1967.

11. Hopf, H., *Lectures on Differential Geometry in the Large*, notas publicadas pela Stanford University, 1955. Reproduzida em Lecture Notes in Math., 1000, Springer-Verlag, 1983.

Para leituras mais avançadas, deve-se começar provavelmente com o estudo de variedades diferenciáveis e grupos de Lie. Por exemplo,

12. Spivak, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. I, Brandeis University, 1970. Reeditada por Publish or Perish, Inc.

13. Warner, F., Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott, Foresman, Glenview, III., 1971. Reeditada pela Springer em 1983.

A referência [12] é uma leitura agradável. Os capítulos 1-4 de [13] fornecem uma apresentação sucinta e eficiente dos aspectos básicos do assunto.

Posteriormente, há muitas opções como material de leitura, dependendo dos interesses e preferências do leitor. Incluímos abaixo uma possível opção, que, de maneira alguma, é única. Em [17] e [18] pode-se encontrar extensas listas de livros e artigos.

14. Berger, M., P. Gauduchon, e E. Mazet, Le Spectre d'une Variété Riemannienne, Lecture Notes 194, Springer, Berlin, 1971.

15. Bishop, R. L., e R. J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York, 1964.

16. Cheeger, J., e D. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1974.

17. Helgason, S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1963.

18. Kobayashi, S., e K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vols. I e II, Wiley-Interscience, New York, 1963 e 1969.

19. Gromoll, D., Klingenberg, W., e Meyer W., *Riemannsche Geometrie in Grossen*, Lecture Notes 55, Springer-Verlag, Berlin 1968.

20. Lawson, B., Lectures on minimal Submanifolds, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1973. Reproduzido em Mathematics Lecture Series, 9, Publish or Perish, Inc. 1980.

21. Milnor, J., Morse Theory, Princeton University Press, Princeton N.J., 1963.

22. Spivak, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vols. 2, 3, 4, 5. Publish or Perish, Inc. 1975.

23. do Carmo, M., Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, IMPA, 3ª edição, 2005.

A teoria de subvariedades mínimas, [20] e as referências ali citadas; os problemas associados com o espectro, [14]; e o comportamento topológico da variedades com curvatura positiva, [16] e [19], são apenas três dos muitos tópicos interessantes da geometria diferencial dos dias de hoje.

Sugestões e Respostas

Seção 1.3

2. a. $\alpha(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$; ver Fig. 1.7. Pontos singulares: $t = 2\pi n$, onde n é um inteiro arbitrário.

7. b. Aplique o teorema do valor médio a cada uma das funções x, y, z para provar que o vetor $(\alpha(t+h) - \alpha(t+k)/(h-k)$ converge para o vetor $\alpha'(t)$ quando h, $k \to 0$. Como $\alpha'(t) \neq 0$, a reta determinada por $\alpha(t+h)$, $\alpha(t+k)$ converge para a reta deteminada por $\alpha'(t)$.

8. Pela definição de integral, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta' > 0$ tal que se $|P| < \delta'$, então

$$\left| \left(\int_a^b |\alpha'(t)|\, dt \right) - \sum (t_i - t_{i-1})\, |\alpha'(t_i)| \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, como α' é uniformemente contínua em $[a,b]$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta'' > 0$ tal que se t, $s \in [a,b]$ com $|t-s| < \delta''$, então

$$|\alpha'(t) - \alpha'(s)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Faça $\delta = \min(\delta', \delta'')$. Então se $|P| < \delta$, obtemos, usando o teorema do valor médio para funções vetoriais,

$$\begin{aligned} &\left| \sum |\alpha'(t_{i-1}) - \alpha'(t_i)| - \sum (t_{i-1} - t_i)\, |\alpha'(t_i)| \right| \\ \leq\ &\left| \sum (t_{i-1} - t_i) \sup_{s_i} |\alpha'(s_i)| - \sum (t_{i-1} - t_i) \sup |\alpha'(t_i)| \right| \\ \leq\ &\left| \sum (t_{i-1} - t_i) \sup_{s_i} |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)| \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

onde $t_{i-1} \leq s_i \leq t_i$. Isto, junto com o que está acima, fornece a desigualdade desejada.

Seção 1.4

2. Sejam $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $p = (x, y, z)$ pontos pertencentes ao plano P. Então $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 = ax + by + cz + d$. Assim, $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Como o vetor $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ é paralelo a P, o vetor (a, b, c) é normal a P. Dado um ponto $p = (x, y, z) \in P$, a distância ρ do plano P à origem O é dada por $\rho = |p| \cos\theta = (p \cdot v)/|v|$, onde θ é o ângulo de Op com o vetor normal v. Como $p \cdot v = -d$,

$$\rho = \frac{p \cdot v}{|v|} = -\frac{d}{|v|}.$$

3. Este é o ângulo entre os seus vetores normais.

4. Dois planos são paralelos se e somente se os seus vetores normais são paralelos.

6. v_1 e v_2 são ambos perpendiculares à reta de interseção. Assim, $v_1 \wedge v_2$ é paralelo a esta reta.

7. Um plano e uma reta são paralelos quando um vetor normal ao plano é normal à direção da reta.

8. A direção da perpendicular comum às retas dadas é a direção de $u \wedge v$. A distância entre estas retas é obtida projetando-se o vetor $r = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ sobre a perpendicular comum. Tal projeção é evidentemente o produto interno de r com o vetor unitário $(u \wedge v)/|u \wedge v|$.

Seção 1.5

2. Use o fato de que $\alpha' = t$, $\alpha'' = kn$, $\alpha''' = kn' + k'n = -k^2 t + k'n - k\tau b$.

4. Derive $\alpha(s) = \lambda(s)n(s) = \text{const.}$, obtendo

$$(1 - \lambda k)t + \lambda' n - \lambda\tau b = 0.$$

Segue-se que $\tau = 0$ (a curva está contida em um plano) e que $\lambda = \text{const.} = 1/k$.

7. **a.** Parametrize α pelo comprimento de arco.

b. Parametrize α pelo comprimento de arco s. As retas normais em s_1 e s_2 são

$$\beta_1(t) = \alpha(s_1) + tn(s_1), \qquad \beta_2(\tau) = \alpha(s_2) + \tau n(s_2), \qquad t \in \mathbb{R},\ \tau \in \mathbb{R},$$

respectivamente. O ponto de interseção entre elas será dado pelos valores de t e τ tais que

$$\frac{\alpha(s_2) - \alpha(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{tn(s_1) - \tau n(s_2)}{s_2 - s_1}.$$

Tome o produto interno do que está acima com $\alpha'(s_1)$ para obter

$$1 = (-\lim \tau)_{s_2 \to s_1} \langle \alpha'(s_1), n'(s_1) \rangle .$$

Segue-se que τ converge para $1/k$ quando $s_2 \to s_1$.

13. Para provar que a condição é necessária, derive três vezes $|\alpha(s)|^2 = \text{const.}$, obtendo $\alpha(s) = -Rn + R'Tb$. Para provar que a condição é suficiente, derive $\beta(s) = \alpha(s) + Rn - R'Tb$, obtendo

$$\beta'(s) = t + R(-kt - \tau b) + R'n - (TR')'b - R'n = -(R\tau + (TR')')b.$$

Por outro lado, derivando $R^2 + (TR')^2 = \text{const.}$, obtem-se

$$0 = 2RR' + 2(TR')(TR')' = \frac{2R'}{\tau}(R\tau + (TR')'),$$

pois $k' \neq 0$ e $\tau \neq 0$. Logo, $\beta(s)$ é uma constante p_0, e

$$|\alpha(s) - p_0|^2 = R^2 + (TR')^2 = \text{ const.}$$

15. Como $b' = \tau n$ é conhecido, $|\tau| = |b'|$. Então n está determinado, a menos de sinal. Como $t = n \wedge b$ e a curvatura é positiva e dada por $t' = kn$, a curvatura pode também pode ser determinada.

16. Mostre primeiro que

$$\frac{n \wedge n' \cdot n''}{|n'|^2} = \frac{\left(\frac{k}{\tau}\right)'}{\left(\frac{k}{\tau}\right)^2 + 1} = a(s).$$

Assim, $\int a(s)\,ds$ $=\text{arctg}\,(k/\tau)$; logo k/τ pode ser determinado; como k é positivo, isto também fornece o sinal de τ. Além disto, $|n'|^2 = |-kt-\tau b|^2 = k^2+\tau^2$ também é conhecido. Junto com k/τ, isto é o bastante para determinar k^2 e τ^2.

17. **a.** Seja a um vetor unitário da direção fixa e seja θ o ângulo constante. Então $t\cdot a = \cos\theta = \text{const.}$, cuja derivada nos dá $n\cdot a = 0$. Assim, $a = t\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta$, cuja derivada nos dá $k\cos\theta + \tau\,\text{sen}\,\theta = 0$, ou k/τ $=\text{tg}\,\theta$ =const.. Reciprocamente, se $k/\tau = \text{const.} = -\text{tg}\,\theta = -(\text{sen}\,\theta/\cos\theta)$, podemos fazer o caminho inverso, e obter que $t\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta$ é um vetor constante a. Assim, $t\cdot a = \cos\theta = \text{const.}$.

b. Pelo argumento da parte **a**, segue-se imediatamente que $t\cdot a = \text{const.}$ implica $n\cdot a = 0$; isto significa que n é paralelo a um plano normal a a. Reciprocamente, se $n\cdot a = 0$, então $(dt/ds)\cdot a = 0$; donde, $t\cdot a = \text{const.}$

c. Pelo argumento da parte **a**, segue-se que $t\cdot a = \text{const.}$ implica que $b\cdot a = \text{const.}$ Reciprocamente, se $b\cdot a = \text{const.}$, derivando, obtemos que $n\cdot a = 0$.

18. **a.** Parametrize α pelo comprimento de arco s e derive $\bar{\alpha} = \alpha + rn$ com relação a s, obtendo

$$\frac{d\bar{\alpha}}{ds} = (1-rk)t + R'n - r\tau b.$$

Como $d\bar{\alpha}/ds$ é tangente a $\bar{\alpha}$, $(d\bar{\alpha}/ds)\cdot n = 0$; donde, $\mathbb{R}' = 0$.

b. Parametrize α pelo comprimento de arco s, e denote por $\bar{s}$ e $\bar{t}$ o comprimento de arco e o vetor tangente unitário de $\bar{\alpha}$. Como $d\bar{t}/ds = (d\bar{t}/d\bar{s})(d\bar{s}/ds)$, obtemos que

$$\frac{d}{ds}(t\cdot\bar{t}) = t\cdot\frac{d\bar{t}}{ds} + \frac{dt}{ds}\cdot\bar{t} = 0;$$

donde, $t\cdot\bar{t} = \text{const.} = \cos\theta$. Assim, usando que $\bar{\alpha} = \alpha + rn$, temos

$$\cos\theta = \bar{t}\cdot t = \frac{d\bar{\alpha}}{ds}\frac{ds}{d\bar{s}}\cdot t = \frac{ds}{d\bar{s}}(1-rk),$$

$$|\text{sen}\theta| = |\bar{t}\wedge t| = \left|\frac{ds}{d\bar{s}}(t+rn')\wedge t\right| = \left|\frac{ds}{d\bar{s}}r\tau\right|.$$

Destas duas relações, segue-se que

$$\frac{1-rk}{r\tau} = \text{const.} = \frac{B}{r}.$$

Assim, fazendo $r = A$, finalmente obtemos que $Ak + B\tau = 1$.

Reciprocamente, suponha que seja válida esta última relação, faça $A = r$, e defina $\bar{\alpha} = \alpha + rn$. Então, utilizando novamente a relação, obtemos

$$\frac{d\bar{\alpha}}{ds} = (1 - rk)t - r\tau b = \tau(Bt - rb).$$

Assim, um vetor unitário $\bar{t}$ de $\bar{\alpha}$ é $(Bt - rb)/\sqrt{B^2 + R^2} = \bar{t}$. Segue-se que

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = ((Bk - r\tau)/\sqrt{B^2 + R^2})n.$$

Portanto, $\bar{n}(s) = \pm n(s)$, e as retas normais de $\bar{\alpha}$ e α em s coincidem. Assim, α é uma curva de Bertrand.

c. Suponha a existência de dois pares de Bertrand $\bar{\alpha} = \alpha + \bar{r}n$, $\tilde{\alpha} = \alpha + \tilde{r}n$. Pela parte b existem constantes c_1 e c_2 tais que $1 - \bar{r}k = c_1(\bar{r}\tau)$, $1 - \tilde{r}k = c_2(\tilde{r}\tau)$. É claro que $c_1 \neq c_2$. Derivando estas expressões, obtemos $k' = \tau' c_1$, $k' = \tau' c_2$, respectivamente. Isto implica que $k' = \tau' = 0$. Utilizando a parte da unicidade do teorema fundamental da teoria local de curvas, vê-se facilmente que a hélice circular é a única curva que satisfaz $k' = \tau' = 0$.

Seção 1.6

1. Suponha que $s = 0$, e considere a forma canônica local em torno de $s = 0$. Pela condição 1, P tem a forma $z = cy$, ou $y = 0$. O plano $y = 0$ é o plano retificante, que não satisfaz a condição 2. Observe agora que se $|s|$ é suficientemente pequeno, $y(s) > 0$, e $z(s)$ tem o mesmo sinal que s. Pela condição 2, $c = z/y$ é ao mesmo tempo positivo e negativo. Assim, P é o plano $z = 0$.

2. a. Considere a forma canônica de $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ em uma vizinhança de $s = 0$. Seja $ax + by + cz = 0$ o plano que passa por $\alpha(0)$, $\alpha(0 + h_1)$, $\alpha(0 + h_2)$. Defina a função $F(s) = ax(s) + by(s) + cz(s)$ e note que $F(0) = F(h_1) = F(h_2) = 0$. É claro que a, b e c (donde F) dependem de h_1 e h_2. Use a forma canônica para mostrar que $F'(0) = a$, $F''(0) = bk$. Use o teorema do valor médio para mostrar que quando $h_1, h_2 \to 0$, então $a \to 0$ e $b \to 0$. Assim, quando $h_1, h_2 \to 0$ o plano $ax + by + cz = 0$ se aproxima do plano $z = 0$, isto é, do plano osculador.

Seção 1.7

1. Não. Use a desigualdade isoperimétrica.

2. Seja S^1 o círculo tal que $\overline{AB}$ é uma corda de S^1 e um dos dois arcos α e β determinados por A e B, digamos α, tem comprimento l. Considere a curva fechada C^1 por partes (ver Observação 2 depois do Teorema 1) formada por β e C. Considere β fixa e C variando na família de todas as curvas ligando A a B com comprimento l. Pela desigualdade isoperimétrica para curvas C^1 por partes, a curva desta família que delimita a maior área é S^1. Como β está fixada, o arco de círculo α é a solução do nosso problema.

4. Escolha coordenadas tais que o centro O esteja em p e que os eixos Ox e Oy estejam ao longo dos vetores tangente e normal em p, respectivamente. Parametrize C pelo comprimento de arco, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, e suponha que $\alpha(0) = p$. Considere o desenvolvimento de Taylor (finito)

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s + \alpha''(0)\frac{s^2}{2} + R,$$

onde $\lim_{s\to 0} R/s^2 = 0$. Seja k a curvatura de α em $s = 0$, e obtenha

$$x(s) = s + R_x, \qquad y(s) = \pm\frac{ks^2}{2} + R_y,$$

onde $R = (R_x, R_y)$ e o sinal depende da orientação de α. Assim,

$$|k| = \lim_{s\to 0} \frac{2\,|y(s)|}{s^2} = \lim_{d\to 0} \frac{2h}{d^2}.$$

5. Seja O o centro do disco D. Contraia a fronteira de D através de uma família de círculos concêntricos até que ela encontre a curva C em um ponto p. Use o Exercício 4 para mostrar que a curvatura k de C em p satisfaz $|k| \geq 1/r$.

8. Como α é simples, temos, pelo teorema do índice de rotação,

$$\int_0^l k(s)\, ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi.$$

Como $k(s) \leq c$, obtemos

$$2\pi = \int_0^l k(s)\, ds \leq c \int_0^l ds = cl.$$

9. Primeiro observamos que a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo. Como a curva é convexa, cada reta tangente determina um semi-plano que contém a curva. A interseção de todos estes semiplanos é um conjunto convexo K' que contém o conjunto K limitado pela curva. Além disto, $K' \subset K$. Com efeito, se existe $q' \in K'$, $q' \notin K$, o segmento $q'p'$, com $p' \in K \subset K'$, está contido em K' por convexidade, e encontra a curva. Vê-se facilmente que isto é uma contradição.

11. Observe que a área limitada por H é maior ou igual à área limitada por C e que o comprimento de H é menor ou igual ao comprimento de C. Considere a expansão de H através de uma família de curvas paralelas a H (Exercício 6) até que o seu comprimento seja o de C. Como a área ou permanece a mesma ou é aumentada neste processo, obtemos uma curva convexa H' com o mesmo comprimento de C mas limitando uma área maior ou igual à área de C.

12.

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1/2} d\rho \right) d\theta = \frac{1}{2} 2\pi, \\ M_2 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1} d\rho \right) d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

(Ver Fig. 1.40.)

Seção 2.2

5. Sim.

11. **b.** Para ver que $\mathbf{x}$ é injetiva, observe que a partir de z se obtem $\pm u$. Como $\cosh v > 0$, o sinal de u é o mesmo que o sinal de x. Assim, $\operatorname{senh} v$ (donde v) fica determinado.

13. $\mathbf{x}(u,v) = (\operatorname{senh} u \cosh v, \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \cosh v)$.

15. Elimine t na equação $x/a = y/t = -(z-t)/t$ da reta ligando $p(t) = (0,0,t)$ a $q(t) = (a,t,0)$.

17. **c.** Estenda a Prop. 3 para curvas planas e aplique o argumento do Exemplo 5.

18. Para a primeira parte, use o teorema da função inversa. Para determinar F, faça $u = \rho^2$, $v = \operatorname{tg}\varphi$, $w = \operatorname{tg}^2\theta$. Escreva $x = f(\rho,\theta)\cos\varphi$, $y = f(\rho,\theta)\operatorname{sen}\varphi$, onde f é uma função a ser determinada. Então

$$x^2 + y^2 + z^2 = f^2 + z^2 = \rho^2, \qquad \frac{f^2}{z^2} = \operatorname{tg}^2\theta.$$

Segue-se que $f = \rho\operatorname{sen}\theta$, $z = \rho\cos\theta$. Portanto,

$$F(u,v,w) = \left(\frac{\sqrt{uw}}{\sqrt{(1+w)(1+v^2)}}, \frac{v\sqrt{u}}{\sqrt{(1+w)(1+v^2)}}, \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1+w}}\right).$$

19. Não. Para C, observe que nenhuma vizinhança em $\mathbb{R}^2$ de um ponto no arco vertical pode ser escrita como o gráfico de uma função diferenciável. O mesmo argumento se aplica a S.

Seção 2.3

1. Como $A^2 =$ identidade, $A = A^{-1}$.

5. d é a restrição a S de uma função $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} d(x,y,z) &= \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\}^{1/2}, \\ (x,y,z) &\neq (x_0,y_0,z_0). \end{aligned}$$

8. Se $p = (x, y, z)$, $F(p)$ está na interseção de H com a reta $t \to (tx, ty, z)$, $t > 0$. Assim,

$$F(p) = \left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} x, \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} y, z \right).$$

Seja U dado por $\mathbb{R}^3$ menos o eixo Oz. Então $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida pela expressão acima é diferenciável.

13. Se f é uma tal restrição, f é diferenciável (Exemplo 1). Para provar a recíproca, seja $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização de S em p. Como na Prop. 1, estenda $\mathbf{x}$ a $F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Seja W uma vizinhança de p em $\mathbb{R}^3$ na qual F^{-1} é um difeomorfismo. Defina $g : W \to \mathbb{R}$ por $g(q) = f \circ \mathbf{x} \circ \pi \circ F^{-1}(q)$, $q \in W$, onde $\pi : U \times \mathbb{R} \to U$ é a projeção natural. Então g é diferenciável, e a restrição $g| W \cap S = f$.

16. F é diferenciável em $S^2 - \{N\}$ pois é uma composição de aplicações diferenciáveis. Para provar que F é diferenciável em N, considere a projeção estereográfica π_S referente ao pólo sul $S = (0, 0, -1)$ e faça $Q = \pi_S \circ F \circ \pi_S^{-1} : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (onde, é claro, estamos identificando o plano $z = 1$ com $\mathbb{C}$). Mostre que $\pi_N \circ \pi_S^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ é dada por $\pi_N \circ \pi_S^{-1}(\zeta) = 1/\bar{\zeta}$. Conclua que

$$Q(\zeta) = \frac{\zeta^n}{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \zeta + \ldots + \bar{a}_n \zeta^n};$$

donde, Q é diferenciável em $\zeta = 0$. Assim, $F = \pi_S^{-1} \circ Q \circ \pi_S$ é diferenciável em N.

Seção 2.4

1. Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva na superfície pasando por $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ para $t = 0$. Assim, $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$; donde, $f_x x'(0) + f_y y'(0) + f_z z'(0) = 0$, onde todas as derivadas são calculadas em p_0. Isto significa que todos os vetores tangentes em p_0 são perpendiculares ao vetor (f_x, f_y, f_z), e daí temos a equação desejada.

4. Denote a derivada de $f(y/x)$ com relação a $t = y/x$ por f'. Então $z_x = f - (y/x)f'$, $z_y = f'$. Assim, a equação do plano tangente em (x_0, y_0) é $z = x_0 f + (f - (y_0/x_0)f')(x - x_0) + f'(y - y_0)$, onde as funções são calculadas em (x_0, y_0). Segue-se que se $x = 0$, $y = 0$, então $z = 0$.

12. Para a ortogonalidade, considere, por exemplo, as duas primeiras superfícies. As suas normais são paralelas aos vetores $(2x - a, 2y, 2z)$, $(2x, 2y - b, 2z)$. Na interseção destas superfícies, $ax = by$; introduza esta relação no produto interno entre os vetores acima para mostrar que este produto interno é zero.

13. **a.** Seja $\alpha(t)$ uma curva em S com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Então

$$df_p(w) = \frac{d}{dt}\left(\langle \alpha(t) - p_0, \alpha(t) - p_0\rangle^{1/2}\right)\Big|_{t=0} = \frac{\langle w, p - p_0\rangle}{|p - p_0|}.$$

Segue-se que p é um ponto crítico de f se e somente se $\langle w, p - p_0\rangle = 0$ para todo $w \in T_pS$.

14. **a.** $f(t)$ é contínua no intervalo $(-\infty, c)$, e

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0, \qquad \lim_{t\to c, t<c} f(t) = +\infty.$$

Assim, para algum $t_1 \in (-\infty, c)$, $f(t_1) = 1$. Por argumentos análogos, encontramos raízes reais $t_2 \in (c, b)$, $t_3 \in (b, a)$.

b. A condição para que as superfícies $f(t_1) = 1$ e $f(t_2) = 1$ sejam ortogonais é

$$f_x(t_1)f_x(t_2) + f_y(t_1)f_y(t_2) + f_z(t_1)f_z(t_2) = 0.$$

Isto se reduz a

$$\frac{x^2}{(a - t_1)(a - t_2)} + \frac{y^2}{(b - t_1)(b - t_2)} + \frac{z^2}{(c - t_1)(c - t_2)} = 0,$$

o que se segue-se do fato que $t_1 \neq t_2$ e $f(t_1) - f(t_2) = 0$.

17. Como toda superfície é localmente o gráfico de uma função diferenciável, S_1 é dada por $f(x, y, z) = 0$ e S_2 por $g(x, y, z) = 0$ em uma vizinhança de p; aqui 0 é um valor regular das funções diferenciáveis f e g. Nesta

vizinhança de p, $S_1 \cap S_2$ é dada como a imagem inversa de $(0,0)$ da aplicação $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : F(q) = (f(q), g(q))$. Como S_1 e S_2 se intersectam transversalmente, os vetores normais (f_x, f_y, f_z) e (g_x, g_y, g_z) são linearmente independentes. Assim, $(0,0)$ é um valor regular de F e $S_1 \cap S_2$ é uma curva regular (cf. exercício 17, seção 2.2).

20. A equação do plano tangente em (x_0, y_0, z_0) é

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

A reta passando por O e perpendicular ao plano tangente é dada por

$$\frac{xa^2}{x_0} = \frac{yb^2}{y_0} = \frac{zc^2}{z_0}.$$

Desta última expressão, obtemos

$$\frac{x^2a^2}{xx_0} = \frac{y^2b^2}{yy_0} = \frac{z^2c^2}{zz_0} = \frac{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}{xx_0 + yy_0 + zz_0}.$$

Da mesma expressão, e levando em conta a equação do elipsóide, obtemos

$$\frac{xx_0}{x_0/a^2} = \frac{yy_0}{y_0^2/b^2} = \frac{zz_0}{z_0^2/c^2} = \frac{xx_0 + yy_0 + zz_0}{1}.$$

Novamente pela mesma expressão e usando a equação do plano tangente, obtemos

$$\frac{x^2}{(x_0x)/a^2} = \frac{y^2}{(y_0y)/b^2} = \frac{z^2}{(z_0z)/c^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{1}.$$

Os lados direitos das três últimas equações são, portanto, iguais, e daí obtemos a equação desejada.

21. Imite a demonstração da Prop. 9 do apêndice ao Capítulo 2.

22. Seja r a reta fixa que é intersectada pelas normais de S e seja $p \in S$. O plano P_1, que contém p e r, contém todas as normais a S nos pontos $P_1 \cap S$. Considere um plano P_2 passando por p e perpendicular a r. Como a normal passando por p encontra r, P_2 é transversal a T_pS; logo, $P_2 \cap S$ é uma curva regular plana C em uma vizinhança de p (cf. Exercício 17,

seção 2.4). Além disto, $P_1 \cap P_2$ é perpendicular a $T_pS \cap P_2$; donde $P_1 \cap P_2$ é normal a C. Segue-se que as normais de C todas passam por um ponto fixo $q = r \cap P_2$; logo, C está contido em um círculo (cf. Exercício 4, seção 1.5). Assim, todo $p \in S$ tem uma vizinhança contida em alguma superfície de revolução com eixo r. Por conexidade, S está contida em uma destas superfícies.

Seção 2.5

8. Como $\partial E/\partial v = 0$, $E = E(u)$ é uma função apenas de u. Faça $\bar{u} = \int \sqrt{E}\, du$. Analogamente, $G = G(v)$ é uma função apenas de v, e podemos fazer $\bar{v} = \int \sqrt{G}\, dv$. Assim, $\bar{u}$ e $\bar{v}$ medem comprimentos de arco ao longo das curvas coordenadas, donde $\bar{E} = \bar{G} = 1$, $\bar{F} = \cos\theta$.

9. Parametrize a curva geratriz pelo comprimento de arco.

Seção 3.2

13. Como o plano osculador é normal a N, $N' = \tau n$ e, portanto, $\tau^2 = |N'|^2 = k_1^2 \cos^2\theta + k_2^2 \operatorname{sen}^2\theta$, onde θ é o ângulo de e_1 com a tangente à curva. Como a direção é assintótica, obtemos $\cos^2\theta$ e $\operatorname{sen}^2\theta$ como funções de k_1 e k_2, que, quando substituídas na expressão acima, fornecem $\tau^2 = -k_1 k_2$.

14. Fazendo $\boldsymbol{\lambda}_1 = \lambda_1 N_2$ e $\boldsymbol{\lambda}_2 = \lambda_2 N_1$, temos que

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2| &= k\,|\langle n, N_1\rangle N_2 - \langle n, N_2\rangle N_1| \\ &= \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2\cos\theta}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}\theta| &= |N_1 \wedge N_2| = |n \wedge (N_1 \wedge N_2)| \\ &= |\langle n, N_2\rangle N_1 - \langle n, N_1\rangle N_2|. \end{aligned}$$

16. Intersecte o toro com um plano contendo o seu eixo e use o Exercício 15.

18. Use o fato de que se $\theta = 2\pi/m$, então

$$\sigma(\theta) = 1 + \cos^2\theta + \ldots + \cos^2(m-1)\theta = \frac{m}{2},$$

que pode ser provado observando-se que

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4}\left(\sum_{\nu=-(m-1)}^{\nu=m-1} e^{2\nu i\theta} + 2m + 1\right)$$

e que a expressão sob o sinal de somatória é a soma de uma progressão geométrica, que fornece

$$\frac{\operatorname{sen}(2m\theta - \theta)}{\operatorname{sen}\theta} = -1.$$

19. **a.** Expresse t e h na base $\{e_1, e_2\}$ dada pelas direções principais, e calcule $\langle dN(t), h\rangle$.

b. Derive $\cos\theta = \langle N, n\rangle$, use que $dN(t) = -k_n t + \tau_g h$, e observe que $\langle N, b\rangle = \langle h, N\rangle = \operatorname{sen}\theta$, onde b é o vetor binormal.

20. Sejam S_1, S_2 e S_3 superfícies que passam por p. Mostre que as torsões geodésicas de $C_1 = S_2 \cap S_3$ com relação a S_2 e S_3 são iguais; ela será denotada por τ_1. Analogamente, τ_2 denota a torção geodésica de $C_2 = S_1 \cap S_3$ e τ_3 a de $S_1 \cap S_2$. Use a definição de τ_g para mostrar que, como C_1, C_2, C_3 são duas a duas ortogonais, $\tau_1 + \tau_2 = 0$, $\tau_2 + \tau_3 = 0$, $\tau_3 + \tau_1 = 0$. Segue-se que $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$.

Seção 3.3

2. Linhas assintóticas: $u =$ const., $v =$ const. Linhas de curvatura:

$$\log(v + \sqrt{v^2 + c^2}) \pm u = \text{const.}$$

3. $u + v =$ const., $u - v =$ const.

6. a. Tomando a reta r como sendo o eixo Oz e uma normal a r como o eixo Ox, temos que

$$z' = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Fazendo $x = \operatorname{sen}\theta$, obtemos

$$z(\theta) = \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \cos\theta + C.$$

Se $z(\pi/2) = 0$, então $C = 0$.

8. a. A afirmação é evidentemente verdadeira se $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ e $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_1$ são parametrizações que satisfazem a definição de contacto. Se $\mathbf{x}$ e $\bar{\mathbf{x}}$ são arbitrárias, observe que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \circ h$, onde h é a mudança de coordenadas. Segue-se que as derivadas parciais de $f \circ \mathbf{x} = f \circ \mathbf{x}_1 \circ h$ são combinações lineares das derivadas parciais de $f \circ \mathbf{x}_1$. Portanto, elas são nulas quando estas últimas também são.

b. Introduza parametrizações $\mathbf{x}(x,y) = (x, y, f(x,y))$ e $\bar{\mathbf{x}}(x,y) = (x, y, \bar{f}(x,y))$ e defina a função $h(x,y,z) = f(x,y) - z$. Observe que $h \circ \mathbf{x} = 0$ e $h \circ \bar{\mathbf{x}} = f - \bar{f}$. Segue-se da parte **a**, aplicada à função h, que $f - \bar{f}$ tem derivadas parciais de ordem < 2 iguais a zero em $(0,0)$.

d. Como o contacto de ordem > 2 implica o contacto de ordem ≥ 1, o parabolóide passa por p e é tangente à superfície em p. Tomando o plano T_pS como o plano xy, a equação do parabolóide se torna

$$\bar{f}(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey.$$

Seja $z = f(x,y)$ uma representação local da superfície no plano T_pS. Utilizando a parte **b**, obtemos que $d = c = 0$, $a = \frac{1}{2} f_{xx}$, $b = f_{xy}$, $c = \frac{1}{2} f_{yy}$.

15. Se existir um tal exemplo, ele poderá ser escrito localmente na forma $z = f(x,y)$, com $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. As condições dadas implicam que $f_{xx}^2 + f_{yy}^2 \neq 0$ em $(0,0)$, e que $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ se e somente se $(x,y) = (0,0)$.

Fazendo, como tentativa, $f(x,y) = \alpha(x) + \beta(y) + xy$, onde $\alpha(x)$ é uma função apenas de x e $\beta(y)$ é uma função apenas de y, verificamos que

$\alpha_{xx} = \cos x$, $\beta_{yy} = \cos y$ satisfazem as condições acima. Segue-se que

$$f(x, y) = \cos x + \cos y + xy - 2$$

é um tal exemplo.

16. Tome uma esfera contendo a superfície e diminua continuamente o raio da esfera. Estude as secções normais no ponto (ou nos pontos) onde a esfera encontra a superfície pela primeira vez.

17. Mostre que o hiperbolóide contém duas famílias a 1-parâmetro de retas que necessariamente são linhas assintóticas. Para encontrar estas famílias de retas, escreva a equação do hiperbolóide como

$$(x + z)(x - z) = (1 - y)(1 + y)$$

e mostre que, para cada $k \neq 0$, a reta $x+z = k(1+y)$, $x-z = (1/k)(1-y)$ pertence à superfície.

20. Observe que $(x/a^2, y/b^2, z/c^2) = fN$ para alguma função f e que um ponto umbílico satisfaz a equação

$$\left\langle \frac{d(fN)}{dt} \wedge \frac{d\alpha}{dt}, N \right\rangle = 0$$

para toda curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ sobre a superfície. Suponha que $z \neq 0$, multiplique esta equação por z/c^2, e elimine z e dz/dt (observe que a equação vale para todo vetor tangente à superfície). Quatro pontos umbílicos são encontrados, a saber,

$$y = 0, \qquad x^2 = a^2\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \qquad z^2 = c^2\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

A hipótese $z = 0$ não fornece outros pontos umbílicos.

21. a. Seja $dN(v_1) = av_1 + bv_2$, $dN(v_2) = cv_1 + dv_2$. Um cálculo direto fornece

$$\langle d(fN)(v_1) \wedge d(fN)(v_2), fN\rangle = f^3 \det(dN).$$

b. Mostre que $fN = (x/a^2, y/b^2, z/c^2) = W$, e observe que

$$d(fN)(v_i) = \left(\frac{\alpha_i}{a^2}, \frac{\beta_i}{b^2}, \frac{\gamma_i}{c^2}\right), \qquad \text{onde } v_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i),$$

$i = 1, 2$. Escolhendo v_i de forma que $v_1 \wedge v_2 = N$, conclua que

$$\langle d(fN)(v_1) \wedge d(fN(v_2), fN\rangle = \frac{\langle W, X\rangle}{a^2b^2c^2}\frac{1}{f},$$

onde $X = (x, y, z)$, e, portanto, $\langle W, X\rangle = 1$.

24. **d.** Escolha um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$ de forma que a origem O esteja em $p \in S$, o plano xy coincida com T_pS, e a direção positiva do eixo Oz coincida com a orientação de S em p. Além disto, escolha os eixos Ox e Oy em T_pS ao longo das direções principais em p. Se V é suficientemente pequena, ela pode ser representada como um gráfico de uma função diferenciável

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

onde D é um disco aberto em $\mathbb{R}^2$ e

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = f_{xy}(0,0) = 0, \qquad f_{xx}(0,0) = k_1, \qquad f_{yy}(0,0) = k_2.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $k_1 \geq 0$ e $k_2 \geq 0$ em D, e queremos provar que $f(x, y) \geq 0$ em D.

Suponha que , para algum $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$, $f((\bar{x}, \bar{y}) < 0$. Considere a função $h_0(t) = f(t\bar{x}, t\bar{y})$, $0 \leq t \leq 1$. Como $h_0'(0) = 0$, existe t_1, $0 \leq t_1 \leq 1$, tal que $h_0''(t_1) < 0$. Seja $p_1 = (t_1\bar{x}, t_1\bar{y}, f(t_1\bar{x}, t_1\bar{y})) \in S$, e considere a função altura h_1 de V com relação ao plano tangente $T_{p_1}S$ em p_1. Restrita à curva $\alpha(t) = (t\bar{x}, t\bar{y}, f(t\bar{x}, t\bar{y}))$, esta função altura é $h_1(t) = \langle \alpha(t) - p_1, N_1\rangle$, onde N_1 é o vetor normal unitário em p_1. Assim, $h_1''(t) = \langle \alpha''(t), N_1\rangle$, e, em $t = t_1$,

$$h_1''(t_1) = \langle (0, 0, h_0''(t_1)), (-f_x(p_1), -f_y(p_1), 1)\rangle = h_0''(t_1) < 0.$$

Mas $h_1''(t_1) = \langle \alpha''(t_1), N_1\rangle$ é, a menos de um fator positivo, a curvatura normal em p_1 na direção de $\alpha'(t_1)$. Isto é uma contradição.

Seção 3.4

10. c. Reduza o problema ao fato de que se λ é um número irracional e m e n assumem valores inteiros, o conjunto $\{\lambda m + n\}$ é denso na reta real. Para provar esta última afirmação, basta mostrar que o conjunto $\{\lambda m + n\}$ tem elementos positivos arbitrariamente pequenos. Suponha o contrário, mostre que a maior cota inferior dos elementos positivos de $\{\lambda m + n\}$ pertence a este conjunto, e obtenha uma contradição.

11. Considere o conjunto $\{\alpha_i : I_i \to U\}$ das trajetórias de w, com $\alpha_i(0) = p$, e faça $I = \cup_i I_i$: Por unicidade, a trajetória máxima $\alpha : I \to U$ pode ser definida fazendo $\alpha(t) = \alpha_i(t)$, onde $t \in I_i$.

12. Para todo $q \in S$, existe uma vizinhança U de q e um intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, tal que a trajetória $\alpha(t)$, com $\alpha(0) = q$, está definida em $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Por compacidade, é possível cobrir S com um número finito de tais vizinhanças. Seja ε_0 = mínimo dos $\varepsilon's$ correspondentes. Se $\alpha(t)$ está definido para $t < t_0$ e não está definido para t_0, tome $t_1 \in (0, t_0)$, com $|t_0 - t_1| < \varepsilon_0/2$. Considere a trajetória $\beta(t)$ de w, com $\beta(t_1) = \alpha(t_1)$, e obtenha uma contradição.

Seção 4.2

3. A parte "somente se" é imediata. Para provar a parte "se", seja $p \in S$ e $v \in T_pS$, $v \neq 0$. Considere uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, com $\alpha'(0) = v$. Afirmamos que $|d\varphi_p(\alpha'(0))| = |\alpha'(0)|$. Caso contrário, digamos, $|d\varphi_p(\alpha'(0))| > |\alpha'(0)|$, e, em uma vizinhança J de 0 em $(-\varepsilon, \varepsilon)$, teremos $\left|d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\right| > |\alpha'(t)|$. Isto implica que o comprimento de $\varphi \circ \alpha(J)$ é maior do que o comprimento de $\alpha(J)$, uma contradição.

6. Parametrize α pelo comprimento de arco s em uma vizinhança de t_0. Construa uma curva no plano com curvatura $k = k(s)$ e aplique o Exercício 5.

8. Faça $0 = (0,0,0)$, $G(0) = p_0$, e $G(p) - p_0 = F(p)$. Então $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação tal que $F(0) = 0$ e $|F(p)| = |G(p) - G(0)| = |p|$. Isto implica que F preserva o produto interno de $\mathbb{R}^3$. Assim, F aplica a base

$$\{(1,0,0,) = f_1,\ (0,1,0) = f_2,\ (0,0,1) = f_3\}$$

sobre uma base ortonormal, e se $p = \sum a_i f_i$, $i = 1, 2, 3$, então $F(p) = \sum a_i F(f_i)$. Portanto, F é linear.

11. **a.** Como F preserva distâncias e o comprimento de arco de uma curva diferenciável é o limite dos comprimentos de polígonos inscritos, a restrição $F| S$ preserva o comprimento de arco de uma curva em S.

c. Considere a isometria de uma faixa aberta do plano sobre um cilindro menos uma geratriz.

12. A restrição de $F(x, y, z) = (x, -y, -z)$ a C é uma isometria de C (cf. Exercício 11), cujos pontos fixos são $(1, 0, 0,)$ e $(-1, 0, 0)$.

17. As loxodrômicas fazem um ângulo constante com os meridianos da esfera. Pela projeção de Mercator (ver Exercício 16) os meridianos são levados em retas paralelas no plano. Como a projeção de Mercator é conforme, as loxodrômicas também são levadas em retas. Assim, a soma dos ângulos interiores de um triângulo na esfera é a mesma que a soma dos ângulos interiores de um triângulo no plano.

Seção 4.4

6. Use o fato de que o valor absoluto da curvatura geodésica é o valor absoluto da projeção sobre o plano tangente da curvatura usual.

8. Use o Exercício 1, parte **b**, e a Prop. 4 da seção 3.2.

9. Use o fato de que meridianos são geodésicas e que o transporte paralelo preserva ângulos.

10. Aplique a relação $k_g^2 + k_n^2 = k^2$ e o teorema de Meusnier ao cilindro projetante.

12. Parametrize uma vizinhança de $p \in S$ de tal modo que as duas famílias de geodésicas sejam curvas coordenadas (Corolário 1, seção 3.4). Mostre que isto implica que $F = 0$, $E_v = 0 = G_u$. Faça uma mudança de coordenadas para obter que $\bar{F} = 0$, $\bar{E} = \bar{G} = 1$.

13. Fixe dois vetores unitários ortogonais $v(p)$ e $w(p)$ em T_pS e faça o transporte paralelo deles a cada ponto de V. Assim, são obtidos dois campos de vetores diferenciáveis, unitários e ortogonais. Parametrize V de forma que as direções destes vetores sejam tangentes às curvas coordenadas, que são geodésicas. Aplique o Exercício 12.

16. Parametrize uma vizinhança de $p \in S$ de tal modo que as linhas de curvatura sejam as curvas coordenadas e que $v =$ const. sejam linhas assintóticas. Segue-se que $e_v = 0$, e das equações de Mainardi-Codazzi, concluímos que $E_v = 0$. Isto implica que a curvatura geodésica de $v =$ const. é zero. Para o exemplo, olhe para o paralelo superior do toro.

18. Use a relação de Clairaut (cf. Exemplo 5).

19. Substitua na Eq. (4) os símbolos de Christoffel pelos seus valores como funções de E, F e G e derive a expressão da primeira forma fundamental:

$$1 = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2.$$

20. Use a relação de Clairaut.

Seção 4.5

4. **b.** Observe que a aplicação $x = \bar{x}$, $y = (\bar{y})^5$, $z = (\bar{z})^3$ fornece um difeomorfismo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sobre a superfície $(\bar{x})^2 + (\bar{y})^{10} + (\bar{z})^6 = 1$.

6. **a.** Restrinja v à curva $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$. O ângulo que $v(t)$ forma com o eixo Ox é t. Assim, $2\pi I = 2\pi$; logo, $I = 1$.

d. Restringindo v à curva $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, obtemos $v(t) = (\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t, -2\cos t \operatorname{sen} t) = (\cos 2t, -\operatorname{sen} 2t)$. Assim, $I = -2$.

Seção 4.6

8. Seja (ρ, θ) um sistema de coordenadas polares geodésicas tal que o pólo seja um dos vértices de Δ e um dos lados de Δ corresponda a $\theta = 0$. Sejam os outros dois lados dados por $\theta = \theta_0$ e $\rho = h(\theta)$. Como o vértice que corresponde ao pólo não pertence à vizinhança coordenada, tome um pequeno círculo de raio ε em torno do pólo. Então

$$\iint_{\Delta} K\sqrt{G}\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\theta_0} d\theta \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{h(\theta)} K\sqrt{G}\, d\rho \right).$$

Observando que $K\sqrt{G} = -(\sqrt{G})_{\rho\rho}$ e que $\lim_{\varepsilon\to 0}(\sqrt{G})_{\rho} = 1$, temos que o limite entre parêntesis é dado por

$$1 - \frac{\partial(\sqrt{G})}{\partial \rho}(h(\theta), \theta).$$

Utilizando o Exercício 7, obtemos

$$\iint_{\Delta} K\sqrt{G}\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\theta_0} d\theta - \int_0^{\theta_0} d\varphi = \alpha_3 - (\pi - \alpha_2 - \alpha_1) = \sum_1^3 \alpha_i - \pi.$$

12. **c.** Para $K \equiv 0$, o problema é trivial. Para $K > 0$, use a parte **b**. Para $K < 0$, considere uma vizinhança coordenada V da pseudo-esfera (cf. Exercício 6, parte **b**, seção 3.3) parametrizada por coordenadas polares (ρ, θ); isto é, $E = 1$, $F = 0$, $G = \operatorname{senh}^2 \rho$. Calcule as geodésicas de V; convém utilizar a mudança de coordenadas $\operatorname{tgh} \rho = 1/w$, $\rho \neq 0$, $\theta = \theta$, de forma que

$$E = \frac{1}{(w^2-1)^2}, \qquad G = \frac{1}{w^2 - 1}, \qquad F = 0,$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{2w}{w^2-1}, \qquad \Gamma_{12}^1 = -\frac{w}{w^2-1}, \qquad \Gamma_{22}^1 = w,$$

e os outros símbolos de Christoffel são nulos. Segue-se que as geodésicas não-radiais satisfazem a equação $(d^2w/d\theta^2) + w = 0$, onde $w = w(\theta)$. Assim, $w = A\cos\theta + B \operatorname{sen}\theta$; isto é

$$A \operatorname{tgh} \rho \cos\theta + B \operatorname{tgh} \rho \operatorname{sen} \theta = 1.$$

Portanto, a aplicação de V em $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\xi = \operatorname{tgh} \rho \cos \theta, \qquad \eta = \operatorname{tgh} \rho \operatorname{sen} \theta,$$

$(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, é uma aplicação geodésica.

13. **b.** Defina $\mathbf{x} = \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^2 \to S$. Seja $v = v(u)$ uma geodésica em U. Como φ é uma aplicação geodésica e as geodésicas de $\mathbb{R}^2$ são retas, então $d^2v/du^2 \equiv 0$. Esta condição, junto com a parte **a**, fornece o resultado desejado.

c. A equação (a) é obtida da Eq. (5) da seção 4.3 usando a parte **b**. Pela Eq. (5a) da seção 4.3 e pela parte **b** temos

$$KF = (\Gamma^1_{12})_u - 2(\Gamma^2_{12})_v + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12}.$$

Intercambiando u e v na expressão acima e subtraindo os resultados, obtemos $(\Gamma^1_{12})_u = (\Gamma^2_{12})_v$, donde a Eq. (b). Finalmente, as Eqs. (c) e (d) são obtidas das Eqs. (a) e (b), respectivamente, intercambiando u e v.

d. Derivando a Eq. (a) com relação a v, a Eq. (b) com relação a u, e subtraindo os resultados, obtemos

$$EK_v - FK_u = -K(E_v - F_u) + K(-F\Gamma^2_{12} + E\Gamma^1_{12}).$$

Levando em conta os valores de Γ^k_{ij}, a expressão acima nos dá

$$EK_v - FK_u = -K(E_v - F_u) + K(E_v - F_u) = 0.$$

Analogamente, obtemos das Eqs. (c) e (d), $FK_v - GK_u = 0$, donde $K_v = K_u = 0$.

Seção 4.7

1. Considere uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ em $T_{\alpha(0)}S$ e tome o transporte paralelo de e_1 e e_2 ao longo de α, obtendo uma base ortonormal $\{e_1(t), e_2(t)\}$ em cada $T_{\alpha(t)}S$. Faça $w(\alpha(t)) = w_1(t)e_1(t) + w_2(t)e_2(t)$. Então $D_y w = w_1'(0)e_1 + w_2'(0)e_2$ e o segundo membro é a velocidade da curva $w_1(t)e_1 + w_2(t)e_2$ em T_pS em $t = 0$.

2. **b.** Mostre que se $(t_1, t_2) \subset I$ é pequeno e não contém "pontos angulosos de α," então o campo de vetores tangentes de $\alpha((t_1, t_2))$ pode ser estendido a um campo vetorial y em uma vizinhança de $\alpha((t_1, t_2))$. Assim, restringindo v e w a α, a propriedade 3 se torna

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), w(t)\rangle = \left\langle \frac{Dv}{dt}, w \right\rangle + \left\langle v, \frac{Dw}{dt} \right\rangle,$$

o que implica que o transporte paralelo em $\alpha|\,(t_1, t_2)$ é uma isometria. Por compacidade, isto pode ser estendido a todo o intervalo I. Reciprocamente, suponha que o transporte paralelo seja uma isometria. Seja α uma trajetória de y passando por um ponto $p \in S$. Restrinja v e w a α. Escolha uma base ortonormal $\{e_1(t), e_2(t)\}$ como na solução do Exercício 1, e faça $v(t) = v_1e_1 + v_2e_2$, $w(t) = w_1e_1 + w_2e_2$. A propriedade 3 então se torma a "regra do produto":

$$\frac{d}{dt}(\sum_i v_iw_i) = \sum_i \frac{dv_i}{dt}w_i + \sum_i v_i\frac{dw_i}{dt}, \qquad i = 1, 2.$$

c. Seja dado D e escolha uma parametrização ortogonal $\mathbf{x}(u, v)$. Seja $y = y_1\mathbf{x}_u + y_2\mathbf{x}_v$, $w = w_1\mathbf{x}_u + w_2\mathbf{x}_v$. Pelas propriedades 1, 2 e 3, segue-se que D_yw é determinado pelo conhecimento de $D_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_u$, $D_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_v$, $D_{\mathbf{x}_v}\mathbf{x}_v$. Faça $D_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_u = A_{11}^1\mathbf{x}_u + A_{11}^2\mathbf{x}_v$, $D_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_v = A_{12}^1\mathbf{x}_u + A_{12}^2\mathbf{x}_v$, $D_{\mathbf{x}_v}\mathbf{x}_v = A_{22}^1\mathbf{x}_u + A_{22}^2\mathbf{x}_v$. Pela propriedade 3, segue-se que os A_{ij}^k satisfazem as mesmas equações que os Γ_{ij}^k (cf. Eq. (2), seção 4.3). Assim, $A_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$, o que prova que D_yv coincide com a operação "Tome a derivada usual e projete-a sobre o plano tangente".

3. **a.** Observe que

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_{(0,t)}(1, 0) &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}\right)_{s=0} = \frac{d}{ds}\gamma(s, \alpha(t), v(t))\Big|_{s=0} = v(t), \\ d\mathbf{x}_{(0,t)}(0, 1) &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)_{s=0} = \alpha'(t). \end{aligned}$$

b. Use o fato de que $\mathbf{x}$ é um difeomorfismo local para cobrir o conjunto compacto I com uma família de intervalos abertos nos quais $\mathbf{x}$ é bijetiva. Use o teorema de Heine-Borel e o número de Lebesgue da cobertura (cf. seção 2.7) para globalizar o resultado.

c. Para mostrar que $F = 0$, calculamos (cf. propridade 4 do Exercício 2)

$$\frac{d}{ds}F = \frac{d}{ds}\left\langle \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial s}, \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial s}, \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial s}, \frac{D}{\partial s}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial s}\right\rangle,$$

pois o campo de vetores $\partial \mathrm{x}/\partial s$ é paralelo ao longo de $t = $ const.. Como

$$0 = \frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial s}, \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial t}\right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial s}, \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial t}\right\rangle,$$

F não depende de s. Como $F(0,t) = 0$, temos que $F = 0$.

d. Isto é uma conseqüência do fato de que $F = 0$.

4. **a.** Use a desigualdade de Schwarz,

$$\left(\int_a^b fg\,dt\right)^2 \le \int_a^b f^2\,dt \int_a^b g^2\,dt,$$

com $f \equiv 1$ e $g = |d\alpha/dt|$.

5. **a.** Notando que $E(t) = \int_0^l \{(\partial u/\partial v)^2 + G(\gamma(v,t),v)\}\,dv$, obtemos (escrevemos, por conveniência, $\gamma(v,t) = u(v,t)$)

$$E'(t) = \int_0^l \left\{2\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial t} + \frac{\partial G}{\partial u}u'\right\} dv.$$

Como, para $t = 0$, $\partial u/\partial v = 0$ e $\partial G/\partial u = 0$, provamos a primeira parte. Além disto,

$$E''(t) = \int_0^l \left\{2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial^3 u}{\partial v\partial t^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(u')^2 + \frac{\partial G}{\partial u}u''\right\} dv.$$

Logo, usando $G_{uu} = -2K\sqrt{G}$ e notando que $\sqrt{G} = 1$ para $t = 0$, obtemos

$$E''(0) = 2\int_0^l \left\{\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^2 - K\eta^2\right\} dv.$$

6. b. Escolha $\varepsilon > 0$ e coordenadas em $\mathbb{R}^3 \supset S$ de forma que $\varphi(p, \varepsilon) = q$. Considere os pontos $(\rho, \varepsilon) = r_0$, $(\rho, \varepsilon + 2\pi \operatorname{sen}\beta) = r_1, \ldots$, $(\rho, \varepsilon + 2\pi k \operatorname{sen}\beta) = r_k$. Tomando ε suficientemente pequeno, vemos que os segmentos de reta $\overline{r_0 r_1}, \ldots, \overline{r_0 r_k}$ pertencem a V se $2\pi k \operatorname{sen}\beta < \pi$ (Fig. 4.49). Como φ é uma isometria local, as imagens destes segmentos serão geodésicas ligando q a q, que são evidentemente quebradas em q (Fig. 4.49).

c. Deve-se provar que cada geodésica $\gamma : [0, l] \to S$ com $\gamma(0) = \gamma(l) = q$ é a imagem por φ de um dos segmentos de reta $\overline{r_0 r_1}, \ldots, \overline{r_0 r_k}$ definidos na parte b. Para alguma vizinhança $U \subset V$ de r_0, a restrição de $\varphi | U = \tilde{\varphi}$ é uma isometria. Assim, $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \gamma$ é um segmento de uma semi-reta L começando em r_0. Como $\varphi(L)$ é uma geodésica que coincide com $\gamma([0, l])$ em um intervalo aberto, ela coincide com γ onde γ está definida. Como $\gamma(l) = q$, L passa por um dos pontos r_i, $i = 1, \ldots, k$, digamos r_j, e então γ é a imagem de $\overline{r_0 r_j}$.

Seção 5.2

3. a. Use a relação $\varphi'' = -K\varphi$ para obter $((\varphi')^2 + K\varphi^2)' = K'\varphi^2$. Integre os dois lados desta última relação e use as condições de contorno do enunciado.

Seção 5.3

5. Suponha que toda seqüência de Cauchy em d converge e seja $\gamma(s)$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco. Suponha, por contradição, que $\gamma(s)$ está definida para $s < s_0$ mas não para $s = s_0$. Escolha uma seqüência $\{s_n\} \to s_0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que se n, $m > n_0$, $|s_n - s_m| < \varepsilon$. Portanto,

$$d(\gamma(s_m), \gamma(s_n)) \leq |s_n - s_m| < \varepsilon$$

e $\{\gamma(s_n)\}$ é uma seqüência de Cauchy em d. Seja $\{\gamma(s_n)\} \to p_0 \in S$ e seja W uma vizinhança de p_0 como a que é dada pela Prop. 1 da seção 4.7. Se m, n são suficientemente grandes, a pequena geodésica ligando $\gamma(s_m)$

a $\gamma(s_n)$ evidentemente coincide com γ. Assim, γ pode ser estendida além de p_0, uma contradição.

Reciprocamente, suponha que S é completa e seja $\{p_n\}$ uma seqüência de Cauchy em d de pontos em S. Como d é maior ou igual à distância euclidiana $\bar{d}$, $\{p_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em $\bar{d}$. Assim, $\{p_n\}$ converge para $p_0 \in \mathbb{R}^3$. Suponha, por contradição, que $p_0 \notin S$. Como uma seqüência de Cauchy é limitada, dado $\varepsilon > 0$ existe um índice n_0 tal que, para todo $n > n_0$, a distância $d(p_{n_0}, p_n) < \varepsilon$. Pelo teorema de Hopf-Rinow, existe uma geodésica minimizante γ_n ligando p_{n_0} a p_n com comprimento $< \varepsilon$. Quando $n \to \infty$, γ_n tende a uma geodésica minimizante γ com comprimento $\leq \varepsilon$. Parametrize γ pelo comprimento de arco s. Então, como $p_0 \notin S$, γ não está definida para $s = \varepsilon$. Isto contradiz a completitude de S.

6. Seja $\{p_n\}$ uma seqüência de pontos em S tal que $d(p, q) \to \infty$. Como S é completa, existe uma geodésica minimizante $\gamma_n(s)$ (parametrizada pelo comprimento de arco) ligando p a p_n com $\gamma_n(0) = p$. Os vetores unitários $\gamma_n'(0)$ têm um ponto de acumulação v na esfera unitária (compacta) de T_pS. Seja $\gamma(s) = \exp_p sv$, $s \geq 0$. Então $\gamma(s)$ é um raio partindo de p. Para ver isto, note que, para um s_0 fixado e n suficientemente grande, $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(s_0) = \gamma(s_0)$. Isto se segue da depêndencia contínua das geodésicas em relação às condições iniciais. Além disto, como d é contínua,

$$\lim_{n\to\infty} d(p, \gamma_n(s_0)) = d(p, \gamma(s_0)).$$

Mas se n é bastante grande, $d(p, \gamma_n(s_0)) = s_0$. Assim, $d(p, \gamma(s_0)) = s_0$, e γ é um raio.

8. Primeiro mostre que se d e $\bar{d}$ denotam as distâncias intrínsecas de S e $\bar{S}$, respectivamente, então $d(p, q) \geq c\bar{d}(\varphi(p), \varphi(q))$ para todos $p, q \in S$. Seja agora $\{p_n\}$ uma seqüência de Cauchy em d de pontos em S. Pela observação inicial, $\{\varphi(p_n)\}$ é uma seqüência de Cauchy em $\bar{d}$. Como $\bar{S}$ é completa, $\{\varphi(p_n)\} \to \varphi(p_0)$. Como φ^{-1} é contínua, $\{p_n\} \to p_0$. Assim, toda seqüência de Cauchy em d converge; logo S é completa (cf. Exercício 5).

9. *φ é injetiva:* Suponha, por contradição, que $p_1 \neq p_2 \in S_1$ são tais que $\varphi(p_1) = \varphi(p_2) = q$. Como S_1 é completa, existe uma geodésica

minimizante γ ligando p_1 a p_2. Como φ é uma isometria local, $\varphi \circ \gamma$ é uma geodésica ligando q a ele mesmo com o mesmo comprimento que γ. Qualquer ponto diferente de q em $\varphi \circ \gamma$ pode ser ligado a q por duas geodésicas, o que é uma contradição.

φ é sobrejetiva: Como φ é um difeomorfismo local, $\varphi(S_1) \subset S_2$ é um conjunto aberto em S_2. Vamos provar que $\varphi(S_1)$ também é fechado em S_2; como S_2 é conexa, isto implicará que $\varphi(S_1) = S_2$. Se $\varphi(S_1)$ não é fechado em S_2, existe uma seqüência $\{\varphi(p_n)\}$, $p_n \in S_1$, tal que $\{\varphi(p_n)\} \to p_0 \notin \varphi(S_1)$. assim, $\{\varphi(p_n)\}$ é uma seqüência de Cauchy não convergente em $\varphi(S_1)$. Como φ é uma isometria injetiva, $\{p_n\}$ é uma seqüência de Cauchy não convergente em S_1, uma contradição com a completitude de S_1.

10. **a.** Como

$$\frac{d}{dt}(h \circ \varphi(t)) = \frac{d}{dt}\langle \varphi(t), v\rangle = \langle \varphi'(t), v\rangle = \langle \operatorname{grad} h, v\rangle$$

e

$$\frac{d}{dt}(h \circ \varphi(t)) = dh(\varphi'(t)) = dh(\operatorname{grad} h) = \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} h\rangle,$$

concluímos, igualando os últimos membros das relações acima, que $|\operatorname{grad} h| \leq 1$.

b. Suponha que $\varphi(t)$ esteja definida para $t < t_0$ mas não para $t = t_0$. Então existe uma seqüência $\{t_n\} \to t_0$ tal que a seqüência $\{\varphi(t_n)\}$ não converge. Se m e n são suficientemente grandes, usamos a parte a para obter

$$d(\varphi(t_m), \varphi(t_n)) \leq \int_{t_n}^{t_m} |\operatorname{grad} h(\varphi(t))|\, dt \leq |t_m - t_n|,$$

onde d é a distância intrínseca de S. Isto implica que $\{\varphi(t_n)\}$ é uma seqüência de Cauchy não convergente em d, uma contradição com a completitude de S.

Seção 5.4

2. Suponha que

$$\lim_{r\to\infty}\left(\inf_{x^2+y^2\geq r} K(x,y)\right) = 2c > 0.$$

Então existe $R > 0$ tal que se $(x,y) \notin D$, onde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < \mathbb{R}^2\},$$

então $K(x,y) \geq c$. Assim, tomando pontos fora do disco D, podemos obter discos arbitrariamente grandes onde $K(x,y) \geq c > 0$. Vê-se facilmente que isto contradiz o teorema de Bonnet.

Seção 5.5

3. **b.** Suponha que $a > b$ e faça $s = b$ na relação $(*)$. Use as condições iniciais e os fatos de que $v'(b) < 0$, $u(b) > 0$, $uv \geq 0$ em $[0,b]$ para obter uma contradição.

c. De $[uv' - vu'] \geq 0$, obtem-se que $v'/v \geq u'/u$; isto é, $(\log v)' \geq (\log u)'$. Seja $0 \leq s_0 \leq s \leq a$, e integre a última desigualdade entre s_0 e s para obter

$$\log v(s) - \log v(s_0) \geq \log u(s) - \log u(s_0);$$

isto é, $v(s)/u(s) \geq v(s_0)/u(s_0)$. Em seguida, observe que

$$\lim_{s_0\to 0}\frac{v(s_0)}{u(s_0)} = \lim_{s_0\to 0}\frac{v'(s_0)}{u'(s_0)} = 1.$$

Assim, $v(s) \geq u(s)$ para todo $s \in [0,a)$.

6. Suponha, por contradição, que $u(s) \neq 0$ para todo $s \in (0, s_0]$. Utilizando a Eq. $(*)$ do Exercício 3, parte **b** (com $\bar{K} = L$ e $s = s_0$), obtemos

$$\int_0^{s_0}(K - L)uv\,ds + u(s_0)v'(s_0) - u(0)v'(0) = 0.$$

Suponha, por exemplo, que $u(s) > 0$ e $v(s) < 0$ em $(0, s_0]$. Então $v'(0) < 0$ e $v'(s_0) > 0$. Assim, o primeiro termo da soma acima é ≥ 0 e os outros dois termos são > 0, uma contradição. Todos os outros casos podem ser tratados de maneira análoga.

8. Seja $\mathcal{V}$ o espaço vetorial de campos de Jacobi J ao longo de γ com a propriedade que $J(l) = 0$. $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial de dimensão dois. Como $\gamma(l)$ não é conjugado a $\gamma(0)$, a aplicação linear $\theta : \mathcal{V} \to T_{\gamma(0)}S$ dada por $\theta(J) = J(0)$ é injetiva, e logo, por razões dimensionais, um isomorfismo. Assim, existe $J \in \mathcal{V}$ com $J(0) = w_0$. Pelo mesmo motivo, existe um campo de Jacobi $\bar{J}$ ao longo de γ com $\bar{J}(0) = 0$, $\bar{J}(l) = w_1$. O campo de Jacobi desejado é dado por $J + \bar{J}$.

Seção 5.6

10. Seja $\gamma : [0, l\} \to S$ uma geodésica simples e fechada em S e seja $v(0) \in T_{\gamma(0)}$ tal que $|v(0)| = 1$, $\langle v(0), \gamma'(0)\rangle = 0$. Tome o transporte paralelo $v(s)$ de $v(0)$ ao longo de γ. Como S é orientável, $v(l) = v(0)$ e v define um campo de vetores diferenciável ao longo de γ. Note que v é ortogonal a γ e que $Dv/ds = 0$, $s \in [0, l]$. Defina uma variação (com extremos livres) $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ por

$$h(s,t) = \exp_{\gamma(t)} tv(s).$$

Verifique que, para t pequeno, as curvas da variação $h_t(s) = h(s,t)$ são fechadas. Estenda a fórmula da segunda variação do comprimento de arco a esta situação, e mostre que

$$L_v''(0) = -\int_0^l K\,ds < 0.$$

Assim, $\gamma(s)$ é maior do que todas as curvas $h_t(s)$ para t pequeno, digamos $|t| < \delta \leq \varepsilon$. Trocando o parâmetro t por t/δ, obtemos a homotopia desejada.

Seção 5.7

9. Use a noção de torção geodésica τ_g de uma curva em uma superfície (cf. Exercício 19, seção 3.2). Como

$$\frac{d\theta}{ds} = \tau - \tau_g,$$

onde $\cos\theta = \langle N, n\rangle$ e a curva é fechada e suave, obtemos

$$\int_0^l \tau\, ds - \int_0^l \tau_g\, ds = 2\pi k,$$

onde k é um inteiro. Mas na esfera, todas as curvas são linhas de curvatura. Como as linhas de curvatura são caracterizadas por terem torção geodésica nula (cf. Exercício 19, seção 3.2), temos

$$\int_0^l \tau\, ds = 2\pi k.$$

Como toda curva fechada em uma esfera é homotópica a zero, vê-se facilmente que o inteiro k é zero.

Seção 5.10

7. Precisamos apenas mostrar que as geodésicas $\gamma(s)$ parametrizadas pelo comprimento de arco que se aproximam da fronteira de R^2_+ estão definidas para todos os valores do parâmetro s. Se o contrário fosse verdade, uma tal geodésica teria comprimento finito l, digamos, a partir de um ponto fixado p_0. Mas para os círculos de R^2_+ que são geodésicas, temos

$$l = \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\theta_0>\pi/2}^{\varepsilon} \frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right| \geq \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\theta_0>\pi/2}^{\varepsilon} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right| = \infty,$$

e o mesmo vale para as linhas verticais de R^2_+.

10. c. Para provar que a métrica é completa, note primeiro que ela domina a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^2$. Assim, se uma seqüência é uma seqüência de Cauchy na métrica dada, ela também é uma seqüência de Cauchy na métrica euclidiana. Como a métrica euclidiana é completa, uma tal seqüência converge. Segue-se que a métrica dada é completa (cf. Exercício 1, seção 5.3).

Índice Remissivo